第 59 卷 第 10 期 2010 年 10 月
1000-3290/2010/59(10)/6847-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 10, October 2010

Barriola-Vilenkin 黑洞 Dirac 场的广义 Stefan-Boltzmann 定律*

孟庆苗† 李中让 李玉山

(菏泽学院物理系, 菏泽 274015)

(2010 年 2 月 5 日收到;2010 年 3 月 24 日收到修改稿)

利用薄膜模型研究 Barriola-Vilenkin 黑洞的热辐射,得到了黑洞的热辐射满足广义 Stefan-Boltzmann 定律的结论,导出的广义 Stefan-Boltzmann 系数不再是一个恒量,当截断距离以及薄膜厚度取定后,它是一个与黑洞视界附近的时空度规以及辐射粒子的径向平均泻流速率有关的比例系数. 得到的 Barriola-Vilenkin 黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量与薄层膜内辐射粒子的径向平均泻流速率成正比,与黑洞的质量平方成反比.

关键词: Barriola-Vilenkin 黑洞, 薄膜模型, 广义 Stefan-Boltzmann 定律, 辐射能通量

PACC: 0420, 9760L

1. 引　　言

自从 Bekenstein[1] 和 Hawking[2] 的开创性工作之后,黑洞热力学已成为黑洞物理中最受人关注的研究领域之一. 't Hooft 提出的 brick-wall 模型[3] 对黑洞熵的起源给出了一种统计解释. 人们用 brick-wall 模型计算静态和稳态黑洞的熵,得到了黑洞熵与黑洞视界面积成正比的结论. 由于黑洞的 Hawking 辐射起源于视界附近的真空涨落,人们改进 brick-wall 方法,提出薄膜模型[4—7],认为黑洞的熵是来自视界附近的一个无穷小厚度薄层中量子场的贡献. 文献[8—12]采用薄膜模型计算黑洞的熵,同样得到了黑洞熵与黑洞视界面积成正比的结论. 有视界就有黑洞熵,就有 Hawking 辐射[13]. 然而,由于 Hawking 辐射谱是精确的热谱,意味着在辐射过程中量子纯态演化为热混合态,这将违背量子力学的幺正性原理. 2000 年 Parikh 和 Wilczek[14] 在考虑辐射粒子的自引力作用的情况下,将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿过程,得到了黑洞视界处粒子的量子隧穿率与黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵变有关,辐射谱偏离纯热谱并有可能满足幺正性的结论. 随后的一些工作[15—20] 都验证了这一方法的有效性. 显然,黑洞熵与黑洞热辐射之间存在着必然的内在联系,进一步研究二者之间的关系,是一项非常有意义的工作[21]. 最近我们利用黑洞视界附近的熵密度,对黑洞的热辐射进行了研究,得到了黑洞的热辐射满足广义 Stefan-Boltzmann 定律[22—31] 的结论. 由于 Barriola-Vilenkin 黑洞存在整体单极子,这带来了一些特殊的问题,与没有拓扑缺陷时比较,黑洞的熵和黑洞周围时空中沿测地线运动的粒子能量都多了一个因子$(1-8\pi\eta^2)$,为使研究结果更具有普遍意义,本文研究了具有拓扑缺陷的 Barriola-Vilenkin 黑洞的辐射能通量及辐射功率,证明了由于黑洞带有整体单极子所引起的时空对称性破缺将影响黑洞的热辐射.

2. Barriola-Vilenkin 黑洞 Dirac 场的广义 Stefan-Boltzmann 定律

在自然单位制下,Barriola-Vilenkin 黑洞外部的时空线元为[32]

$$\mathrm{d}s^2=\frac{(1-8\pi\eta^2)(r-r_{\mathrm{H}})}{r}\mathrm{d}t^2-\frac{r}{(1-8\pi\eta^2)(r-r_{\mathrm{H}})}\mathrm{d}r^2$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10773002)和山东省教育厅科技计划项目(批准号:J07WJ49)资助的课题.

† E-mail:mengqingmiao@ yahoo. com. cn

$$-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{1}$$

其中 $r_{\mathrm{H}}=\dfrac{2m}{1-8\pi\eta^2}$ 为黑洞的事件视界，m 为黑洞的质量参数，η 为对称性破缺的能量尺度. 黑洞的辐射温度为[33]

$$T_0=\frac{1-8\pi\eta^2}{4\pi r_{\mathrm{H}}}, \tag{2}$$

文献[34]利用薄膜模型得到了静态球对称黑洞 Dirac 场的统计熵为

$$S=\frac{7\pi^2\delta A_{\mathrm{H}}}{45\beta_{\mathrm{H}}^3\varepsilon(\varepsilon+\delta)f_{\mathrm{H}}^2}, \tag{3}$$

式中 $\beta_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{T_0}$ 为视界温度的倒数，$A_{\mathrm{H}}=4\pi r_{\mathrm{H}}^2$ 为黑洞的视界面积，ε 为截断距离，δ 为薄膜厚度，$f_{\mathrm{H}}=f(r)|_{r=r_{\mathrm{H}}}$，$f(r)$ 满足 $g_{00}=f(r)(r-r_{\mathrm{H}})$，可见，$f_{\mathrm{H}}$ 是一个与黑洞视界附近的时空度规有关的函数. 由于时空具有对称性，$g_{00}=0$ 即为黑洞的视界面方程，因而对于 Barriola-Vilenkin 黑洞

$$f_{\mathrm{H}}=\frac{1-8\pi\eta^2}{r_{\mathrm{H}}}=\frac{(1-8\pi\eta^2)^2}{2m}. \tag{4}$$

由(3)和(4)式可得 Barriola-Vilenkin 黑洞 Dirac 场的统计熵为

$$S=\frac{7\pi^2\delta A_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}^2}{45\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^2}T_0^3. \tag{5}$$

令 $\delta=n\varepsilon$，由(5)式可得

$$S_n=\frac{7\pi^2 A_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}^2}{45(1-8\pi\eta^2)^2}\frac{n}{\varepsilon(n+1)}T_0^3. \tag{6}$$

令 $n\to\infty$ 时对应的熵为 S_∞，由(6)式得 $S_n=\dfrac{n}{n+1}S_\infty$. 若取截断距离为一个 Planck 长度的厚度(与't Hooft 的固有厚度相一致)，即取 $\varepsilon=l_{\mathrm{p}}$，当 $\delta=10l_{\mathrm{p}}$ 时，所得的熵 $\left(S_{10}=\dfrac{10}{11}S_\infty\right)$ 近似等于整个黑洞的熵，此时，薄层膜的厚度仅比 Planck 长度高一个数量级，可见黑洞的熵主要是来自视界附近的一个无穷小厚度薄层中量子场的贡献. 根据黑洞的薄膜模型，由(5)式可得 Barriola-Vilenkin 黑洞视界面附近薄层膜内 Dirac 场的熵密度为

$$s=\frac{S}{V}=\frac{7\pi^2 r_{\mathrm{H}}^2}{45\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^2}T_0^3, \tag{7}$$

其中 V 为薄层膜的体积，由于 r_{H} 远远大于 ε 和 δ，这里取 $V=\delta A_{\mathrm{H}}$.

根据局域等效性原理，在黑洞视界附近无穷小厚度薄层膜局域内，热力学基本关系式仍成立，黑洞视界附近薄层膜内的能量密度 ρ，熵密度 s 与局域测得的温度 T_0 之间满足[22]

$$\rho=bT_0^4, \tag{8}$$

$$s=\frac{4}{3}bT_0^3. \tag{9}$$

对比(7)和(9)式可得

$$b=\frac{7\pi^2 r_{\mathrm{H}}^2}{60\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^2}. \tag{10}$$

将(10)式代入(8)式得

$$\rho=\frac{7\pi^2 r_{\mathrm{H}}^2}{60\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^2}T_0^4. \tag{11}$$

可见，对于给定的黑洞，当截断距离和薄膜厚度取定后，黑洞视界附近薄层膜内 Dirac 场的能量密度与其视界温度的 4 次方成正比. 考虑黑洞 Hawking 辐射的物理机制，黑洞视界面附近由于真空涨落产生的虚粒子对，当其中负能虚粒子通过隧道效应进入黑洞，黑洞的能量将减少，同时其中的正能粒子向外穿出黑洞外引力区飞向远方形成 Hawking 辐射. 实际上，薄层膜区域($r_{\mathrm{H}}+\varepsilon\to r_{\mathrm{H}}+\varepsilon+\delta$)内正能粒子的运动是非常复杂的，静止质量为零的粒子的世界线是类光的，而静止质量不为零的粒子的世界线是类时的. 为使问题简化，假定辐射的正能粒子沿径向向外的平均泻流速率为

$$v_{\mathrm{e}}=\overline{v}_r^{(+)}=\int_0^\infty v_r F(v_r)\mathrm{d}v_r, \tag{12}$$

式中 v_r 为正能粒子的径向速率，$F(v_r)$ 为正能粒子的径向速率分布函数，上标(+)表示只对 $v_r>0$ 的范围平均. v_{e} 不仅与辐射粒子的种类有关，还与黑洞视界附近的时空度规有关，黑洞的质量越大，其视界附近的引力场越强，v_{e} 值就越小. 由于黑洞视界附近的引力场极强，因而 v_{e} 值是非常小的. 类比黑洞的电磁辐射[22]，将薄层膜区域内的正能粒子到达黑洞辐射球面 $4\pi(r_{\mathrm{H}}+\varepsilon+\delta)^2$ 的平均时间表示为

$$\bar{t}=\frac{\delta\lambda}{2v_{\mathrm{e}}}, \tag{13}$$

λ 为修正常数. 由(11)和(13)式可得黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量为

$$M_{\mathrm{H}}^{(D)}=\frac{\rho V}{A\bar{t}}=\frac{14\pi^2 v_{\mathrm{e}}m^2}{15\lambda\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^4}T_0^4, \tag{14}$$

令

$$\sigma=\frac{14\pi^2 v_{\mathrm{e}}m^2}{15\lambda\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^4}. \tag{15}$$

(14)式可变为

$$M_{\mathrm{H}}^{(D)} = \sigma T_0^4 . \tag{16}$$

可见,对于给定的黑洞,当 ε,δ 和 v_e 取定后,黑洞的辐射能通量与其视界温度的 4 次方成正比.(16)式可称为 Barriola-Vilenkin 黑洞 Dirac 场的广义 Stefan-Boltzmann 定律.(15)式为对应的广义 Stefan-Boltzmann 比例系数.导出的 σ 不再是一个恒量,当截断距离以及薄膜厚度取定后,它是一个与黑洞视界附近的时空度规以及辐射粒子的径向平均泻流速率有关的比例系数.由于黑洞的 Hawking 辐射与黑洞视界附近的真空涨落有关,黑洞视界附近的时空度规将影响视界附近薄层膜内的真空涨落,从而影响黑洞热辐射的 σ 值.黑洞的质量越大,截断距离以及薄膜厚度越小,视界附近薄层膜内的真空涨落就越显著,则 σ 值就越大.辐射粒子的径向平均泻流速率越大,其逃逸黑洞引力场的能力就越强,则 σ 值就越大.这与(15)式所的结论是一致的.由(14)式可得 Barriola-Vilenkin 黑洞视界面附近 Dirac 场的辐射功率

$$P^{(\mathrm{D})} = \frac{224\pi^3 v_e m^4}{15\lambda\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^6} T_0^4 . \tag{17}$$

由量纲分析不难验证

$$l_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},\ m_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}},\ T_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{c^5\hbar}{Gk_{\mathrm{B}}^2}},\ \sigma_{\mathrm{p}} = \frac{k_{\mathrm{B}}^4}{\hbar^3 c^2}, \tag{18}$$

式中 l_{p} 为 Planck 长度,m_{p} 为 Planck 质量,T_{p} 为 Planck 温度,σ_{p} 为 Planck 广义 Stefan-Boltzmann 系数,$\hbar$ 为 Planck 常数,G 为万有引力常数,c 为真空中的光速,k_{B} 为 Boltzmann 常数.利用(18)式将(2)式恢复到普通单位制得

$$T_0 = \frac{\hbar c^3(1-8\pi\eta^2)^2}{8\pi k_{\mathrm{B}} G m}, \tag{19}$$

利用(18)式将(15)式恢复到普通单位制得

$$\sigma = \frac{14\pi^2 G^2 k_{\mathrm{B}}^4 v_e m^2}{15\hbar^3 c^7 \lambda\varepsilon(\varepsilon+\delta)(1-8\pi\eta^2)^4} . \tag{20}$$

利用(19)和(20)式将(16)式恢复到普通单位制得

$$M_{\mathrm{H}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c^5 v_e(1-8\pi\eta^2)^4}{30720\pi^2 G^2\lambda\varepsilon(\varepsilon+\delta)m^2} . \tag{21}$$

可见,当截断距离和薄膜厚度取定后,黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量,与薄层膜内辐射粒子的径向平均泻流速率成正比,与黑洞质量的平方成反比.将(17)式恢复到普通单位制得

$$P^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c v_e(1-8\pi\eta^2)^2}{1920\pi\lambda\varepsilon(\varepsilon+\delta)} . \tag{22}$$

可见,当截断距离和薄膜厚度取定后,黑洞的辐射功率与薄层膜内辐射粒子的径向平均泻流速率成正比.

3. 结论与讨论

研究表明,Barriola-Vilenkin 黑洞的热辐射满足广义 Stefan-Boltzmann 定律,导出的广义 Stefan-Boltzmann 系数不再是一个恒量,当截断距离以及薄膜厚度取定后,它是一个与黑洞的时空度规以及辐射粒子的径向平均泻流速率有关的比例系数.弯曲时空中黑洞的热辐射不同于平直时空中黑体的热辐射,黑洞周围的引力场和所带整体单极子将影响黑洞的热辐射.得到的 Barriola-Vilenkin 黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量与薄层膜内辐射粒子的径向平均泻流速率成正比,与黑洞的质量平方成反比,其辐射功率正比于薄层膜内辐射粒子的径向平均泻流速率.

令 $\eta=0$,由(19),(21)和(22)式可分别得到 Schwarzschild 黑洞的视界温度、视界面附近 Dirac 场的辐射能通量和辐射功率,其结果与文献[29]所得结论相一致.将 Barriola-Vilenkin 黑洞的视界温度、辐射能通量和辐射功率与不存在整体单极子的 Schwarzschild 黑洞的视界温度、辐射能通量和辐射功率相比三者均变小了.可见由于黑洞带有整体单极子所引起的时空对称性破缺将影响黑洞的热辐射.薄膜 brick-wall 模型虽给出了更多的黑洞热性质,但截断因子不能避免,表明在求解黑洞熵问题上采取半经典近似方法的局限性.本文给出了一种研究黑洞热辐射的新方法.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[2] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[3] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[4] Li X, Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **62** 104001

[5] Gao C J, Liu W B 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2221

[6] Li X, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 463

[7] Liu W B, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310

[8] He F, Zhao Z, Kim S W 2001 *Phys. Rev.* D **64** 044025

[9] He H, Zhao Z, Zhang L H 2002 *Int. J. Theor. Phys.* **41** 1781
[10] Liu W B, Zhao Z 2001 *Int. J. Mod. Phys.* A **16** 3793
[11] Gao C J, Shen Y G 2003 *Sci. China* G **33** 561 (in Chinese) [高长军、沈有根 2003 中国科学 G **33** 561]
[12] Meng Q M, Su J Q, Li C A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1822 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、李传安 2003 物理学报 **52** 1822]
[13] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2752
[14] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5024
[15] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14
[16] Yang S Z, Li H L, Jiang Q Q, Liu M Q 2007 *Sci. China* G **37** 66 (in Chinese) [杨树政、李慧玲、蒋青权、刘门全 2007 中国科学 G **37** 66]
[17] Jiang J J, Meng Q M, Wang S 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 2826
[18] Meng Q M, Su J Q, Jiang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3723 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、蒋继建 2007 物理学报 **56** 3723]
[19] Jiang Q Q, Yang S Z, Wu S Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2523
[20] He T M, Fan J H, Wang Y J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2321
[21] Zhou S W, Liu B, Huang J L, Liu W B 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010403
[22] Meng Q M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2102 (in Chinese) [孟庆苗 2003 物理学报 **52** 2102]
[23] Meng Q M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 471 (in Chinese) [孟庆苗 2005 物理学报 **54** 471]
[24] Meng Q M, Su J Q, Jiang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5077 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、蒋继建 2007 物理学报 **56** 5077]
[25] Meng Q M, Jiang J J 2008 *Sci. China* G **38** 171 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建 2008 中国科学 G **38** 171]
[26] Meng Q M, Wang S, Jiang J J, Deng D L 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2811
[27] Jiang J J, Meng Q M, Wang S 2009 *Chin. Phys.* B **18** 456
[28] Meng Q M, Jiang J J, Liu J L, Deng D L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 78 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、刘景伦、邓德力 2009 物理学报 **58** 78]
[29] Meng Q M, Jiang J J, Wang S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7486 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、王 帅 2009 物理学报 **58** 7486]
[30] Meng Q M, Jiang J J, Li C A 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 778 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、李传安 2010 物理学报 **59** 778]
[31] Meng Q M, Jiang J J, Li C A 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1487 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、李传安 2010 物理学报 **59** 1487]
[32] Barriola M, Vilenkin A 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 341
[33] Li G Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3673 (in Chinese) [李固强 2004 物理学报 **53** 3673]
[34] Li C A, Meng Q M, Su J Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]

Generalized Stenfan-Boltzmann law of the Dirac field of Barriola-Vilenkin black hole*

Meng Qing-Miao† Li Zhong-Rang Li Yu-Shan
(*Department of Physics, Heze University, Heze* 274015, *China*)

(Received 5 February 2010; revised manuscript received 24 March 2010)

Abstract

Using the thin film model of black hole, the thermal radiation laws of the Barriola-Vilenkin black hole are studied. We obtained the result that the thermal radiation of the black hole always satisfies the generalized Stenfan-Boltzmann law. The derived generalized Stenfan-Boltzmann coefficient is no longer a constant. When the cut-off distance and the thin film thickness are both fixed, it is a proportional coefficient related to the space-time metric near the event horizon and the average radial effusion velocity of the radiation particles in the thin film. The radiation energy flux of the Dirac field of the Barriola-Vilenkin black hole is proportional to the average radial effusion velocity of the radiation particles in the thin film, and inversely proportional to the square of the black hole mass.

Keywords: Barriola-Vilenkin black hole, thin film model, generalized Stenfan-Boltzmann law, radiation energy flux
PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10773002) and by the Technology Planning Project of Education Bureau of Shandong Province, China (Grant No. J07WJ49).

† E-mail: mengqingmiao@yahoo.com.cn