

# 大规模富社团网络的时空混沌同步\*

吕翎<sup>†</sup> 邹家蕊 杨明 孟乐 郭丽 柴元

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2010 年 1 月 21 日收到; 2010 年 2 月 1 日收到修改稿)

以 Plankton 时空混沌系统作为网络节点, 通过非线性耦合构成富社团 (rich-club, RC) 网络, 研究其时空混沌同步规律. 首先给出了 RC 网络中连接节点之间的非线性耦合函数的一般性选取原则. 进而基于 Lyapunov 稳定性定理, 理论分析了实现网络同步的条件. 最后, 通过仿真模拟检验了网络的时空混沌同步效果. 仿真研究表明, RC 网络中各富节点之间以及这些富节点各自星形连接的子网络中的所有节点均实现了完全同步.

**关键词:** 同步, 时空混沌, 富社团网络, Lyapunov 稳定性定理

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

自 Watts 和 Barabási 开创性地提出小世界 (small-world) 网络模型<sup>[1]</sup> 以及无标度 (scale-free) 网络模型<sup>[2]</sup> 以来, 复杂网络的相关研究得到了蓬勃发展, 其研究涉及生物网络、信息网络、技术网络以及社会网络等诸多领域<sup>[3-8]</sup>. 特别是近年来混沌系统在网络上的同步性能吸引了大量科学家的关注<sup>[9-16]</sup>. 最初的研究主要是针对规则网络而进行的, 发现大多数规则网络的同步性能良好. 但有些规则网络, 如最近邻网络当其规模充分大时, 网络同步将无法实现<sup>[17]</sup>. 后续的研究表明, 尽管小世界网络只是在规则网络的基础上所进行的一个微小修正, 但其混沌同步能力却明显好于规则网络的同步能力<sup>[18,19]</sup>. 迄今, 国际国内诸多学者针对各种类型的规则网络、小世界网络以及无标度网络的混沌同步进行了许多有价值的研究. Checco 等<sup>[20]</sup> 完成了随机网络的混沌同步研究; Timme 等<sup>[21]</sup> 研究了脉冲耦合动力学系统的网络整体同步规律; He 等<sup>[22]</sup> 研究了非线性耦合构成复杂网络的自适应同步特性; Hung 等<sup>[23]</sup> 研究了无标度网络的广义同步问题. Lü 等<sup>[24]</sup> 构建了一个具有一般形式的复杂网络, 并研究了它的同步问题.

对于真实网络的混沌同步研究是一项有实际

意义的工作, 尤其是网络中各个节点代表的混沌系统是比时间混沌系统更接近于自然界实际情况的时空混沌系统时. 这样的真实网络的混沌同步更是目前复杂网络同步研究的热点. 互联网是一个典型的大规模复杂网络, 可以用富社团 (rich-club, 简记为 RC) 网络模型来描述它的拓扑结构. 本文研究了以 Plankton 时空混沌系统作为网络节点, 通过非线性耦合构成 RC 网络的完全同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性定理, 通过理论分析确定了实现网络完全同步的条件. 进一步利用计算机数值仿真对理论分析的结果加以验证.

## 2. 网络的同步原理

用 RC 网络模型来描述互联网这一复杂网络时, 模型中有少量的节点具有大量的边, 这些节点被称为富节点 (rich-nodes), 节点之间倾向于彼此完全相互连接, 每个富节点与它相连接的其他节点构成一个星形子网络, 其结构如图 1 所示.

假设 RC 网络所有节点的状态方程是时空混沌系统

$$\frac{\partial \mathbf{x}(r, t)}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(r, t), t), \quad (1)$$

其中  $t$  为系统的时间变量,  $r$  为系统的空间坐标变量,  $\mathbf{x}(r, t) = (x_1(r, t), x_2(r, t), \dots, x_n(r, t)) \in \mathbf{R}^n$  则为系统的状态变量,  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

\* 辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082147) 和辽宁省教育厅创新团队计划 (批准号: 2008T108) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

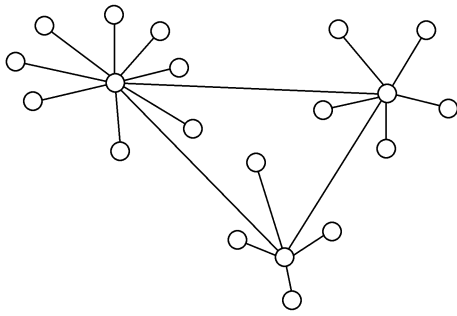


图1 RC网络

将  $F$  进行适当的分离

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(r,t)}{\partial t} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(r,t), t) \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{x}(r,t), t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}(r,t), t), \end{aligned} \quad (2)$$

这里  $\mathbf{L}(\mathbf{x}(r,t), t)$  是一个线性项, 且

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(r,t), t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(r,t), \quad (3)$$

$\mathbf{C}$  为经过特殊配置的线性项的系数矩阵. 显然,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}(r,t), t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}(r,t), t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(r,t), t). \quad (4)$$

考虑  $Q$  个时空混沌系统(2)作为节点, 以其中的非线性部分  $\mathbf{D}(\mathbf{x}(r,t), t)$  作为耦合函数构成 RC 网络, 其中有  $N$  个富节点, 它们之间为完全相互连接. 其余的  $Q - N$  个子节点与富节点之间构成  $N$  个单向星形子网络. 假设每个子网络的第一个节点为富节点, 其状态方程中的变量用  $\mathbf{x}_1^i(r,t)$  表示, 那么整个网络中富节点的状态方程可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_1^i(r,t)}{\partial t} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_1^i(r,t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_1^i(r,t)) \\ &\quad + \alpha_r \sum_{l=1}^N G_{il} \mathbf{D}(\mathbf{x}_1^l(r,t)) \end{aligned} \quad (5)$$

$(i = 1, 2, \dots, N),$

其中  $\alpha_r$  是耦合强度因子,  $G_{il}$  表示耦合矩阵  $\mathbf{G}_r$  的矩阵元, 其具体形式为

$$\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & N-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & N-1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$N$  个子网络中除了富节点以外其他节点的状态方程可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_j^i(r,t)}{\partial t} = \mathbf{C}\mathbf{x}_j^i(r,t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}_j^i(r,t))$$

$$\begin{aligned} &+ \alpha_d \sum_{m=1}^{k_i} G_{jm} \mathbf{D}(\mathbf{x}_m^i(r,t)) \\ &(j = 2, 3, \dots, k_i), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\alpha_d$  是耦合强度因子,  $G_{jm}$  表示子网络耦合矩阵  $\mathbf{G}_d$  的矩阵元,

$$\mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

定义富节点以及子网络中各节点状态变量之间的误差为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(r,t) &= \mathbf{x}_1^i(r,t) - \mathbf{x}_1^{i+1}(r,t) \\ &(i = 1, 2, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j^i(r,t) &= \mathbf{x}_j^i(r,t) - \mathbf{x}_{j+1}^i(r,t) \\ &(i = 1, 2, \dots, N; j = 2, 3, \dots, k_i - 1). \end{aligned} \quad (10)$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_i(r,t)}{\partial t} &= \mathbf{C}\mathbf{e}_i(r,t) + (\alpha_r N - 1) [\mathbf{D}(\mathbf{x}_1^i(r,t)) \\ &\quad - \mathbf{D}(\mathbf{x}_1^{i+1}(r,t))]. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_j^i(r,t)}{\partial t} &= \mathbf{C}\mathbf{e}_j^i(r,t) + (\alpha_d - 1) [\mathbf{D}(\mathbf{x}_j^i(r,t)) \\ &\quad - \mathbf{D}(\mathbf{x}_{j+1}^i(r,t))]. \end{aligned} \quad (12)$$

由(11)和(12)式可以看出, 当取  $\alpha_r = 1/N, \alpha_d = 1$  时, 两个表达式便可以写成下列形式

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i(r,t)}{\partial t} = \mathbf{C}\mathbf{e}_i(r,t), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j^i(r,t)}{\partial t} = \mathbf{C}\mathbf{e}_j^i(r,t). \quad (14)$$

构造 RC 网络的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i^2(r,t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^{k_i-1} [\mathbf{e}_j^i(r,t)]^2, \quad (15)$$

则  $V$  的导数可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i(r,t) \frac{\partial \mathbf{e}_i(r,t)}{\partial t} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^{k_i-1} \mathbf{e}_j^i(r,t) \frac{\partial \mathbf{e}_j^i(r,t)}{\partial t} \\ &= \mathbf{C} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i^2(r,t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^{k_i-1} [\mathbf{e}_j^i(r,t)]^2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

当取  $\mathbf{C} \leq 0$  时, 由(16)式可以得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0. \quad (17)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理<sup>[25]</sup>, RC 网络中各富节点之间以及这些富节点各自星形连接的子网络中的所有节点实现了完全同步.

### 3. 仿真实验与讨论

以 Plankton 时空混沌系统作为网络节点构成的 RC 网络为例进行上述同步原理的仿真实验. Plankton 时空混沌系统的状态方程为<sup>[26]</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial x(r,t)}{\partial t} = rx(r,t)(1-x(r,t)) - \frac{a^2 x^2(r,t)}{1+b^2 x^2(r,t)} y(r,t) + d \nabla^2 x(r,t), \\ \frac{\partial y(r,t)}{\partial t} = \left[ \frac{a^2 x^2(r,t)}{1+b^2 x^2(r,t)} - m \right] y(r,t) - \frac{gy(r,t)}{1+gy(r,t)} f + d \nabla^2 y(r,t). \end{cases} \quad (18)$$

其中系统参量  $a=5, b=5, m=0.6, g=10$ . 扩散系数  $d=0.0001$ . 作出系统最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随可调参量  $r$  和  $f$  的演化关系, 如图 2 所示.

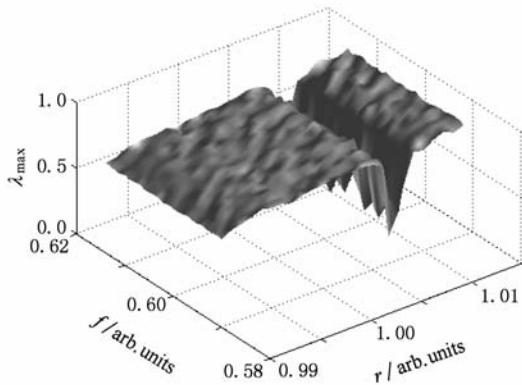


图 2 最大 Lyapunov 指数随参量  $r$  和  $f$  的演化关系

图 2 显示参量  $r=1, f=0.6$  处的最大 Lyapunov

指数为正值, 表明在该参量下系统处于混沌状态. 作出此时系统的状态变量随时空的演化如图 3 所示, 其相图如图 4 所示.

以图 1 所示的 RC 网络为例进行网络同步的仿真模拟. 其中富节点数  $N=3$ , 三个星形子网络节点数  $k_i$  分别为 5, 6, 9. 单个节点的状态方程为 (18) 式所描述的 Plankton 时空混沌系统, 3 个富节点处的 Plankton 时空混沌系统的状态变量取为  $(x_i^i(r,t), y_i^i(r,t))$  ( $i=1, 2, 3$ ), 星形子网络中除了富节点以外其他节点处的 Plankton 时空混沌系统的状态变量为  $(x_j^i(r,t), y_j^i(r,t))$  ( $j=2, 3, \dots, k_i$ ). 仿真时, 假设第一个富节点是星形子网络节点数  $k_1=5$  的那个. 配置的节点状态方程线性项的系数矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}. \quad (19)$$

网络的耦合函数为

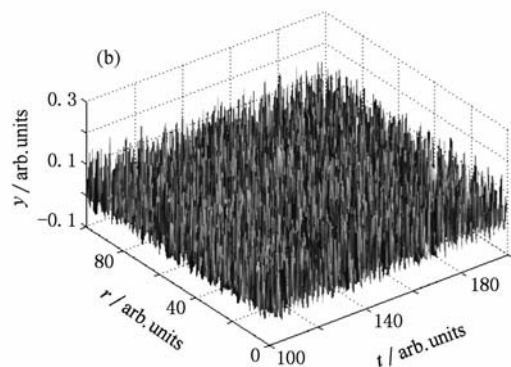
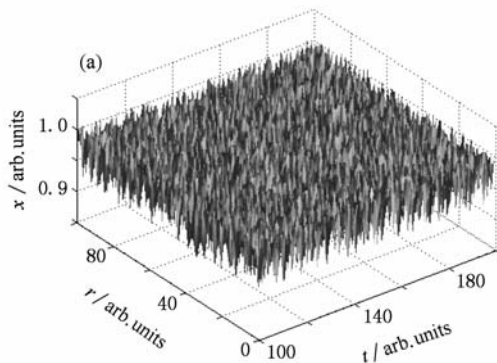


图 3 状态变量的时空演化 (a)  $x$ , (b)  $y$

$$D(x(r,t), t) = \begin{bmatrix} rx(r,t)(2-x(r,t)) - \frac{a^2 x^2(r,t)}{1+b^2 x^2(r,t)} y(r,t) + d \nabla^2 x(r,t) \\ \frac{a^2 x^2(r,t)}{1+b^2 x^2(r,t)} y(r,t) - \frac{gy(r,t)}{1+gy(r,t)} f + d \nabla^2 y(r,t) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

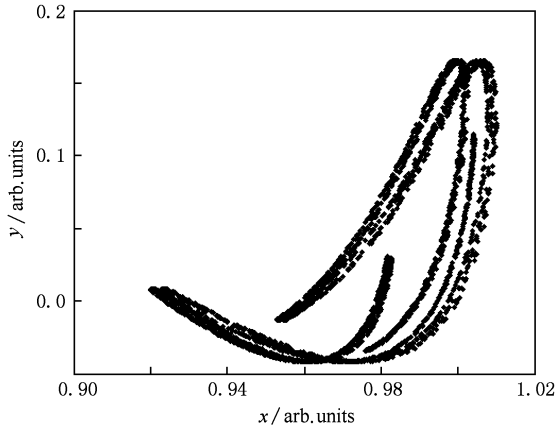


图4 系统的相图

在仿真过程中, RC 网络的参量取值均保持不变, 富节点的耦合强度因子  $\alpha_r = 1/3$ , 星形子网络的耦合强度因子  $\alpha_d = 1$ , 在 120 s 时进行网络的耦合连

接, 仿真模拟网络误差变量随时空的演化规律如图 5 和 6 所示. 图 5 显示的富节点状态变量之间的误差随时空的演化规律. 从图 5 中可以看出, 网络在耦合连接之前, 由于网络中各富节点状态变量所取的初始值不同, 因此, 其误差  $e_1 = (e_{11}, e_{12})^T = (x_1^1 - x_1^2, y_1^1 - y_1^2)^T$ ,  $e_2 = (e_{21}, e_{22})^T = (x_1^2 - x_1^3, y_1^2 - y_1^3)^T$  随时空的演化有很大差别. 但网络在 120 s 连接之后, 经过一个暂态过程, 3 个富节点误差变量随时空的演化均趋于零, 3 个富节点的完全同步得以实现. 同时, 星形子网络其误差为

$$e'_1 = (e'_{11}, e'_{12})^T = (x_1^1 - x_2^1, y_1^1 - y_2^1)^T,$$

$$e'_2 = (e'_{21}, e'_{22})^T = (x_2^1 - x_3^1, y_2^1 - y_3^1)^T,$$

$$e'_3 = (e'_{31}, e'_{32})^T = (x_3^1 - x_4^1, y_3^1 - y_4^1)^T,$$

$$e'_4 = (e'_{41}, e'_{42})^T = (x_4^1 - x_5^1, y_4^1 - y_5^1)^T$$

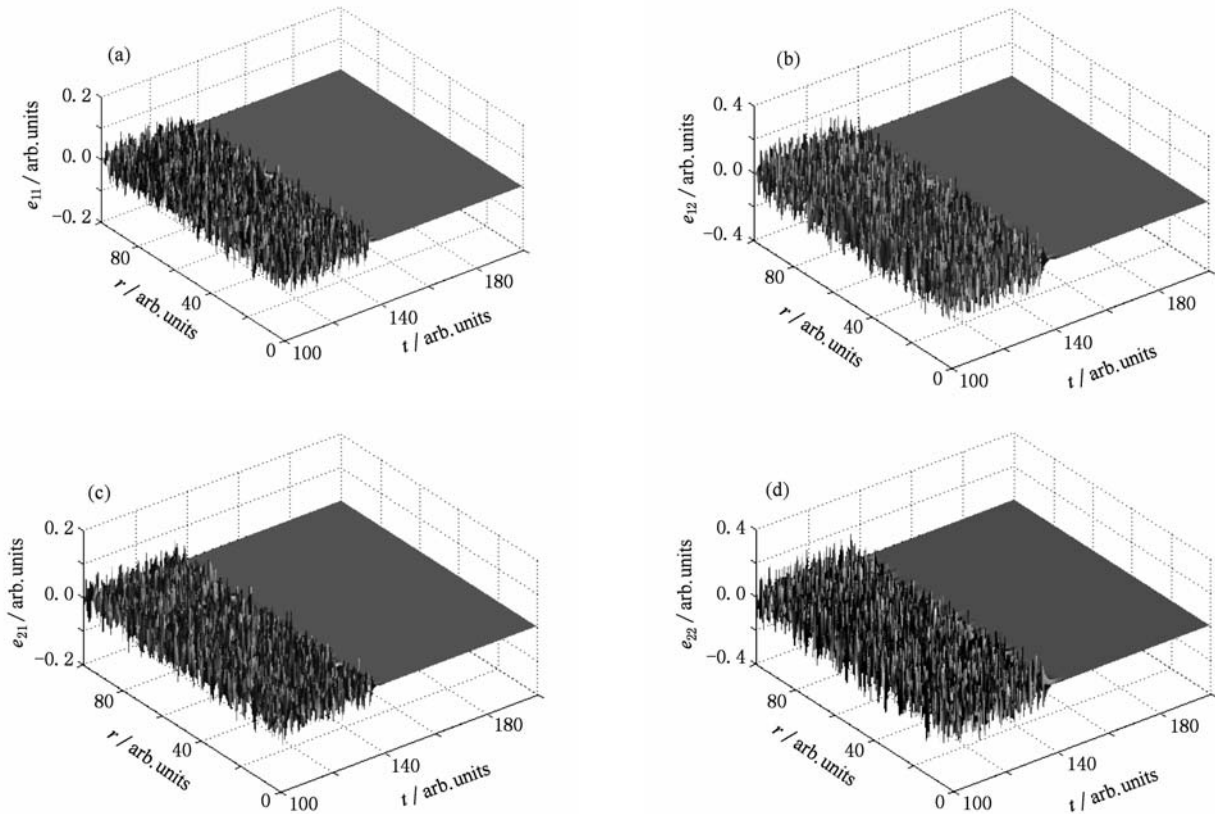


图5 富节点之间误差的时空演化 (a)  $e_{11}$ , (b)  $e_{12}$ , (c)  $e_{21}$ , (d)  $e_{22}$

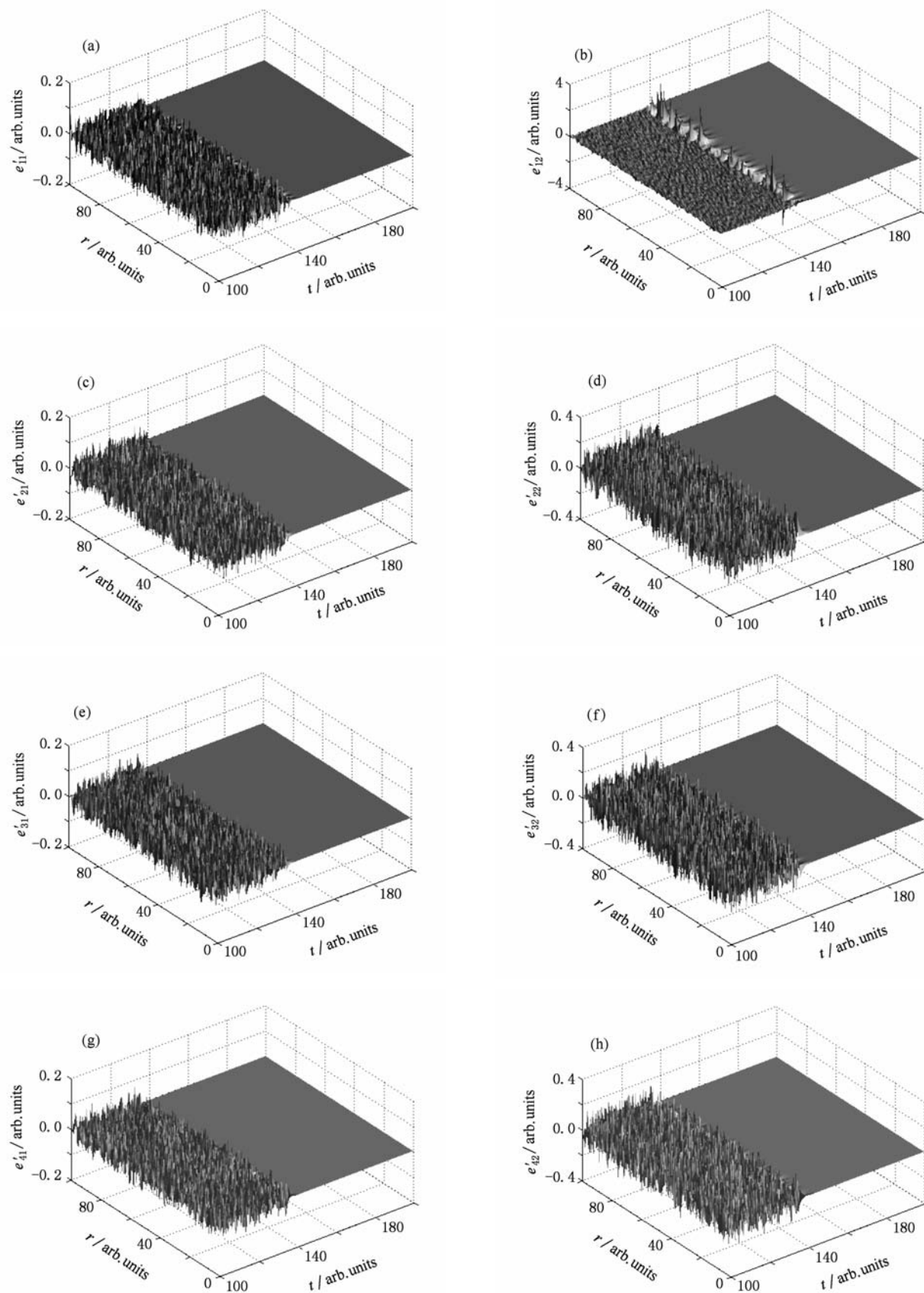


图 6 子网络误差的时空演化 (a)  $e'_{11}$ , (b)  $e'_{12}$ , (c)  $e'_{21}$ , (d)  $e'_{22}$ , (e)  $e'_{31}$ , (f)  $e'_{32}$ , (g)  $e'_{41}$ , (h)  $e'_{42}$

在 120 s 网络连接之后, 经过一个暂态过程也全部趋于零, 说明星形子网络中各节点的完全同步得以实现. 星形子网络 2 和 3 的同步情形与子网络 1 相同, 这里不再重复. 至此, 我们实现了整个 RC 网络的时空混沌同步.

## 4. 结 论

以 Plankton 时空混沌系统作为网络节点, 通过

非线性耦合构成 RC 网络, 研究其时空混沌同步规律. 首先给出了 RC 网络中连接节点之间的非线性耦合函数的一般性选取原则. 进一步基于 Lyapunov 稳定性定理, 理论分析了实现网络同步的条件. 最后, 通过仿真模拟检验了网络的时空混沌同步效果. 仿真结果表明, RC 网络中各富节点之间以及这些富节点各自星形连接的子网络中的所有节点均实现了完全同步.

- 
- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
  - [2] Albert R, Jeong H, Barabási A L 1999 *Nature* **401** 130
  - [3] Adamic L A, Huberman B A 2000 *Science* **287** 2115
  - [4] Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 26118
  - [5] Stelling J, Klamt S, Bettenbrock K, Schuster S, Gilles E D 2002 *Nature* **420** 190
  - [6] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268
  - [7] Ravasz E, Barabási A L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 26112
  - [8] Vázquez A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 66130
  - [9] Huang L, Kwangho P, Lai Y C, Yang L, Yang K Q 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 164101
  - [10] Zhang R, Hu A H, Xu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6851 (in Chinese) [张 荣、胡爱花、徐振源 2007 物理学报 **56** 6851]
  - [11] Lü L, Xia X L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 814 (in Chinese) [吕翎、夏晓岚 2009 物理学报 **58** 814]
  - [12] Lü L, Chai Y, Luan L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080506
  - [13] Ma X J, Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4426 (in Chinese) [马晓娟、王 延、郑志刚 2009 物理学报 **58** 4426]
  - [14] Hennig D, Schimansky-Geier L 2008 *Physica A* **387** 967
  - [15] Li Y, Lü L, Luan L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4463 (in Chinese) [李 岩、吕 翎、栾 玲 2009 物理学报 **58** 4463]
  - [16] Gao Y, Li L X, Peng H P, Yang Y X, Zhang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2081 (in Chinese) [高 洋、李丽香、彭海朋、杨义先、张小红 2008 物理学报 **57** 2081]
  - [17] Wu C W, Chua L O 1995 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **42** 430
  - [18] Gade P M, Hu C K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6409
  - [19] Wang X F, Chen G R 2002 *J. Bifur. Chaos* **12** 187
  - [20] Checco P, Biey M, Kocarev L 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **35** 562
  - [21] Timme M, Wolf F, Geisel T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 74101
  - [22] He G M, Yang J Y 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 1254
  - [23] Hung Y C, Huang Y T, Ho M C, Hu C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 16202
  - [24] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica A* **334** 281
  - [25] Lü L 2000 *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Dalian: Dalian Publishing House) (in Chinese) [吕 翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连: 大连出版社)]
  - [26] Malchow H, Radtke B, Kallache M, Medvinsky A B, Tikhonov D A, Petrovskii S V 2000 *Nonlinear Anal. : Real. World Appl.* **1** 53

# Synchronization of spatiotemporal chaos in large scale rich-club network<sup>\*</sup>

Lü Ling<sup>†</sup> Zou Jia-Rui Yang Ming Meng Le Guo Li Chai Yuan

(*College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*)

(Received 21 January 2010; revised manuscript received 1 February 2010)

## Abstract

The Plankton spatiotemporal chaos system is taken as network node and constructed as a rich-club network through nonlinear coupling. The synchronization of spatiotemporal chaos for the above network is investigated. The general selection rule of nonlinear coupling function connecting nodes in the rich-club network is presented. Furthermore, the condition to realize the network synchronization is analyzed theoretically based on Lyapunov stability theory. Finally, the synchronization effect of spatiotemporal chaos for the rich-club network is checked through artificial simulation. The results show that complete synchronization can be realized for all rich nodes in the rich-club network and all nodes in every subnetwork constructed in star-shape.

**Keywords:** synchronization, spatiotemporal chaos, rich-club network, Lyapunov stability theory

**PACC:** 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Education Committee, China (Grant No. 2008T108).

<sup>†</sup> E-mail: luling1960@yahoo.com.cn