

大气湍流对径向分布高斯列阵光束扩展 和方向性的影响^{*}

季小玲[†]

(四川师范大学物理学院, 成都 610068)

(2009 年 3 月 30 日收到, 2009 年 4 月 26 日收到修改稿)

采用积分变换的技巧, 推导出了径向分布高斯列阵光束通过湍流大气传输的二阶矩束宽和远场发散角的解析公式, 并详细研究了大气湍流对光束扩展和方向性的影响. 研究表明, 相干合成情况下, 子光束数 N 越小、径向分布半径 r_0 越大, 列阵光束扩展受湍流影响越小. 相干较非相干合成时列阵光束的扩展小, 但非相干合成时列阵光束扩展受湍流的影响比相干合成时的小. 特别地, N 足够小或 r_0 足够大时, 相干与非相干合成列阵光束的远场束宽相等. 另一方面, 还给出了相干和非相干合成径向分布高斯列阵光束与单束高斯光束具有相同的方向性的条件. 对主要结果给予了合理的物理解释.

关键词: 径向分布高斯列阵光束, 大气湍流, 相干和非相干合成, 二阶矩束宽

PACC: 9265, 4225

1. 引言

从一台激光器输出的激光经长程传输后, 在目标上要获得高功率和高光束质量激光是很困难的. 光束合成技术的主要目的是获得高的激光输出功率, 并保持良好的光束质量. 自由空间中合成光束的传输特性以及光束质量问题已有大量文献报道^[1-4]. 研究有代表性的列阵光束通过湍流大气传输的光束合成问题是非常重要的. 近来, 已有文献对列阵光束通过湍流大气的传输特性做了研究^[5-8]. 然而, 研究工作大多限于湍流对列阵光束光强分布的影响. 另一方面, 理论和实验都证明, 高斯-谢尔模型(GSM)光束在一定条件下可以产生与高斯光束相同的方向性^[9-11]. 近来, 这一结论被推广到湍流大气中. 研究发现, 除了 GSM 光束, 在湍流大气中还存在其他与高斯光束具有相同方向性(远场发散角)的部分相干和完全相干光束^[12-14]. 但是, 径向分布的激光列阵光束通过湍流大气传输的方向性研究还未见报道. 众所周知, 在一般情况下解析地研究激光束通过湍流大气的传输特性是困难的. 本文采用积分变

换的技巧, 推导出了径向分布高斯列阵光束通过湍流大气传输的二阶矩束宽和远场发散角的解析公式. 并且, 所得解析公式具有明确的物理意义. 根据所得到的解析公式, 本文详细研究了径向分布高斯列阵光束在湍流大气中的扩展和方向性, 得到一些有意义的结果, 并对主要结果给予了合理的物理解释.

2. 二阶矩束宽和光束扩展

假设 N 束束腰宽度均为 w_0 的高斯光束均匀地分布在一半径为 r_0 的圆上, 相邻子光束的角间距均为 $\alpha_0 = 2\pi/N$. 这 N 束子光束构成了一个径向分布列阵光束, 如图 1 所示. 在直角坐标系中, 源平面($z = 0$)上中心在 $(r_0, 0)$ 处的一束高斯光束的交叉谱密度函数可表示为

$$W_0(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, z=0) \\ = \exp\left[-\frac{(x'_1 - r_0)^2 + y'^2_1 + (x'_2 - r_0)^2 + y'^2_2}{w_0^2}\right]. \quad (1)$$

对(1)式作如下的坐标变换:

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60778048)资助的课题.

[†] E-mail: jixl100@163.com

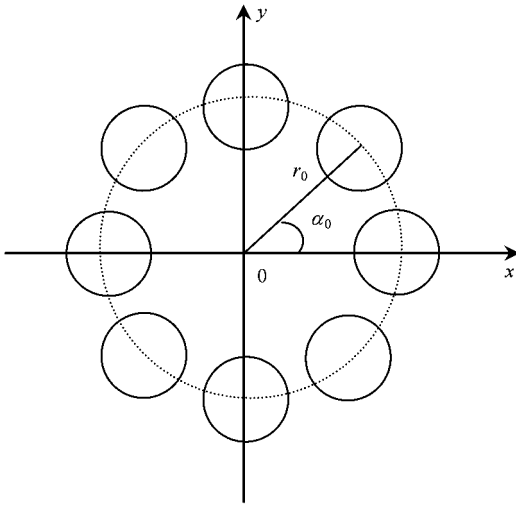


图1 径向分布光束列阵及符号说明

$$\begin{aligned} x' &\rightarrow x' \cos \alpha_n + y' \sin \alpha_n, \\ y' &\rightarrow y' \cos \alpha_n - x' \sin \alpha_n, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\alpha_n = n\alpha_0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1), \quad (3)$$

则可得到第 n 束高斯光束的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned} W_n(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, z=0) \\ = \exp \left[-\frac{(x'_1 \cos \alpha_n + y'_1 \sin \alpha_n - r_0)^2 + (y'_1 \cos \alpha_n - x'_1 \sin \alpha_n)^2}{w_0^2} \right] \\ \times \exp \left[-\frac{(x'_2 \cos \alpha_n + y'_2 \sin \alpha_n - r_0)^2 + (y'_2 \cos \alpha_n - x'_2 \sin \alpha_n)^2}{w_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

2.1. 相干合成

在相位锁定情况下,列阵光束是相干合成。 $z=0$ 平面处相干合成的径向分布的高斯列阵光束的交叉谱密度函数可表示为

$$\begin{aligned} W(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, z=0) = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{(x'_1 \cos \alpha_p + y'_1 \sin \alpha_p - r_0)^2 + (y'_1 \cos \alpha_p - x'_1 \sin \alpha_p)^2}{w_0^2} \right] \\ \times \exp \left[-\frac{(x'_2 \cos \alpha_q + y'_2 \sin \alpha_q - r_0)^2 + (y'_2 \cos \alpha_q - x'_2 \sin \alpha_q)^2}{w_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

根据广义惠更斯-菲涅耳原理,由(5)式表征的径向分布的高斯列阵光束通过大气湍流传输的平均光强为^[15]

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, z) \\ = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint d^2 r'_1 \iint d^2 r'_2 W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, z=0) \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r}'_2) - 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)] \right\} \\ \times \exp [\psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}, z) + \psi^*(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}, z)]_m, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{r}' = (x', y')$, $\mathbf{r} = (x, y)$, 波数 $k = 2\pi/\lambda$ (λ 为波长), $\psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}, z)$ 为大气湍流对球面波影响的随机相位因子, $*$ 表示共轭, $_m$ 表示系综平均, 并且^[15]

$$\begin{aligned} \exp [\psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}, z) + \psi^*(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}, z)]_m \\ = \exp \left\{ -4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) \right. \\ \times [1 - J_0(\kappa \xi |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|)] d\kappa d\xi \Big\}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $J_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数, $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流介质的折射率起伏空间谱密度函数。

为了得到解析结果,我们引入新积分变量

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_1)/2, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1. \end{aligned} \quad (8)$$

将(5)(7)和(8)式代入(6)式后得到

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \exp \left(-\frac{2r_0^2}{w_0^2} \right) \iint du_x du_y \iint dv_x dv_y \\ \times \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{2u_x^2 - 2r_0(\cos \alpha_p + \cos \alpha_q)u_x + 2u_y^2 - 2r_0(\sin \alpha_p + \sin \alpha_q)u_y + r_0(\cos \alpha_p - \cos \alpha_q)v_x}{w_0^2} \right] \\ \times \exp \left[-\frac{v_x^2/2 + v_y^2/2 + r_0(\sin \alpha_p - \sin \alpha_q)v_y}{w_0^2} \right] \exp \left[-\frac{ik}{z}(u_x v_x + u_y v_y) + \frac{ik}{z}(x v_x + y v_y) \right] \\ \times \exp \left\{ -4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) [1 - J_0(\kappa \xi v)] d\kappa d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

二阶矩束宽定义为^[16]

$$w^2(z) = \frac{2 \iint r^2 K(r, z) d^2 r}{\iint K(r, z) d^2 r}. \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式,并利用积分公式

$$\int x^2 \exp(-i2\pi x s) dx = -\frac{1}{(2\pi)^2} \delta''(s), \quad (11)$$

$$\int \exp(-i2\pi x s) dx = \delta(s), \quad (12)$$

和

$$\int f(x) \delta''(x) dx = f''(0), \quad (13)$$

其中 δ 表示 Dirac delta 函数, δ'' 为其二阶导数; f 为任意函数, f'' 为该函数的二阶导数; 经过复杂的积分运算后得到

$$w^2(z) = A + \frac{B}{k^2} z^2 + F z^3, \quad (14)$$

式中

$$A = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \{ r_0^2 [1 + \cos(\alpha_p - \alpha_q)] + w_0^2 \} R/Q \quad (15)$$

$$B = \frac{4}{w_0^2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \{ 1 - r_0^2 [1 - \cos(\alpha_p - \alpha_q)] w_0^2 \} R/Q, \quad (16)$$

$$F = \frac{8}{3} \pi^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (17)$$

$$R = \exp\{r_0^2 [1 + \cos(\alpha_p - \alpha_q)] w_0^2\}, \quad (18)$$

$$Q = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} R. \quad (19)$$

(14) 式为相干合成情况下径向分布的高斯列阵光束通过湍流大气传输的二阶矩束宽表达式, 它是本文得到的主要解析结果之一. 相干合成光束的束宽由 w_0 , r_0 , z , k (或 λ), N 和湍流等因素共同确定. (14) 式右边的前两项为合成光束在自由空间中的光束扩展, 显然其束宽在自由空间中按双曲线规律变化. (14) 式右边第三项为湍流引起的光束扩展, 它与 z^3 成正比. 因此, 在强湍流情况下, 当光束传输到足够远时, 合成光束的扩展主要由湍流项决定.

2.2. 非相干合成

根据广义惠更斯-菲涅尔原理, 由(4)式表征的第 n 束高斯光束在大气湍流中传输的平均光强表示为^[15]

$$I_n(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint d^2 r'_1 \iint d^2 r'_2 W_n(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, z=0)$$

$$\times \exp\left\{ \frac{ik}{2z} [(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r}'_2) - 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)] \right\} \\ \times \exp[\psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}, z) + \psi^*(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}, z)]_m. \quad (20)$$

在相位不锁定情况下, 列阵光束是非相干合成, 即合成平均光强为

$$K(\mathbf{r}, z) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n(\mathbf{r}, z). \quad (21)$$

采用 2.1 节中类似的方法可以得到非相干合成径向分布高斯光束通过湍流大气传输的二阶矩束宽的解析表达式为

$$w^2(z) = (w_0^2 + 2r_0^2) + \frac{4}{k^2 w_0^2} z^2 + F z^3. \quad (22)$$

当 $F=0$ 时 (22) 式简化为自由空间中的二阶矩束宽公式. (22) 式表明, 非相干合成光束的束宽由 w_0 , r_0 , z , k (或 λ) 和湍流等因素共同确定, 而与 N 无关. 当 $r_0=0$ 时 (22) 式简化为单束位于中央的高斯光束的二阶矩束宽公式.

利用(14)和(22)式就湍流对相干和非相干合成光束扩展的影响作了数值计算, 其结果总结于图 2—6. 数值计算参数取为 $k=10^7 \text{ m}^{-1}$, $w_0=0.01 \text{ m}$, 其他参数见各图中. 若采用 Tatarskii 谱, 则^[15]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (23)$$

式中 $\kappa_m=5.92/l_0$, l_0 为湍流的内尺度. C_n^2 是折射率结构常数, 它表征湍流的强弱. 当湍流的内尺度取典型值 $l_0=0.01 \text{ m}$, 由(17)式得到

$$F = 20.298 C_n^2. \quad (24)$$

图 2 和图 3 分别为相干合成情况下, 不同 N 和不同 r_0 的列阵光束的二阶矩束宽 $w(z)$ 随传输距离 z 的变化曲线. 在自由空间中, 当 r_0 一定时, $w(z)$ 随着 N 的增大而减小 (图 2 中虚线); 当 N 一定时, $w(z)$ 随着 r_0 的增大而增大 (图 3 中虚线). 湍流使得列阵光束扩展增大, 并且湍流中不同 N 和不同 r_0 对应的 $w(z)$ 曲线相靠拢 (图 2 和图 3 中实线). 因此, 当 r_0 一定时, N 越小的列阵光束扩展受湍流影响越小; 当 N 一定时, r_0 越大的列阵光束扩展受湍流影响越小. 图 4 为非相干合成情况下, 不同 r_0 的列阵光束的 $w(z)$ 随 z 的变化曲线. 图 4 表明, 当 N 一定时, 不同 r_0 对应的 $w(z)$ 曲线随传输距离 z 的增加而靠拢, 并且湍流中比自由空间中靠拢更快.

图 5 和图 6 中比较了相干与非相干合成情况下列阵光束的远场二阶矩束宽 w 随 N 和 r_0 的变化情

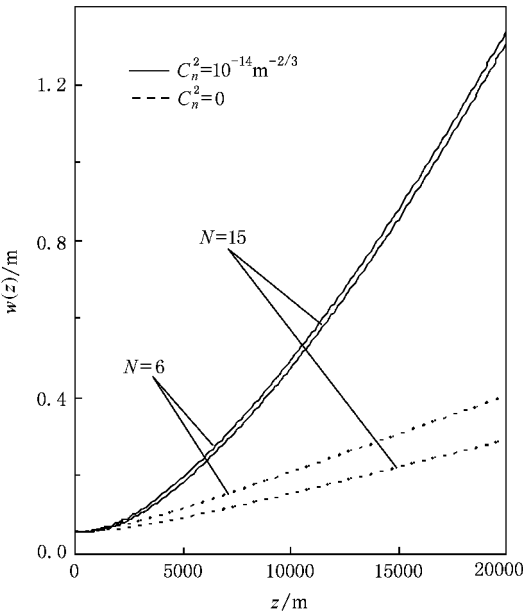


图2 相干合成情况下,不同 N 值的 $w(z)$ 随 z 的变化, $r_0 = 0.04\text{ m}$

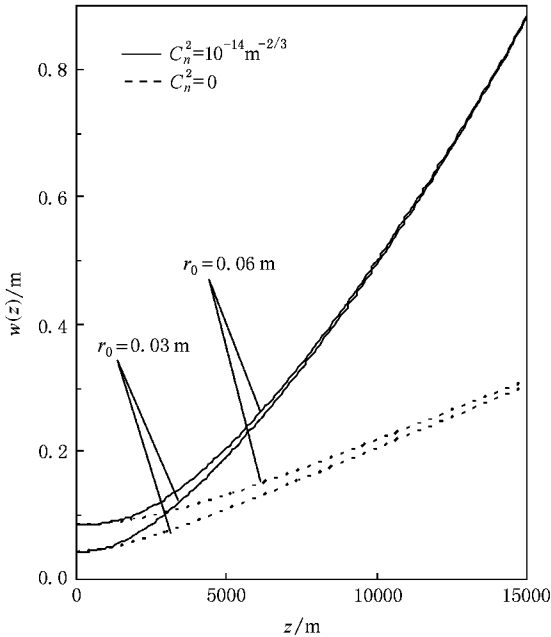


图4 非相干合成情况下,不同 r_0 值的 $w(z)$ 随 z 的变化, $N = 12$

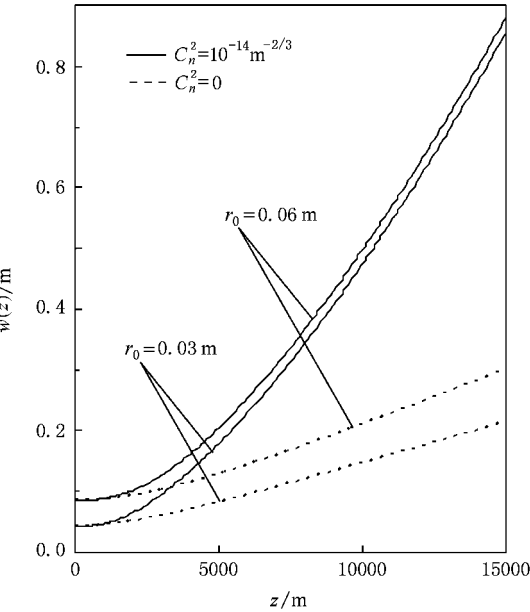


图3 相干合成情况下,不同 r_0 值的 $w(z)$ 随 z 的变化, $N = 12$

(例如,图5中 $N \leq 6$);当 N 一定, r_0 足够大时,相干与非相干合成光束的远场 w 相同(例如,图6中 $r_0 \geq 0.06\text{ m}$)。造成这一结果的物理原因是,当 r_0 一定, N 足够小时,或当 N 一定, r_0 足够大时,各子光束间没有交叠,这就导致相干合成与非相干合成没有区别了。

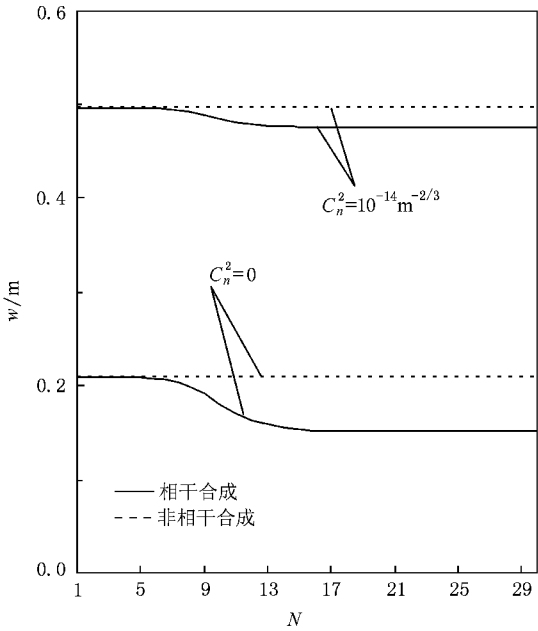


图5 相干与非相干合成情况下,远场的 w 随 N 的变化, $r_0 = 0.04\text{ m}$, $z = 10000\text{ m}$

况.比较可得:1)相干合成光束的远场 w 比非相干合成光束的小,但是湍流使得它们之间的差异减小,即非相干合成光束扩展受湍流的影响比相干合成光束的小.2)非相干合成光束的远场 w 不随 N 而变化,而随 r_0 的增大而非常缓慢地增大.当 r_0 一定, N 足够小时,相干与非相干合成光束的远场 w 相同

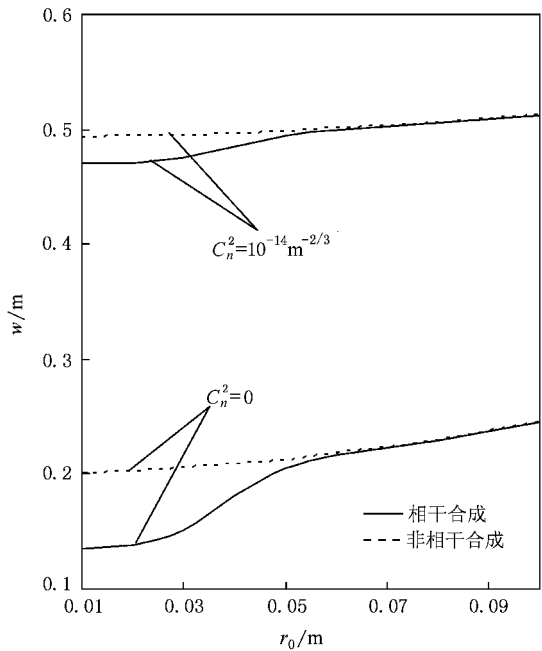


图 6 相干与非相干合成情况下,远场的 w 随 r_0 的变化, $N = 10$, $z = 10000\text{m}$

3. 远场发散角和方向性

由(14)式可以得到相干合成高斯列阵光束在湍流大气中传输的远场发散角为

$$\theta(z) \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \sqrt{B/k^2 + Fz}. \tag{25}$$

由(22)式可以得到非相干合成高斯列阵光束在湍流大气中传输的远场发散角为

$$\theta(z) \equiv \sqrt{\frac{4}{k^2 w_0^2} + Fz}. \tag{26}$$

特别地,当 $r_0 = 0$ 时(25)式和(26)式均简化为单束位于中央的高斯光束(用下角标 'Gs' 表示)的远场发散角公式,即

$$\theta_{Gs} = \sqrt{\frac{4}{k_{Gs}^2 w_{0Gs}^2} + Fz}. \tag{27}$$

比较(26)和(27)式可知,非相干合成高斯列阵光束与单束位于中央的具有相同光束参数(即 $w_{0Gs} = w_0$, $k_{Gs} = k$)的高斯光束的远场发散角相同.这是因为对于非相干合成,各子光束的传输是独立,且具有相同远场发散角.

(25)(26)和(27)式右边的第一项均为对应光束在自由空间中的角扩展,而第二项均为湍流引起

的角扩展,并且湍流引起的角扩展与光束参数无关.这表明无论在自由空间还是在湍流大气中,只要满足条件

$$\frac{\sqrt{B_{coh}}}{k_{coh}} = \frac{2}{k_{incoh} w_{0incoh}} = \frac{2}{k_{Gs} w_{0Gs}} \tag{28}$$

的相干和非相干合成径向分布的高斯列阵光束均可以产生与单束高斯光束相同的方向性(假定以远场发散角作为光束方向性的评价参数),其中下角标 "coh" 和 "incoh" 分别表示相干与非相干合成对应的光束参数.

表 1 与图 7 对应的光束计算参数,其满足(28)式

	$\lambda/\mu\text{m}$	w_0/mm	r_0/mm	N
a (单束高斯光束)	0.6328	10	—	1
b (相干合成列阵光束)	1.06	10.544	15	10
c (相干合成列阵光束)	1.54	15.663	25	20
d (非相干合成列阵光束)	1.06	16.751	32	—
e (非相干合成列阵光束)	1.54	24.334	40	—

现用数值计算例说明以上结论.图 7 为满足(28)式的相干和非相干合成径向分布的高斯列阵光束以及对应的单束高斯光束的二阶矩束宽 $w(z)$ 随

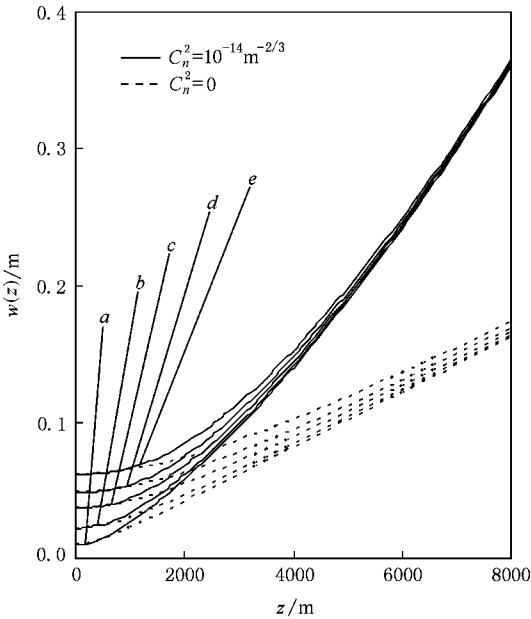


图 7 $w(z)$ 随 z 的变化(光束计算参数见表 1)

传输距离 z 变化曲线. 图 7 表明, 在自由空间和湍流大气中, 这 5 条束宽曲线随传输距离的增大而相靠拢, 即满足 (28) 式的光束具有相同的方向性.

4. 结 论

本文采用积分变换的技巧, 推导出了径向分布的高斯列阵光束通过湍流大气传输的二阶矩束宽 w 和远场发散角 θ 的解析公式. 所得解析公式形式简洁且具有明确的物理意义. 研究表明, 相干合成情况下, w 和 θ 由子光束束腰宽度 w_0 、径向分布半径 r_0 、传输距离 z 、波数 k (或波长 λ)、子光束数 N 和湍流折射率结构常数 C_n^2 等参数共同确定. 非相干合成

情况下, w 与 N 无关, θ 与 N 和 r_0 均无关. 相干合成情况下, 当 r_0 一定时, N 越小 (或当 N 一定时, r_0 越大) 的列阵光束扩展受湍流影响越小. 非相干合成情况下, 当 N 一定时, 湍流使得不同 r_0 对应的 $w(z)$ 曲线随传输距离 z 的增加而加快靠拢. 相干较非相干合成时列阵光束的扩展小, 但是非相干合成时列阵光束扩展受湍流的影响比相干合成的要小. 特别地, 当 r_0 一定, N 足够小时 (或当 N 一定, r_0 足够大时) 相干与非相干合成列阵光束的远场束宽相同. 另一方面, 本文还给出了相干和非相干合成径向分布高斯列阵光束与单束高斯光束具有相同的方向性的条件. 本文所得结果可以为实际高功率激光列阵光束通过湍流大气的传输和控制提供理论基础和计算依据.

- [1] Li B D, Ma H 2000 *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 2005
- [2] Li B Z, Li B D 2003 *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.* **5** 303
- [3] Cai Y J, Lin Q 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1111
- [4] Xiao R, Zhou P, Hou J, Jiang Z F, Liu M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 819 (in Chinese) [肖 瑞、周 朴、侯 静、姜宗福、刘 明 2007 物理学报 **56** 819]
- [5] Zhu Y B, Zhao D M, Du X Y 2008 *Opt. Express* **16** 18437
- [6] Cai Y J, Chen Y, Eyyuboğlu H T, Baykal Y 2007 *Appl. Phys. B* **88** 467
- [7] Zhang E T, Ji X L, Li B D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 571
- [8] Ji X L, Li X Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7674 (in Chinese) [季小

玲、李晓庆 2008 物理学报 **57** 7674]

- [9] Wolf E, Collett E 1978 *Opt. Commun.* **25** 293
- [10] Foley J T, Zubairy M S 1978 *Opt. Commun.* **26** 297
- [11] De Santis P, Gori F, Guattari G, Palma C 1979 *Opt. Commun.* **29** 256
- [12] Shirai T, Dogariu A, Wolf E 2003 *Opt. Lett.* **28** 610
- [13] Ji X L, Chen X W, Li B D 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 21
- [14] Chen X W, Ji X L 2008 *Opt. Commun.* **281** 4765
- [15] Andrews L C, Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation through Random Media* (Bellingham, Washington : SPIE Press)
- [16] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2

Influence of atmospheric turbulence on the spreading and directionality of radial Gaussian array beams^{*}

Ji Xiao-Ling[†]

(*Department of Physics , Sichuan Normal University , Chengdu 610068 , China*)

(Received 30 March 2009 ; revised manuscript received 26 April 2009)

Abstract

The analytical expressions for the mean-squared beam width and the far-field divergence angle of radial Gaussian array beams in atmospheric turbulence are derived. The influence of turbulence on the spreading and directionality is studied in detail. It is shown that for the coherent combination, the radial Gaussian array beams with smaller beam number N and larger radial radius r_0 are less affected by the turbulence. The spreading of radial Gaussian array beams for the coherent combination is smaller than that for the incoherent case. However, the spreading of radial Gaussian array beams for the coherent combination is more affected by turbulence than that for the incoherent case. Specially, the mean-squared beam width in the far-field for the coherent combination is the same as that for the incoherent case when N is small enough or r_0 is large enough. On the other hand, the condition under which radial Gaussian array beams for both coherent and incoherent combinations have the same far-field divergence angle as a single Gaussian beam is also given. The main results are interpreted physically.

Keywords : radial Gaussian array beam , atmospheric turbulence , coherent and incoherent combinations , mean-squared beam width

PACC : 9265 , 4225

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60778048).

[†]E-mail : jixl100@163.com