

二维有耗色散介质的时域逆散射方法*

刘广东 张业荣†

(南京邮电大学电子科学与工程学院, 南京 210003)

(2009 年 11 月 26 日收到; 2010 年 1 月 7 日收到修改稿)

为了重建二维有耗色散介质的电参数分布, 基于 Debye 模型, 应用泛函分析和变分法, 提出一种时域逆散射新方法. 该方法首先以最小二乘准则构造目标函数, 将逆问题表示为约束最小化问题; 接着应用罚函数法转化为无约束最小化问题; 然后基于变分计算导出闭式的 Lagrange 函数关于特征参数的 Fréchet 导数; 最后借助梯度算法和时域有限差分法迭代反演 Debye 模型参数. 为了对抗噪声污染和逆问题的病态特性, 采用了一阶 Tikhonov 正则化方法. 数值应用中, 利用 Polak-Ribière-Polyak 非线性共轭梯度法, 对二维乳房模型进行了数值测试, 测试结果显示了算法的可行性.

关键词: 逆散射, 色散介质, 正则化, 时域有限差分

PACC: 4110H, 8170L, 8760G, 0365D

1. 引 言

电磁逆散射是通过在散射体外部观测到的电磁场来推断散射体的电磁参数分布等目标信息, 其研究内容主要包括物理和数学建模、重建算法和数值仿真等方面. 由于它在医学成像、无损检测、目标识别、地球物理勘探、地震预报、雷达和遥感等领域有着广泛的应用, 因而近十年来研究者在该领域做了大量的工作, 也取得了长足的进展^[1-10].

电磁逆散射问题属于不适定问题^[1], 非线性和病态性是电磁逆散射的两个根本困难^[3,6]. 从处理非线性的方式来看, 早期的逆散射算法采用线性化近似方法, 它们的优点是计算量小、重建速度快, 但主要缺点是仅适用于弱散射体. 对于高对比度重建问题, 近期报道的主要方法是根据最小二乘原理将重建问题转化为优化问题迭代求解, 它们的优势是重建质量高, 不足是计算量大, 计算时间长^[8]. 无论是哪一类方法, 一般都需要采用正则化方案来处理病态性^[1,3,6]. 由于逆散射问题的复杂性, 相关领域存在许多问题尚待研究.

时域逆散射是利用目标的瞬态响应波形重建目标的物理特征或者进行目标识别. 相比单频方法, 时域方法由于包含了更多的信息, 可能获得更

准确的重建结果^[3,6]. 但为了提高重建的分辨率, 一般要求利用宽带脉冲信号作为激励源, 时域电磁逆散射算法顺应了这种要求, 加之时域有限差分 (finite-difference time-domain, FDTD) 法^[11-15] 和计算机水平的快速发展, 近十年来已经成功建立了好几种时域电磁逆散射算法. 它们的共同特点是, 假设在整个重建区域的介质是各向同性的, 本构关系为线性, 重建介质的电磁特性参数不随频率变化, 即重建介质是非色散介质, 数值测试结果显示了算法较好的重建性能. 这其中主要有 Gustafsson 等^[2] 提出的波分裂算法、Takenaka 等^[3] 提出的反演算法和 Rekanos 等^[6] 提出的 Lagrange 乘子算法.

然而现实的问题是, 生物肌体组织、土壤、岩石、水、等离子体和雷达吸波材料等许多介质的特征参数是随频率变化的, 属于色散介质, 激励源的频率对介质的特征参数有重要影响^[8,10,16]. 自然地, 介质的色散特性近年来引起了人们较多的关注^[11-13]. 对于色散介质, 人们已经建立了 Debye, Lorentz 和 Drude 等著名的模型描述它们的本构关系^[11-13]. Abenius 等^[7] 将二维无耗色散介质重建问题转化为约束优化问题, 利用商业软件提供的序列二次规划法直接求解. 而对于有耗色散介质, 到目前只见到 Winters 等^[18] 从理论上给出了一种时域逆散射全空间重建算法, 但还没有在整个重建空间测

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 60671065) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zhangyr@njupt.edu.cn

试算法的性能.

本文借助 Debye 模型,首先根据最小二乘准则,利用泛函分析和变分法提出一种时域逆散射算法,用于重建二维有耗色散介质的电参数分布;其次,考察了噪声的影响,并采用了一阶的 Tikhonov 正则化方案^[17];最后,针对当前的研究热点之一——早期微波乳腺癌检测^[10],运用 FDTD 法和 Polak-Ribière-Polyak (PRP) 非线性共轭梯度 (conjugate gradient, 简记为 CG) 法^[18],对二维乳房模型,在整个重建空间测试了算法的性能.

2. 问题描述

设平行于 z 轴且包含若干个异常体的柱状色散介质,置于已知特征参数的各向同性、本构关系线性的非色散介质中,且被平行于 z 轴的线电流源激励的天线 T 产生的横磁 (transverse magnetic, 简记为 TM) 入射波照射,产生的电磁场由天线 R 接收,横截面如图 1 所示.其中, S 表示重建介质区域, ∂S 和 \mathbf{n}_s 分别表示重建区域的边界和外法向单位矢量, Ω 表示已知介质区域, $\partial\Omega$ 和 \mathbf{n}_Ω 分别表示已知介质区域的边界和外法向单位矢量.设已知介质的相对介电常数为 $\varepsilon_r(\mathbf{r})$, 电导率为 $\sigma(\mathbf{r})$, 相对磁导率为 $\mu_r(\mathbf{r})$, 这里位置矢量 $\mathbf{r} = (x, y)^T \in \Omega$, 上标 t 表示转置 (下文同). M 根发射天线和 N 根接收天线分别位于 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m^T (m = 1, 2, \dots, M)$ 和 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n^R (n = 1, 2, \dots, N)$ 位置.

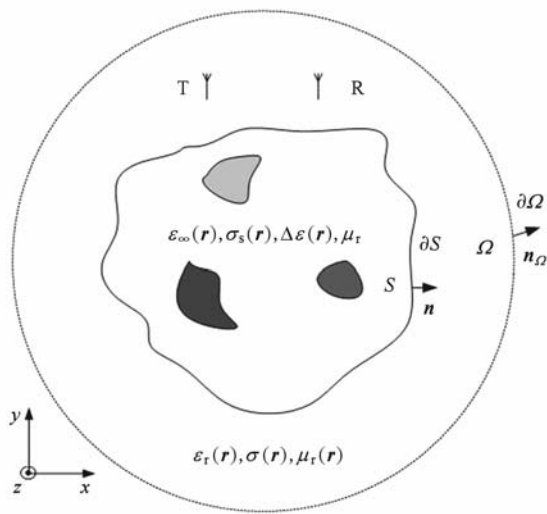


图 1 逆散射问题的几何模型

设重建介质的磁导率与频率无关,其相对磁导

率 μ_r 为 1,一般的地层结构、生物肌体组织多属此类^[1,8,16],其复介电系数满足以下单极 Debye 方程^[8]:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_r(\omega) &= \varepsilon_r(\omega) - j \frac{\sigma(\omega)}{\omega \varepsilon_0}, \\ \varepsilon_r(\omega) &= \varepsilon_\infty + \frac{\Delta \varepsilon}{1 + \omega^2 \tau^2}, \\ \sigma(\omega) &= \frac{\Delta \varepsilon \omega^2 \tau \varepsilon_0}{1 + \omega^2 \tau^2} + \sigma_s,\end{aligned}\quad (1)$$

其中, ε_0 为自由空间的介电常数, ω 为角频率, $\varepsilon_r(\omega)$ 和 $\sigma(\omega)$ 分别为与角频率相关的相对介电常数和等效电导率, τ 为弛豫时间, σ_s 为静态电导率.定义相对介电常数之差为 $\Delta \varepsilon \equiv \varepsilon_s - \varepsilon_\infty$, 其中, ε_s 和 ε_∞ 分别为静态和无限频率的相对介电常数.则在 整个计算区域,设其特征参数分布可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\mathbf{r}) &= (p_1(\mathbf{r}), p_2(\mathbf{r}), p_3(\mathbf{r}))^T \\ &= \begin{cases} (\varepsilon_\infty(\mathbf{r}), \sigma_s(\mathbf{r}), \Delta \varepsilon(\mathbf{r}))^T, & (\mathbf{r} \in S) \\ (\varepsilon_r(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r}), \mu_r(\mathbf{r}))^T, & (\mathbf{r} \in \Omega) \end{cases}.\end{aligned}\quad (2)$$

设加在第 m 根发射天线上的激励源为

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) &= (\eta_0 J_{z,m}(\mathbf{r}, t), 0, 0)^T, \\ J_{z,m}(\mathbf{r}, t) &= I(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m^T),\end{aligned}\quad (3)$$

其中, δ 是 Dirac 函数, $I(t)$ 为时间因子,自由空间的特征阻抗 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$, 其中 μ_0 为自由空间的磁导率.产生相应的电磁场矢量 $\mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ 满足算子方程和初始条件

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, 0) &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

其中, $\mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = (E_{z,m}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \eta_0 H_{x,m}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \eta_0 H_{y,m}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t))^T$, 包含边界条件的偏微分算子 \mathcal{L} 定义为

$$\mathcal{L} \equiv \begin{cases} \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{C} \frac{\partial}{c_0 \partial t} - \mathbf{D} & (\mathbf{r} \in \Omega), \\ \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{E} \frac{\partial}{c_0 \partial t} - \mathbf{F} + \mathbf{G} \frac{\partial^2}{c_0 \partial t^2} & (\mathbf{r} \in S), \end{cases}\quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_r(r) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r(r) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \eta_0 \sigma(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_s(r) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \eta_0 \sigma_s(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G} &= \begin{pmatrix} \tau \Delta \varepsilon(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)
\end{aligned}$$

其中, $c_0 = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$ 为自由空间的光速. 重建的目标就是根据接收天线测量到的电磁总场来确定重建区域介质的特征参数分布 $\mathbf{p}(r), r \in S$.

3. 重建算法

首先定义内积和范数分别为 $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle \equiv \int_0^T \int_S (\mathbf{a}^t \mathbf{b}) dS dt$, $\|\mathbf{x}\|^2 \equiv \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle$, 其中, 函数 \mathbf{a}, \mathbf{b} 和 \mathbf{x} 为时域实值向量, T 为测量时间. 在最小二乘准则下, 重建问题可以描述为关于泛函 $f(f_{\text{RES}}(\mathbf{p}), f_{\text{REG}}(\mathbf{p}, \gamma))$ 的最小化问题

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{p}} (f_{\text{RES}}(\mathbf{p}), f_{\text{REG}}(\mathbf{p}, \gamma)), f(f_{\text{RES}}(\mathbf{p}), \\
&f_{\text{REG}}(\mathbf{p}, \gamma)) = f_{\text{RES}}(\mathbf{p}) + f_{\text{REG}}(\mathbf{p}, \gamma), \quad (7)
\end{aligned}$$

同时满足约束条件(4)式. 其中与剩余差有关的项为

$$\begin{aligned}
f_{\text{RES}}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T \|\bar{\mathbf{d}}_{m,n}(\mathbf{p}, t)\|^2 dt, \\
\bar{\mathbf{d}}_{m,n}(\mathbf{p}, t) &\equiv \mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}_n^R, t) - \hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t), \\
\kappa &\equiv \frac{1}{M} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T \|\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)\|^2 dt} \right), \quad (8)
\end{aligned}$$

这里, $\bar{\mathbf{d}}_{m,n}(\mathbf{p}, t)$ 为剩余差, $\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)$ 为 $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)$ 激励下的时域测量场, $t \in [0, T]$, $\mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}_n^R, t)$ 为参数 \mathbf{p} 下相应的计算场, κ 为归一化因子.

与正则化相关的项为

$$f_{\text{REG}}(\mathbf{p}, \gamma) = \frac{1}{2} \gamma \int_S \|\nabla \mathbf{p}\|^2 dS, \quad (9)$$

这里采用了一阶 Tikhonov 正则化^[17], γ 为待定的正则化参数, ∇ 为 Hamilton 算子. 引入 Lagrange 乘子罚函数 $\mathbf{w}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = (W_{z,m}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), W_{x,m}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), W_{y,m}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t))^t, \mathbf{r} \in S, t \in [T, 0]$, 这样, 利用罚函数方法可以将原问题转化为无约束的优化问题. 设 \mathbf{p}^* 是原问题的解, 且 $\mathbf{w}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ 是相应的 Lagrange 乘子, 由 Kuhn-Tucker 定理^[19] 知, \mathbf{p}^* 必是 Lagrange 函数 $L(\mathbf{p}, \gamma) = f(\mathbf{p}, \gamma) + \sum_{m=1}^M \langle \mathbf{w}_m(\mathbf{p}) | \mathcal{L} \mathbf{u}_m(\mathbf{p}) - \mathbf{J}_m \rangle$ 的稳定点, 其必要条件是 Lagrange 函数 $L(\mathbf{p}, \gamma)$ 的一阶变分 $\delta L(\mathbf{p}, \gamma) |_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*}$ 等于零. 其中

$$\begin{aligned}
\delta L(\mathbf{p}, \gamma) &= \sum_{m=1}^M \left\langle \kappa \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{d}}_{m,n}(\mathbf{p}) | \mathbf{u}_m(\mathbf{p}) \right\rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{w}_m(\mathbf{p}) | \mathcal{L}(\delta \mathbf{u}_m) \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{w}_m(\mathbf{p}) | (\partial(\mathcal{L} \mathbf{u}_m(\mathbf{p}))/\partial \mathbf{p}) \rangle \delta \mathbf{p} \\
&\quad + \langle \delta \mathbf{w}_m | (\mathcal{L} \mathbf{u}_m(\mathbf{p}) - \mathbf{J}_m) \rangle \\
&\quad - \gamma \int_S (\nabla^2 \mathbf{p}) \delta \mathbf{p} dS. \quad (10)
\end{aligned}$$

定义 \mathcal{L} 的伴随算子为 \mathcal{L}^* , 满足关系

$$\mathcal{L}^* \equiv \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^t + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{B}^t + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}^t - \mathbf{D}^t & (\mathbf{r} \in \Omega), \\ -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^t + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{B}^t + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^t \\ -\mathbf{F}^t + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{G}^t & (\mathbf{r} \in S), \end{cases} \quad (11)$$

令 $\delta L(\mathbf{p}, \gamma) = 0$, 即要求 Lagrange 乘子 $\mathbf{w}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ 满足算子方程和初始条件

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* \mathbf{w}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= -\kappa \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{d}}_{m,n}(\mathbf{p}, t), \\
\mathbf{w}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, T) &= 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

比较(4)和(12)式, 容易看出 $\mathbf{w}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{u}_m(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ 满足相似形式的偏微分算子方程, 这样可以方便地利用相似的数值算法实现, 但应注意时间步进顺序上的差异.

再由当 $\omega^2 \tau^2 \ll 1$ 时, 色散电流 $\tilde{\mathbf{J}}_{z,m} \approx \partial E_{z,m} / \partial t - \tau \partial^2 E_{z,m} / \partial t^2$ 这一近似关系^[8], Lagrange 函数 $L(\mathbf{p}, \gamma)$ 关于 \mathbf{p} 的 Fréchet 导数为

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \sum_{m=1}^M \langle \mathbf{w}_m(\mathbf{p}) | (\partial(\mathcal{L} \mathbf{u}_m(\mathbf{p}))/\partial \mathbf{p}) \rangle \\
&\quad - \gamma \int_S (\nabla^2 \mathbf{p}) dS
\end{aligned}$$

$$= (g_1(p_1, \gamma), g_2(p_2, \gamma), g_3(p_3, \gamma))^T, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_1(p_1, \gamma) &= - \sum_{m=1}^M \int_0^T \int_S W_{z,m}(p_1, \mathbf{r}, t) \\
 &\quad \times \frac{\partial E_{z,m}(p_1, \mathbf{r}, t)}{c_0 \partial t} dS dt \\
 &\quad - \gamma \int_S (\nabla^2 p_1) dS, \\
 g_2(p_2, \gamma) &= - \sum_{m=1}^M \int_0^T \int_S W_{z,m}(p_2, \mathbf{r}, t) \\
 &\quad \times \eta_0 E_{z,m}(p_2, \mathbf{r}, t) dS dt \\
 &\quad - \gamma \int_S (\nabla^2 p_2) dS, \\
 g_3(p_3, \gamma) &= - \sum_{m=1}^M \int_0^T \int_S W_{z,m}(p_3, \mathbf{r}, t) \\
 &\quad \times \frac{\tilde{J}_{z,m}(p_3, \mathbf{r}, t)}{c_0} dS dt \\
 &\quad - \gamma \int_S (\nabla^2 p_3) dS. \quad (14)
 \end{aligned}$$

这样,有了闭式的 Fréchet 导数,本文的重建问

题可以利用基于梯度的优化方法进行迭代处理. 本文采用 PRP 非线性 CG 法^[18]. 设 k 表示迭代次数, 这里, $(k = 1, 2, \dots, k_{\max})$, k_{\max} 表示最大迭代次数, 第 k 次迭代的估计特征参数分布为 \mathbf{p}^k , 则第 $k+1$ 次迭代的更新公式为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^{k+1} &= \mathbf{p}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k, \\
 \mathbf{d}^k &= \begin{cases} -\mathbf{g}^k & (k = 1), \\ -\mathbf{g}^k + \beta_{\text{PRP}}^k \mathbf{d}^{k-1} & (k \geq 2), \end{cases} \\
 \beta_{\text{PRP}}^k &= \frac{(\mathbf{g}^k)^T (\mathbf{g}^k - \mathbf{g}^{k-1})}{\|\mathbf{g}^{k-1}\|^2}, \\
 \alpha^k &= \min_{\alpha} L(\mathbf{p}^k + \alpha \mathbf{d}^k), \quad (15)
 \end{aligned}$$

这里, $\mathbf{g}^k, \mathbf{d}^k, \beta_{\text{PRP}}^k$ 和 α^k 分别为第 k 次迭代的 Fréchet 导数、搜索方向、标量因子和步长, α^k 通过求解线搜索问题得到^[6].

测量的电磁场 $\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)$ 可以通过实验得到或者利用数值仿真代替, 并且设定重建参数的迭代初值 $\mathbf{p}^k (k = 0)$ 以后, 可以利用上述算法迭代求解重建参数 \mathbf{p}^k , 直到达到所需要的迭代次数或者计算精度为止. 重建算法的计算流程如图 2 所示.

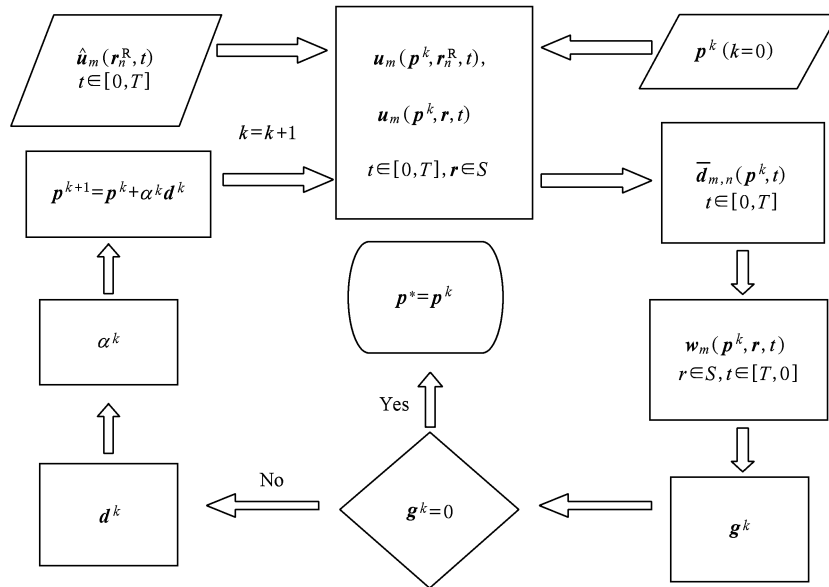


图 2 计算流程图

4. 计算结果和讨论

为了证实上述算法的稳定性和有效性, 本文将它应用到如图 3 所示的二维乳房模型来重建皮肤、乳房组织和肿瘤的 Debye 模型参数分布. 模型中, 乳

房由半径为 50 mm 半圆柱状乳房组织, 外附 2 mm 厚的皮肤层, 下接 20 mm 厚的胸壁组成. 本文假定胸壁为非色散介质, 已知其相对介电常数为 $\epsilon_r = 50.0$, 相对磁导率为 $\mu_r = 1.0$, 电导率为 $\sigma = 4.0$ S/m. 一般来说, 恶性肿瘤并无规则的外形, 其周围呈突起状^[8,10]. 设由 5 个边长为 2 mm 的方柱组成的

“十”字形柱状肿瘤位于乳房组织中. 包含皮肤、乳房组织和肿瘤的色散介质区域为待重建区域.

乳房置于已知相对介电常数为 $\epsilon_r = 9.0$, 相对磁导率为 $\mu_r = 1.0$ 的无耗非色散介质中. 由线源激

励的 8 根天线均匀分布在距离乳房中心为 60 mm 的半圆周上, 依次激励其中的一根天线 $m (m = 1, 2, \dots, M)$, 其余 7 根用作接收天线, 即 $M = 8, N = 7$.

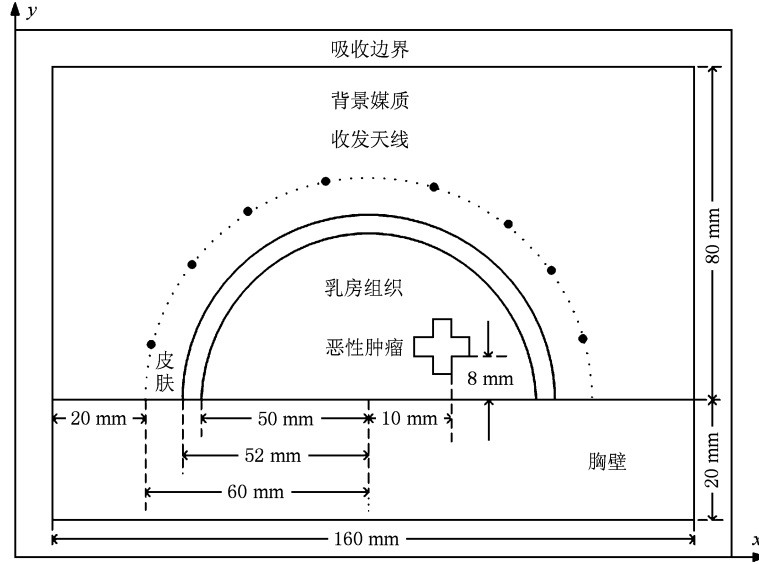


图 3 二维乳房计算模型

激励源(3)式中的时间因子 $I(t)$ 取为^[3]

$$I(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ \sin(2\pi f_c t) e^{-(t-t_0)^2/(0.29T_s)^2} & (t \geq 0), \end{cases} \quad (16)$$

其中, 中心频率 $f_c = 2.0 \text{ GHz}$, $t_0 = 1.288 \text{ ns}$, $T_s = 1.436 \text{ ns}$.

定义重建过程的相对剩余误差为

$$RRE^k \equiv \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T (\mathbf{u}_m(\mathbf{p}^k, \mathbf{r}_n^R, t) - \hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t))^t (\mathbf{u}_m(\mathbf{p}^k, \mathbf{r}_n^R, t) - \hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)) dt}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T (\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t))^t (\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)) dt} \quad (17)$$

在每次迭代过程中, 利用 FDTD 法^[14,15] 计算 \mathbf{u}_m 和 \mathbf{w}_m . 将整个计算空间分割为 80×50 个元胞, 两侧分别是 10 层各向异性介质完全匹配层 (uniaxial perfectly matched layer, 简记为 UPML) 吸收边界^[14,15]. 元胞尺寸为 $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 2 \text{ mm}$, 时间步长为 $\Delta t_1 = \Delta x_1 / (2c_0)$, 总时间步为 1000 步. 为了避免过于乐观的重建, 利用 FDTD 法仿真测量电磁场 $\hat{\mathbf{u}}_m$ 时采用两倍精细的元胞, 即 $\Delta x_2 = \Delta y_2 = \Delta x_1 / 2, \Delta t_2 = \Delta t_1 / 2$. 本文采用辅助微分方程法将介质的色散特性引入 FDTD^[15]. 用于仿真测量数据的 Debye 模型参数^[8] 如表 1 所示.

表 1 Debye 模型参数

组织类型	ϵ_∞	$\sigma_s / \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$	$\Delta\epsilon$	$\tau / \text{ps} (1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s})$
皮肤	4.00	1.10	33.00	7.00
乳房组织	7.00	0.15	3.00	7.00
肿瘤	4.00	50.00	0.70	7.00

在频率 $f = 0-11 \text{ GHz}$ 范围内, 图 4 给出皮肤、肿瘤和乳房组织的相对介电常数和等效电导率随频率的变化关系. 可见肿瘤组织的特征参数受到频率的影响最大, 皮肤组织次之, 最后是乳房组织. 这也充分表明了建立逆散射算法以重建生物组织等色散介质的特征参数时, 色散效应不容忽视.

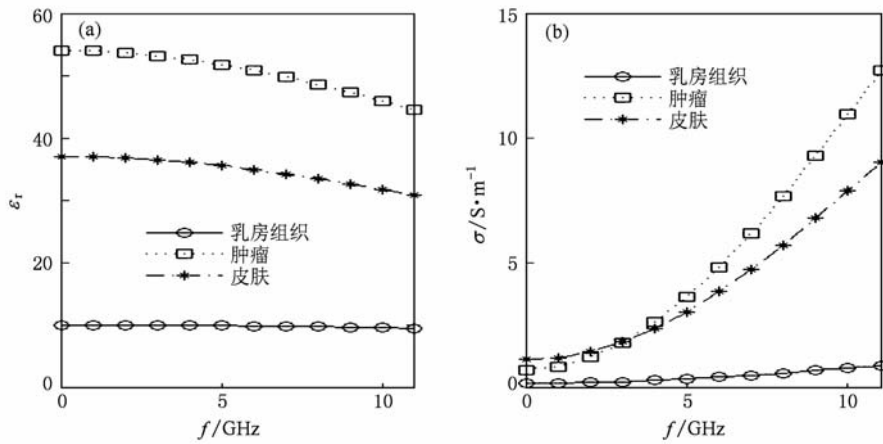


图 4 特征参数随频率的变化关系 (a)相对介电常数,(b)等效电导率

在本文的所有数值实验中,重建的初值均取等于乳房组织相应的 Debye 模型参数,即 ϵ_∞ 取 7.00, σ_s 取 0.15 S/m, $\Delta\epsilon$ 取 3.00.

4.1. 情形 I

不计噪声污染,未采用正则化方案.在均匀的乳房组织中含有一个肿瘤,其形状、尺寸和位置如图 3 所示.图 5,6 和 7 分别给出了 ϵ_∞ , σ_s 和 $\Delta\epsilon$ 的真实值和采用重建算法在迭代次数分别为 $k = 0, 10, 50, 100$ 和 200 时的重建结果,图 8 是相对剩余

误差随迭代次数的变化关系.其中,第 10,50,100 和 200 次迭代的相对剩余误差分别为 0.52%,0.03%,0.0056% 和 0.0036%.

比较发现:(1)从总体来看,算法是收敛的,收敛速度先快后慢.随着迭代次数的增加,相对剩余误差逐渐减小,各参数重建结果的精度逐渐提高.但是迭代次数越高,计算时间也越长.实际的工程应用中,应该选择一个重建精度与实时重建的合理折中.(2)迭代次数为 $k = 200$ 时,主要散射体皮肤和肿瘤的形状、尺寸和位置均得到了较好的重建效

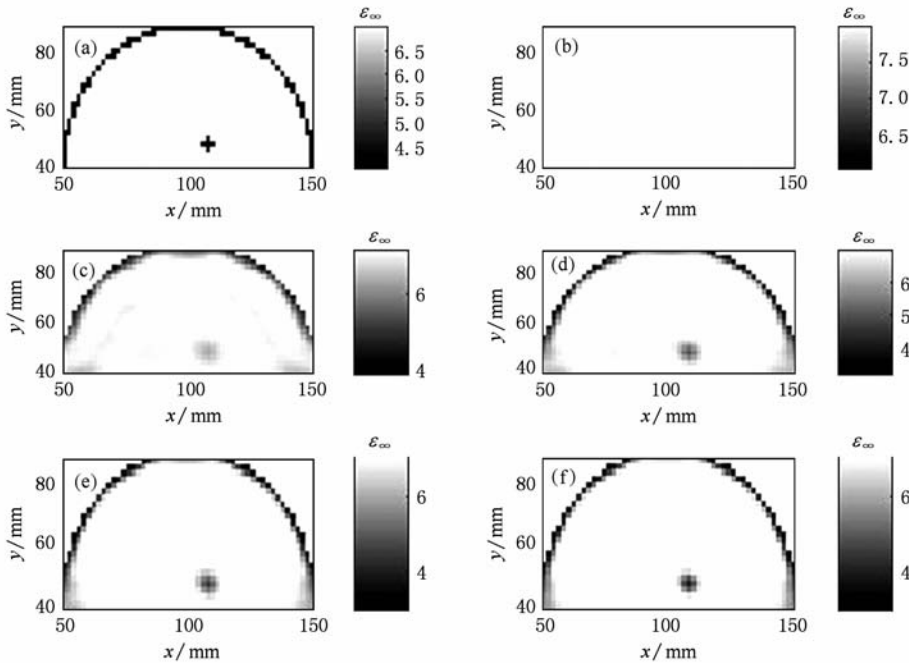


图 5 无限频率相对介电常数 ϵ_∞ (a)真实值,(b)迭代初值,(c)第 10 次迭代,(d)第 50 次迭代,(e)第 100 次迭代,(f)第 200 次迭代

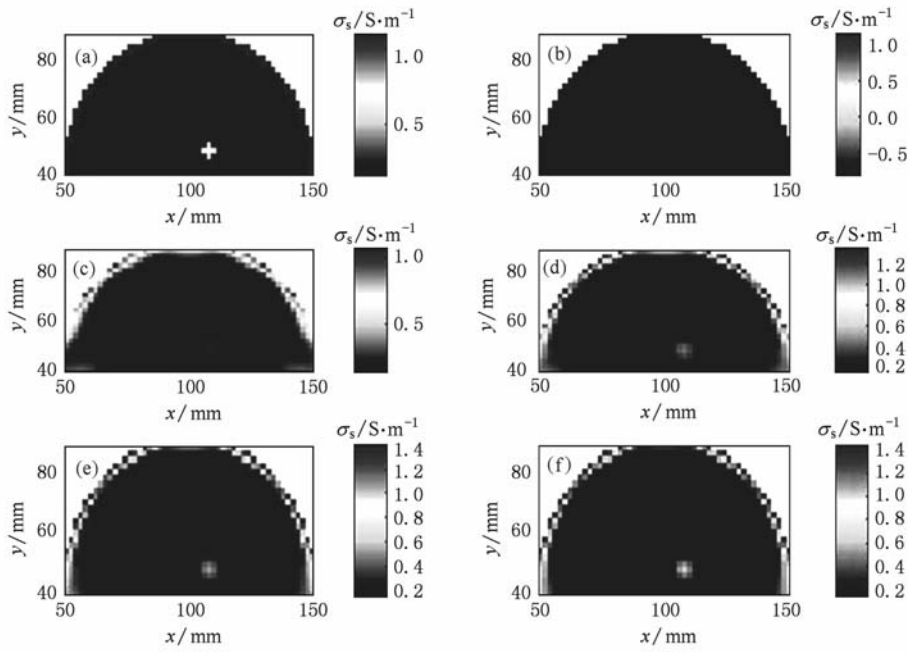


图 6 静态电导率 σ_s 。(a) 真实值, (b) 迭代初值, (c) 第 10 次迭代, (d) 第 50 次迭代, (e) 第 100 次迭代, (f) 第 200 次迭代

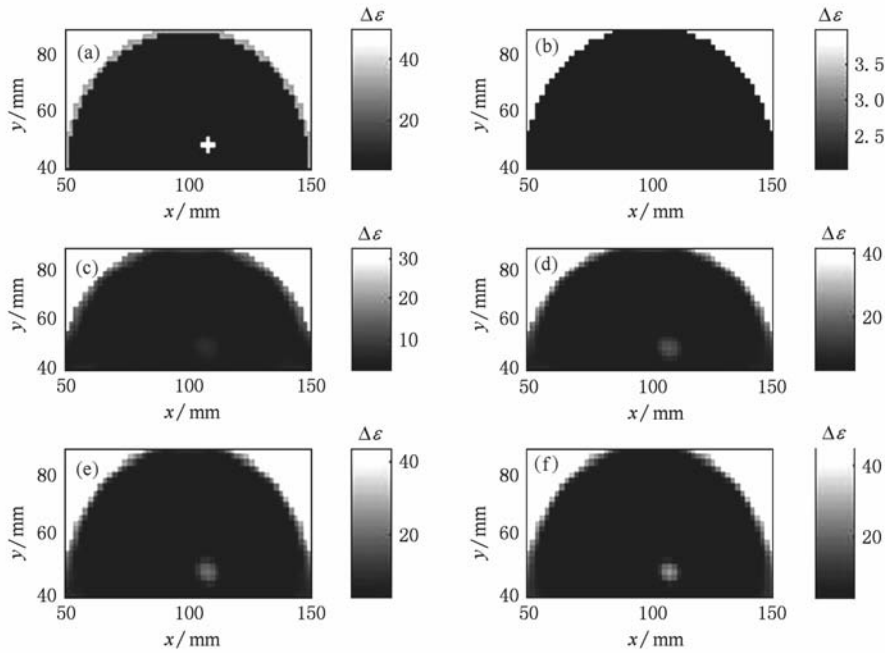


图 7 相对介电常数之差 $\Delta\epsilon$ 。(a) 真实值, (b) 迭代初值, (c) 第 10 次迭代, (d) 第 50 次迭代, (e) 第 100 次迭代, (f) 第 200 次迭代

果. 各参数和相应的真实值尚有一定的差异, 适当增加测量时间、或者加大迭代次数可以适当提高反演精度, 要根本地改善逆问题的病态特性, 需要适当的正则化方法. (3) 对比皮肤和肿瘤, 后者的重建效果不如前者, 可能是由于肿瘤位于较深位置, 信

号在乳房组织中经受衰减, 来自肿瘤的散射信号较弱所致, 解决方法是适当降低激励源的频率. 当然这也同时降低了重建的分辨率, 在实际的工程应用中, 应该选择一个检测深度和重建分辨率的合理折中, 即选择一个合理的激励频率. (4) 对比三种重建

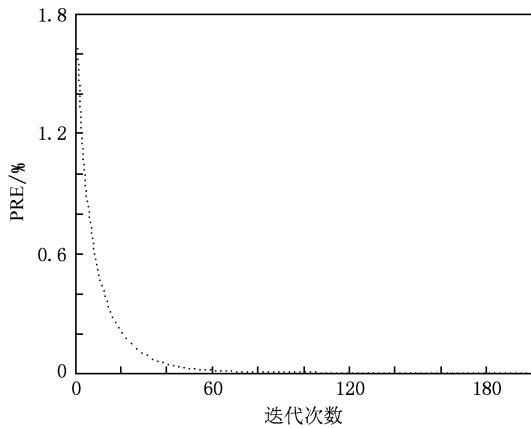


图 8 不同迭代次数的相对剩余误差

参数 ε_∞ , σ_s 和 $\Delta\varepsilon$, 前者明显差于后两者, 这可能是我们采用的激励源是频带有限的, 适当增加激励源的带宽可以检测出更深层的色散特性, 同时也增加了逆问题的病态性质^[8,10].

4.2. 情形 II

为了测试算法在噪声环境中的性能, 在测量场中加入均匀分布的随机噪声, 其信噪比定义为

$$SNR \equiv 10 \lg \left(\frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T \|\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)\|^2 dt}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T \|\mathbf{n}_m(\mathbf{r}_n^R, t)\|^2 dt} \right), \quad (18)$$

其中, $\mathbf{n}_m(\mathbf{r}_n^R, t)$ 是加到在第 m 个电流源的激励下, 在 \mathbf{r}_n^R 处接收到的测量电磁场 $\hat{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}_n^R, t)$ 上的噪声信号, 这里取 $SNR = 20$ dB.

作为更一般的情形, 在真实的乳房组织中还存在乳腺导管和小叶等组织, 它们降低了肿瘤的检测效果^[8,10], 为了考察它们对算法的影响, 取乳房组织在 $1 \pm 10\%$ 的范围内均匀随机变化.

为了对抗噪声污染和降低逆散射的病态性质, 避免求解结果限于局部最优, 这里加入一阶的 Tikhonov 正则化^[17], 正则化参数取为 $\gamma = 0.001$. 皮肤和肿瘤的形状、尺寸和位置和以上情形相同. 图 9, 10 和 11 分别给出了 ε_∞ , σ_s 和 $\Delta\varepsilon$ 的真实值和采用重建算法在迭代次数分别为 $k = 0, 10, 50, 100$ 和 200 时的重建结果, 图 12 是相对剩余误差随迭代次数的变化关系. 其中, 第 10, 50, 100 和 200 次迭代的相对剩余误差分别为 2.10%, 0.10%, 0.01% 和 0.0052%.

经比较, 除了得出和情形 I 的类似 4 个结果以外, 还发现: (1) 从总体来看, 三种 Debye 模型参数得到了较好的重建效果, 但重建的精度比情形 I 下降. (2) 正则化方案对逆问题的病态性质起到了一

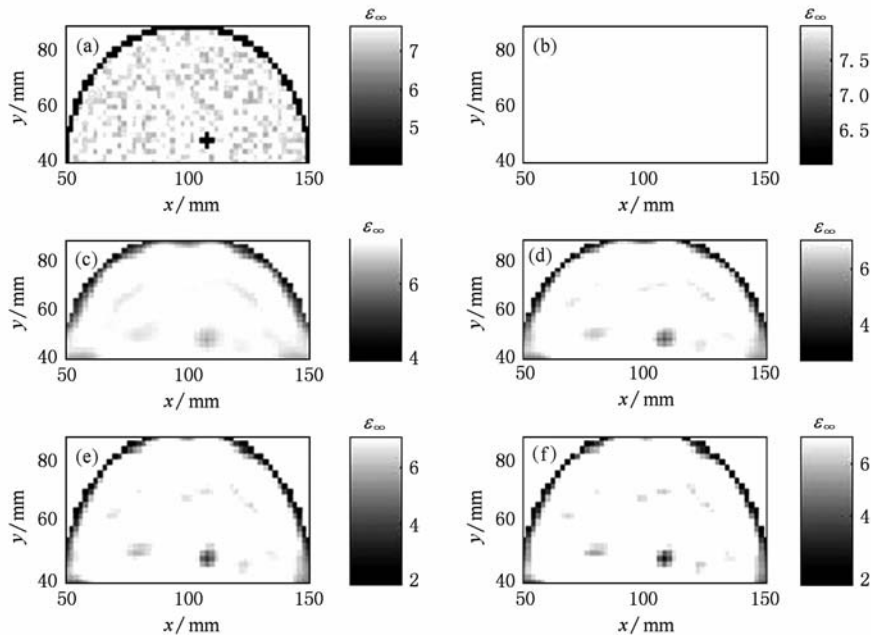


图 9 无限频率相对介电常数 ε_∞ (a) 真实值, (b) 迭代初值, (c) 第 10 次迭代, (d) 第 50 次迭代, (e) 第 100 次迭代, (f) 第 200 次迭代

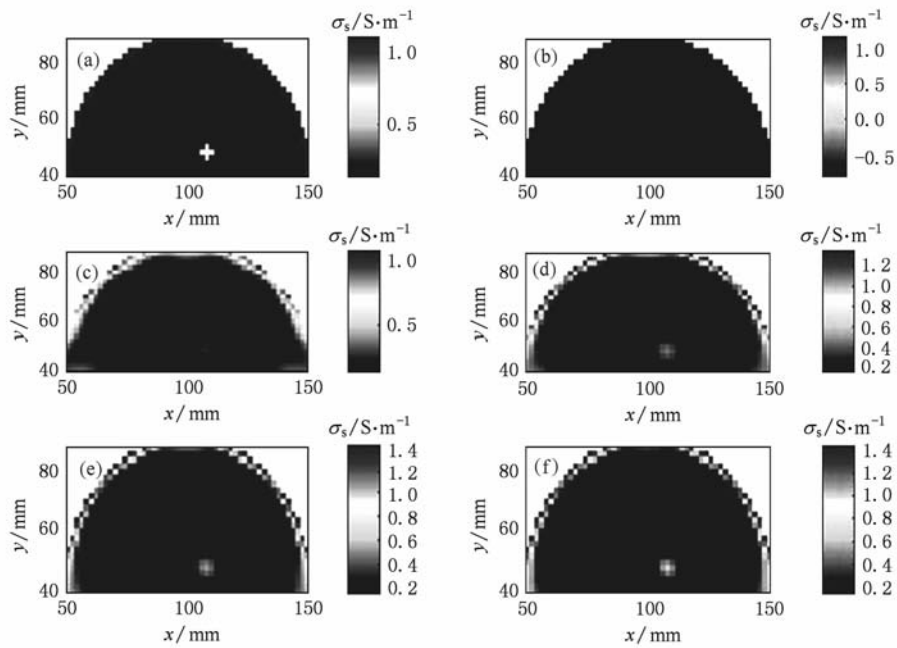


图 10 静态电导率 σ_s 。(a) 真实值, (b) 迭代初值, (c) 第 10 次迭代, (d) 第 50 次迭代, (e) 第 100 次迭代, (f) 第 200 次迭代

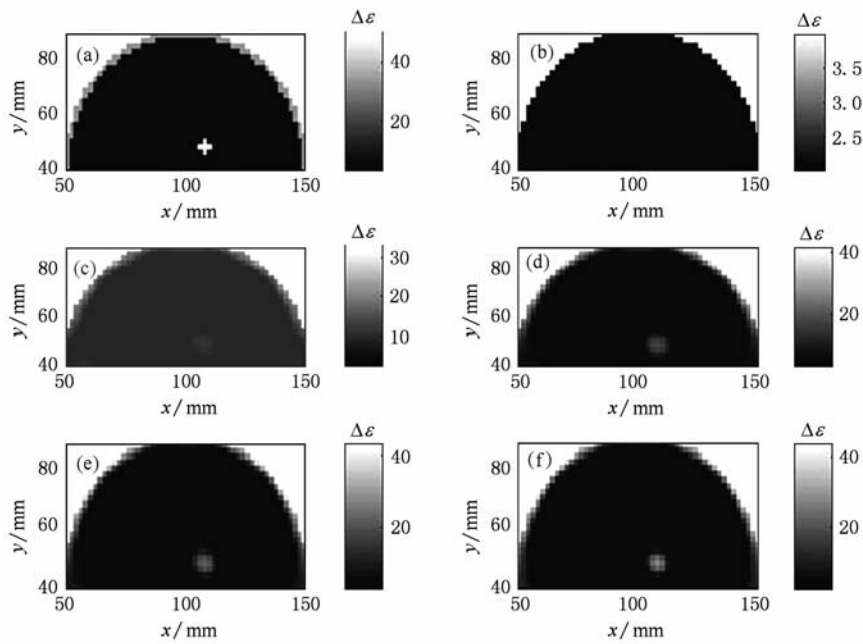


图 11 相对介电常数之差 $\Delta\epsilon$ 。(a) 真实值, (b) 迭代初值, (c) 第 10 次迭代, (d) 第 50 次迭代, (e) 第 100 次迭代, (f) 第 200 次迭代

定的抑制作用,改善了逆问题的病态性质,但是正则化参数的选择是个困难的问题^[1,3,6],最优的正则化参数一般需要根据具体问题进行多次数值测试确定。

5. 结 论

本文应用泛函分析和变分法,给出一种适用于重建二维 Debye 色散媒质特征参数的时域逆散射算

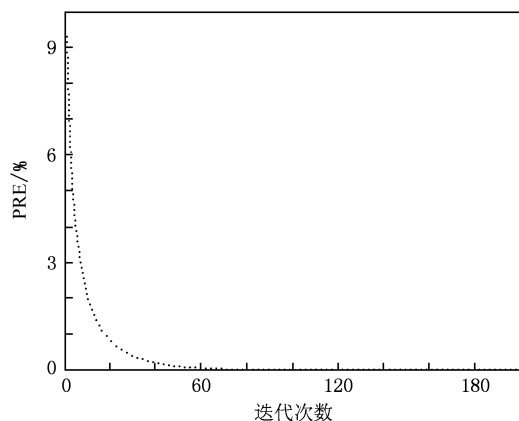


图 12 不同迭代次数的相对剩余误差

法:先通过时间正演步进计算重建区域的电磁场,再通过时间反演步进计算相应的 Lagrange 乘子,进而计算 Lagrange 函数关于重建参数的 Fréchet 导数,最后利用梯度算法迭代求解重建问题.数值实验中,利用 FDTD 法和 PRP 非线性 CG 法对二维乳房模型在两种情形下进行了测试.在二维 TM 波的照射下,有无噪声环境中,散射体位置、尺寸和色散特性参数均被成功地重建.初步的仿真结果证实了算法的可行性和有效性,为进一步的实验及工程应用研究奠定了良好的理论基础.当然,二维情形下,仍然有一些问题值得探讨,比如模型的改进,算法的优化,激励源、正则化方案和相应参数的选取等问题.另外,按照类似的方法,本文的二维情形可以推广到三维情形,这些正是我们今后的工作方向.

- [1] Zhang Y R, Nie Z P, Ruan Y Z 1997 *Acta Elec. Sin.* **25** 100 (in Chinese) [张业荣、聂在平、阮颖铮 1997 电子学报 **25** 100]
- [2] Gustafsson M, He S 1999 *Math. Comput. Simulat.* **50** 525
- [3] Takenaka T, Jia H, Tanaka T 2000 *J. Electromagn. Waves Appl.* **14** 1609
- [4] Zhang H, He S L, Chen P, Sun W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1481 (in Chinese) [张航、何赛灵、陈攀、孙威 2001 物理学报 **50** 1481]
- [5] Liang Z C, Jin Y Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2239 (in Chinese) [梁子长、金亚秋 2002 物理学报 **51** 2239]
- [6] Rekanos I T, Raisanen A 2003 *IEEE Trans. Magn.* **39** 1381
- [7] Abenius E, Strand B 2006 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **68** 650
- [8] Winters D W, Bond E J, van Veen B D, Hagness S C 2006 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **54** 3517
- [9] Liu D, Wang F, Huang Q X, Yan J H, Chi Y, Cen K F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4812 (in Chinese) [刘冬、王飞、黄群星、严建华、池涌、岑可法 2008 物理学报 **57** 4812]
- [10] Winters D W, Shea J D, Kosmas P, van Veen B D, Hagness S C 2009 *IEEE Trans. Med. Imaging* **28** 969
- [11] Wei B, Ge D B, Wang F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6290 (in Chinese) [魏兵、葛德彪、王飞 2008 物理学报 **57** 6290]
- [12] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4573 (in Chinese) [张玉强、葛德彪 2009 物理学报 **58** 4573]
- [13] Wei B, Li X Y, Wang F, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6174 (in Chinese) [魏兵、李小勇、王飞、葛德彪 2009 物理学报 **58** 6174]
- [14] Ge D B, Yan Y B 2005 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (2nd Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) p288 (in Chinese) [葛德彪、闫玉波 2005 电磁波时域有限差分法(第二版)(西安:西安电子科技大学出版社)第 288 页]
- [15] Taflove A, Hagness S C 2005 *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (3rd Ed.) (Norwood: Artech House) p353
- [16] Gabriel S, Lau R W, Gabriel C 1996 *Phys. Med. Biol.* **41** 2271
- [17] Tikhonov A N, Arsenin V Y 1979 *SIAM Rev.* **21** 266
- [18] Dai Y H 2003 *Math. Comput.* **17** 1317
- [19] Kuhn H W, Tucker A W 1951 *Nonlinear Programming* (California: University of California Press) p481

Time-domain inverse scattering problem for two-dimensional frequency-dispersive lossy media *

Liu Guang-Dong Zhang Ye-Rong[†]

(College of Electronic Science and Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

(Received 26 November 2009; revised manuscript received 7 January 2010)

Abstract

A time-domain inverse scattering method for reconstruction of dispersive dielectric properties of two-dimensional (2D) lossy media based on the Debye model by using functional analysis and variational methods is developed. Firstly, the approach formulates a cost functional to turn the inverse problem into a constrained minimization problem according to least squares criterion, then the resulting constrained minimization problem is transformed into an unconstrained minimization problem by using a penalty function technique, and then the closed Fréchet derivatives of the Lagrange function with respect to the properties are derived based on the calculus of variations. Finally, one can solve the resulting problem by using any gradient-based algorithm and the finite-difference time-domain (FDTD) method. Also, the first-order Tikhonov's regularization is adopted to cope with noise and the ill-posedness of the problem. In numerical example, the presented algorithm is applied to a 2D breast model with the help of the Polak-Ribière-Polyak (PRP) conjugate gradient (CG) method, and the results demonstrate its feasibility.

Keywords: inverse scattering, frequency-dependent media, regularization, finite-difference time-domain

PACC: 4110H, 8170L, 8760G, 0365D

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60671065).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangyr@njupt.edu.cn