

色关联噪声驱动下非线性神经元 模型的相干共振^{*}

刘志宏^{1)2)†} 周玉荣¹⁾ 张安英¹⁾ 庞小峰¹⁾

1) (电子科技大学生命科学与技术学院, 成都 610054)

2) (成都信息工程学院, 成都 610225)

(2008 年 7 月 30 日收到; 2009 年 5 月 9 日收到修改稿)

研究了关联的加性离子通道噪声和乘性突触噪声共同作用下非线性积分发放神经元模型中的相干共振现象. 运用绝热近似理论和统一色噪声近似方法, 得到了神经元首次点火概率分布和神经元放电峰峰间隔的变差系数的近似表达式. 研究表明, 首次点火概率分布和变差系数是突触噪声强度、离子通道噪声强度、乘性色噪声自相关时间和噪声关联强度的函数, 适当的噪声强度、噪声自相关时间和噪声关联强度可以减小神经元发放峰峰间隔的变差系数, 使系统的相干性达到最大值, 从而引起神经元出现相干共振现象. 同时讨论了离子通道噪声强度、突触噪声强度、乘性色噪声自相关时间和噪声关联强度对系统相干共振的影响.

关键词: 相干共振, 色噪声, 变差系数, 首次点火概率分布

PACC: 0211, 0540

1. 引言

在最近的几十年里, 人们对噪声在非线性复杂体系中的作用和影响的研究越来越多, 特别是在噪声环境下神经系统的随机共振现象^[1-3]. 近几年的研究表明, 在没有特定外部信号的情况下, 噪声作用下的可激发神经元系统中, 当噪声超过一定的阈值时, 系统将产生脉冲放电, 称此现象为相干共振现象^[4-7]. 由于实际的神经系统在大多数情况下都不存在外加的激励信号, 因此实际的神经系统要产生共振, 更大的可能是相干共振. 相干共振在神经系统中的存在要远比随机共振广泛, 因而更接近于自然而有更广泛的意义. 相干共振现象表现为生命的节律或者包含着某种特殊的信息, 因此对生命体系具有重要的意义, 研究神经系统的相干共振对认识人脑的学习和记忆功能有一定的参考价值. 以往的许多研究主要考虑的是单独噪声的作用, 或者主要是针对非关联噪声的情况. 本文通过非线性积分点火神经元系统中增加关联的乘性突触噪声和加性电压门控离子通道噪声, 运用绝热近似理论和

统一色噪声近似方法, 得到神经元发放的峰峰间隔的变差系数和首次发放概率分布的近似表达式, 从而研究并讨论两种噪声强度、乘性色噪声自相关时间和噪声关联强度对非线性神经元系统相干共振的影响.

2. 模型和方法

考虑关联的乘性突触噪声和加性离子通道噪声的共同作用, 非线性积分点火神经元模型可由朗之万方程来描述, 等式如下^[8]:

$$C_m \frac{dV}{dt} = g(V) + V\xi_s(t) + \eta_s(t),$$

$$g(V) = \kappa(V - V_r)(V - V_u)(V - V_f), \quad (1)$$

式中, C_m 为单位面积的膜电容, V 为神经元的膜电位, $g(V)$ 为膜电压和膜电流的关系函数, κ 为正常数, V_r 为静息电位, V_u 为阈值电位, V_f 为点火电位, 且 $V_r < V_u < V_f$.

公式(1)所表达的生物学意义是当神经元 V 达到阈值 V_u 后, 神经元立即放电, 同时产生一个放电脉冲, 进而对下一个神经元产生影响. 具有关联的

^{*} 国家自然科学基金(批准号:30600127)资助的课题.

[†] E-mail: lzhh@cuit.edu.cn

两个噪声源 $\xi_s(t)$ 和 $\eta_s(t)$ 分别代表外源噪声和内部噪声,相对于膜电位而言,乘性噪声 $\xi_s(t)$ 为来自神经元系统其他部分或者外部环境的噪声,本文表示来自前一级神经元的突触信号噪声;加性噪声 $\eta_s(t)$ 为来自于神经元本身的噪声,本文表示神经元本身的离子通道噪声.

两种噪声的统计特性满足以下关系^[9-11]:

$$\langle \xi_s(t) \rangle = \langle \eta_s(t) \rangle = 0, \quad (2a)$$

$$\langle \xi_s(t) \xi_s(t') \rangle = \frac{Q_0}{\tau_0} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_0}\right), \quad (2b)$$

$$\langle \eta_s(t) \eta_s(t') \rangle = 2D_0 \delta(t-t'), \quad (2c)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi_s(t) \eta_s(t') \rangle &= \langle \eta_s(t) \xi_s(t') \rangle \\ &= 2\lambda_0 \sqrt{D_0 Q_0} \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (2d)$$

其中, Q_0 和 D_0 分别为突触噪声强度和离子通道白噪声强度; λ_0 是两种噪声之间的关联强度,代表了两个神经元的相关程度, λ_0 越大则说明神经元受相关噪声的影响越强; τ_0 为乘性突触色噪声的自相关时间; $\delta(t-t')$ 为 Dirac delta 函数, t 和 t' 表示两个不同的时刻.

为了便于分析,引入无量纲电压 x 和常数 a ($0 < a < 1$), 令 $x = (V - V_r)(V_f - V_r)$, $a = (V_u - V_r)/(V_f - V_r)$, 则相应的静息电位 $x_r = 0$, 阈值电位 $x_u = a$, 点火电位 $x_f = 1$, 则(1)式可以改写为^[8,12]

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + x\xi(t) + \eta(t), \quad (3a)$$

$$f(x) = -U'_0(x), \quad (3b)$$

$$U_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{a+1}{3a}x^3 + \frac{1}{4a}x^4, \quad (3c)$$

式中, U_0 为势函数, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 满足如下关系:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (4a)$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (4b)$$

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2Q\delta(t-t'), \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \eta(t') \rangle &= \langle \eta(t) \xi(t') \rangle \\ &= 2\lambda \sqrt{DQ} \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (4d)$$

其中, D, Q, λ 和 τ 分别表示 D_0, Q_0, λ_0 和 τ_0 的归一化值, 表达式如下:

$$D = D_0 / [\kappa C_m (V_u - V_r)(V_f - V_r)^3], \quad (5a)$$

$$Q = Q_0 / [\kappa C_m (V_u - V_r)(V_f - V_r)^3], \quad (5b)$$

$$\lambda = \lambda_0 / [\kappa C_m (V_u - V_r)(V_f - V_r)^3], \quad (5c)$$

$$\tau = C_m \tau_0 / [\kappa (V_u - V_r)(V_f - V_r)^3]. \quad (5d)$$

运用绝热近似理论^[10-14]并结合文献[15, 16]中的方法, 则公式(3a)对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} A(x) P(x, t) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) P(x, t), \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $A(x)$ 和 $B(x)$ 分别满足如下方程:

$$A(x) = f(x) + \frac{Q}{1+\tau}x + \frac{\lambda \sqrt{QD}}{1+\tau}, \quad (7a)$$

$$B(x) = \frac{Q}{1+\tau}x^2 + 2\frac{\lambda \sqrt{QD}}{1+\tau}x + D. \quad (7b)$$

根据(7a)和(7b)式, 可得(6)式的稳态概率分布函数为

$$\begin{aligned} P_{st}(x) &= \frac{C_{st}}{\sqrt{B(x)}} \exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right] \\ (0 \leq \lambda \leq 1), \end{aligned} \quad (8)$$

式中, C_{st} 为归一化常数, $U(x)$ 为修正势函数,

$$U(x) = \int_{-\infty}^x D \frac{\left(x - \frac{a+1}{a}x^2 + \frac{1}{a}x^3\right)}{B(x)} dx. \quad (9)$$

由(8)式可得首次点火的概率分布为

$$P_f = P_{st}(x > a) = 1 - \int_0^a P_{st}(x) dx. \quad (10)$$

为了更好地研究乘性突触噪声和加性离子通道噪声共同作用下神经元体系的相干共振现象, 引入神经元点火的变差系数 β 作为衡量神经元点火相干性的指标, 可通过下列公式得到^[10-13]

$$\beta = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}}{\langle T \rangle} = \frac{\sqrt{\text{var}\langle T \rangle}}{\langle T \rangle},$$

$$\langle T \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum \frac{t_{i+1} - t_i}{M},$$

$$\langle T^2 \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{M}, \quad (11)$$

式中, t_i 表示神经元的脉冲发放时间, $\langle T \rangle$ 是峰峰间隔 $T_i (T_i = t_{i+1} - t_i)$ 的均值, $\text{var}\langle T \rangle$ 为方差, M 为给定时间内发放脉冲的总数. 如果只考虑外部刺激的作用, 不考虑噪声信号, 对于周期性确定序列, $\beta = 0$; 如果是泊松分布的完全不相干的脉冲序列, 则 β 趋近于 1; 若同时考虑外加刺激和噪声的影响, 则 $0 < \beta < 1$; 在 $\beta < 1$ 的情况下, β 值越小则说明神经元的点火越有规律.

利用两态模型理论^[14-16], 在绝热近似条件下, 神经元的点火可以认为是一个两态过程, 其中一个表示静息态, 另一个表示点火态. 在噪声的作用下, 等效为布朗粒子在双稳势场中的跃迁运动, 粒子 x 以一定的概率由一个势阱跃迁到另一个势阱, 即驱动了神经元点火. 可通过两态之间的跃迁概率 N_+

和 N_- 来计算神经元系统的变差系数 β , 具体如下^[14-18]:

$$\beta = \frac{\sqrt{N_+^2 + N_-^2}}{(|N_+| + |N_-|)}, \tag{12a}$$

$$N_+ = \frac{(1-a)}{2\sqrt{a\pi}} \exp[\Delta M_+ - \Delta N_+], \tag{12b}$$

$$N_- = \frac{(1-a)^{1/2}}{2\pi} \exp[\Delta M_- - \Delta N_-], \tag{12c}$$

式中, $\Delta M_{\pm}$ 和 $\Delta N_{\pm}$ 满足

$$\Delta M_{\pm} = \frac{1+\tau}{\lambda\sqrt{QD}} \alpha(\lambda), \tag{13a}$$

$$\Delta N_{\pm} = \frac{1+\tau}{2Q^2} [\beta(\lambda) - 1], \tag{13b}$$

$$\alpha(\lambda) = \arctan\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{QD}}{1-\lambda^2}\right) - \arctan\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right), \tag{13c}$$

$$\beta(\lambda) = \ln|Q^2 \pm 2\lambda\sqrt{QD} + D|. \tag{13d}$$

3. 结果与分析

通过(8),(10)和(12)式,可以得到不同条件下,非线性神经元系统中不同的离子通道噪声强度 D 、不同的突触噪声强度 Q 、不同的乘性噪声自相关时间 τ 和不同的噪声关联强度 λ 与神经元放电的首次点火规律和变差系数之间的关系曲线,如图1—7所示(参数选择如下^[13]: $C_m = 0.1\ \mu\text{F}$, $V_r = -70\ \text{mV}$, $V_u = -55\ \text{mV}$, $V_f = 25\ \text{mV}$, $\kappa = 0.01$, 仿真步长 $\Delta t = 0.01\ \text{ms}$, 持续时间为 $100\ \text{s}$)。

图1给出了 λ 取不同值时, P_f 随 D 离子通道噪

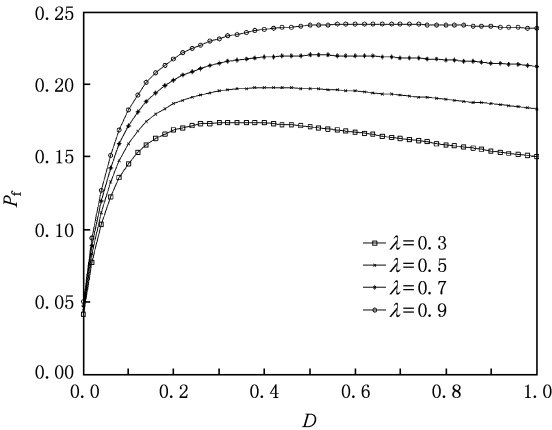


图1 λ 取不同值时首次点火概率分布 P_f 随加性离子通道噪声强度 D 的变化 $Q=0.1, \tau=1.0$

声强度的变化曲线. 由图1可知, P_f 随着 D 的增大而增大, 到达一个最大值后, 逐渐呈缓慢减小的趋势. 这一特性表明, 由于离子通道噪声来源于离子通道的随机开启和关闭, 使得膜电流随机变化, 因此存在一个最佳的离子通道噪声强度, 使得 P_f 达到最大, 从而促使神经元产生自发放电. 另外从图1还可以看出, 当 D 一定时, P_f 随着 λ 的增加而增加, 说明当两种噪声强度都比较大时, P_f 也将增大, 两种噪声协调作用可以增强神经元的活动.

图2给出了 λ 取不同值时 P_f 随 Q 的变化曲线.

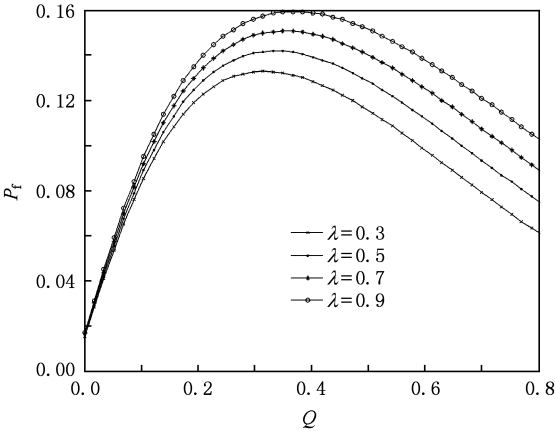


图2 λ 取不同值时首次点火概率分布 P_f 随乘性突触噪声强度 Q 的变化 $D=0.4, \tau=1.0$

由图2可知, P_f 与 Q 呈非单调函数关系, 随着 Q 的增加, P_f 出现一个最大值, 然后开始快速减小. 这一特性表明, 由于突触间隙存在复杂的生物化学反应, 噪声主要来源于神经递质的离子释放, 因此存在一个适当的 Q 值, 使得 P_f 达到最大, 从而能够增强神经元点火. 另外从图2还可以看出, 当 Q 一定时, P_f 随着 λ 的增加而增加, 说明当两种噪声强

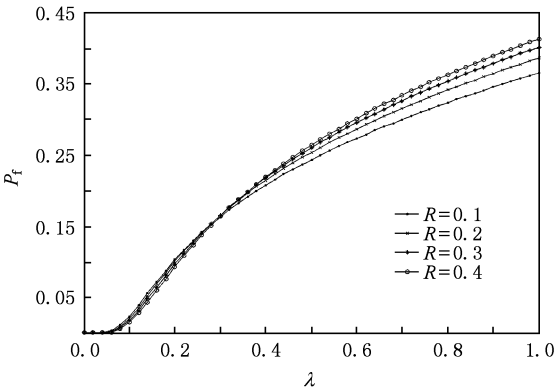


图3 R 取不同值时首次点火概率分布 P_f 随噪声关联强度 λ 的变化 $D=0.4, \tau=1.0$

度都比较大时, P_f 也将增大.

图 3 给出了噪声强度比值 $R(R = Q/D)$ 取不同值时 P_f 随 λ 的变化曲线. 由图 3 可知, P_f 与 λ 呈单调函数关系, 随着 λ 的增加 P_f 也逐渐增加, 并且在 λ 一定的情况下, Q 一定时, 随着 R 的增加, P_f 逐渐减小, 即当 Q 和 λ 一定时, 随着 D 的减小 P_f 也逐渐减小, 这个结果与图 1 相符合. 表明存在一个合适的 λ , 使得噪声强度与噪声关联强度达到某种匹配, 可以加强神经元的活动.

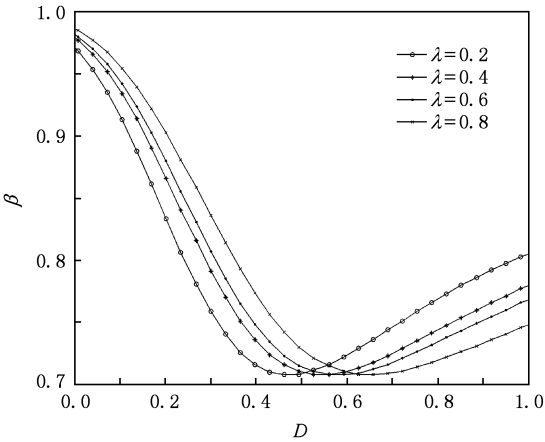


图 4 λ 取不同值时, 变差系数 β 随加性离子通道噪声强度 D 的变化 $Q = 0.1, \tau = 1.0$

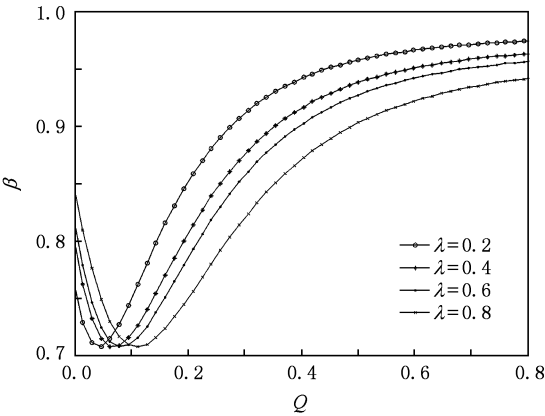


图 5 λ 取不同值时变差系数 β 随乘性突触噪声强度 Q 的变化 $D = 0.4, \tau = 1.0$

图 4 和图 5 分别给出了 λ 取不同值时, β 随 D 和 Q 的变化曲线. 由图 4 可以看出, β 随着 D 的增加而逐渐减小, 并在曲线上出现了最小值. 这一特性表明, 存在一个最佳的加性离子通道噪声强度, 使得 β 达到最小值, 使得神经元出现规则点火, 即产生相干共振. 另外, 由图 4 还可以得出, 当 D 一定时,

随着 λ 的增加, β 逐渐增加.

由图 5 可以看出, β 随着 Q 的增加先出现最小值后, 又随着 Q 的增加而快速增加. 这一特性表明神经元点火的相关性逐渐减弱. 另外, 由图 5 还可以得出, 当 Q 一定时, 随着 λ 的增加, β 逐渐减小.

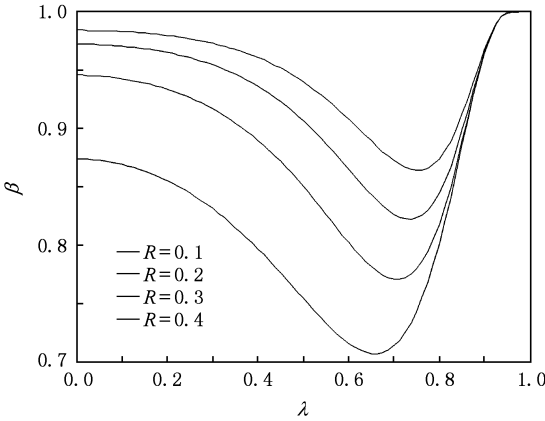


图 6 R 取不同值时变差系数 β 随噪声关联强度 λ 的变化 $D = 0.4, \tau = 1.0$

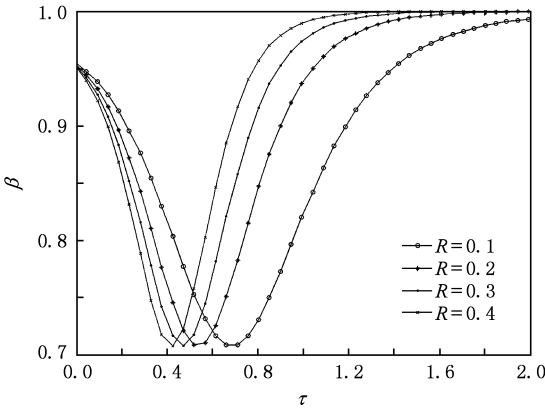


图 7 R 取不同值时变差系数 β 随乘性噪声自相关时间 τ 的变化 $D = 0.4, \lambda = 0.5$

图 6 和图 7 给出了 R 取不同值时 β 随 τ 的变化曲线. 从图 6 和图 7 可以看出, β 与 λ 和 τ 呈非单调函数关系, 随着 λ 的增加, 在 β 曲线上出现了单峰. 这一特性表明, 噪声关联强度太弱, 会影响信号传播的强度; 而噪声关联强度太强, 会影响信号传播的距离, 因此存在一个最佳的噪声关联强度, 使得噪声强度与噪声关联强度达到某种匹配, 使 β 达到最小值, 从而使神经元放电更具有规则性, 即产生相干共振. 另外由图 6 还可以看出, 随着 R 的增加, 峰值开始升高并且峰值的位置右移, 这一结果与图 4 和图 5 的结果相符合.

4. 结 论

本文研究了关联的加性离子通道噪声和乘性突触噪声共同作用对非线性神经元系统相干共振的影响. 研究表明, 离子通道噪声比乘性突触噪声更能增加神经元点火的相干性, 而合适的噪声关联强度与两种噪声强度相匹配时, 可以增加神经元首

次点火的概率分布, 使变差系数达到最小值, 增加了神经元活动的有序性, 从而增强了系统的相干共振. 本文的研究结果有助于了解生物体是如何利用内部的噪声来辅助提高感知外部环境信息的能力, 即降低外部刺激(需要达到)的阈值, 提高生物体的感知灵敏度. 同时, 研究结果对进一步研究生物神经网络中的同步性等动力学行为具有一定的指导意义.

[1] Jose M C 1997 *Phys. Lett. A* **235** 489

[2] Bart K, Sanya M 2003 *Neural Networks* **16** 755

[3] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 802]

[4] Song Y, Zhao T J, Liu J W, Wang X Q, Zhan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4020 (in Chinese) [宋 杨、赵同军、刘金伟、王向群、展 永 2006 物理学报 **55** 4020]

[5] Longtin A, Chialvo D D 1998 *Phys. Rev. Lett.* **391** 4012

[6] Lindner B, Garcia O J, Neiman A, Lutz S G 2004 *Phys. Rep.* **392** 321

[7] Linder B, Lutz S G, Longtin A 2002 *Phys. Rev. E* **66** 031916

[8] Kostur M, Schindler M, Talkner P, Hanggi P 2006 *Math. Bio.* **08** 014

[9] Lee S G, Neiman A, Kim S 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3292

[10] Schmid G, Goychuk I, Hänggi P 2003 *Physica A* **325** 165

[11] Ning L J, Xu W, Yao M L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 486

[12] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **362** 57

[13] Zhou X R, Luo X S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2849 (in Chinese) [周小荣、罗晓曙 2008 物理学报 **57** 2849]

[14] Hu G 1994 *Noise and Stochastic Resonance* (Shanghai: Shanghai Science and Education Press) p25 (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)第 25 页]

[15] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *J. Phys. A* **39** 13861

[16] Zhou B C, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2035 (in Chinese) [周丙常、徐 伟 2008 物理学报 **57** 2035]

[17] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *Chin. Phys.* **15** 0947

[18] Kang Y M, Xu X J, Xie Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 1691

Coherence resonance in a nonlinear neuronal models driven by correlated colored noise^{*}

Liu Zhi-Hong^{1)2)†} Zhou Yu-Rong¹⁾ Zhang An-Ying¹⁾ Pang Xiao-Feng¹⁾

1) (School of Life Science and Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

2) (University of Information and Technology of Chengdu, Chengdu 610225, China)

(Received 30 July 2008; revised manuscript received 9 May 2009)

Abstract

The phenomenon of coherence resonance in a nonlinear integrate-and-fire neuronal model subject to correlated multiplicative synaptic and additive voltage-gated channel noise are investigated. Based on the adiabatic approximation theory and the unified colored approximation method, the analytic expression of the probability distribution of the first fire (FPD) and the coefficient of variation (CV) of the inter-spike interval of firing are obtained. It is shown that the FPD and the CV are functions of the intensity of the multiplication synaptic colored noise, the additive voltage-gated channel white noise, the correlation time of multiplicative noise and the strength of the correlation between noises. By choosing appropriate noise parameters, the phenomenon of coherence resonance can occur. Meanwhile, the effects of intensity of the multiplication synaptic noise, the additive voltage-gated channel noise, the correlation time of multiplicative noise and the strength of the correlation between noises on coherence resonance are discussed.

Keywords: coherence resonance, colored noise, coefficient of variation, probability distribution of the first fire

PACC: 0211, 0540

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 30600127).

[†] E-mail: lzhh@cuit.edu.cn