

一般完整力学系统 Mei 对称性的一种守恒量

刘仰魁[†]

(陇东学院物理与电子工程学院, 庆阳 745000)
(2009 年 1 月 17 日收到, 2009 年 3 月 23 日收到修改稿)

研究一般完整力学系统的 Mei 对称性直接导致的一种守恒量, 给出系统的 Mei 对称性的定义和判据方程, 得到系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量的条件和形式, 并举例说明结果的应用.

关键词: 一般完整力学系统, Mei 对称性, 守恒量

PACC: 0320

1. 引言

对称性是力学和物理学中更高层次的法则. 对称性理论有许多用途, 其中一个比较重要的用途就是用来寻求守恒量. 动力学系统的对称性与守恒量的研究具有重要的理论意义和实际意义, 在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位. 利用对称性寻求力学系统的守恒量的近代方法主要有 Noether 对称性^[1,2]、Lie 对称性^[2,3]和 Mei 对称性^[4-8]. Noether 对称性是 Hamilton 作用量泛函在群的无限小变换作用下的一种不变性^[2,8-10]. Lie 对称性是微分方程在时间和坐标的无限小变换下的一种不变性^[2,8,11-15]. Mei 对称性又称形式不变性, 是本世纪初梅凤翔教授提出的不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性. Mei 对称性从力学角度比 Noether 对称性和 Lie 对称性更易理解, 它是指系统运动微分方程中的动力学函数(如 Lagrange 函数, Hamilton 函数, 非势广义力, 各类完整的与非完整的约束力, 各类形式完整的与非完整的约束方程, 各类非保守力等等函数)经历时间和坐标的无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性. 系统的各类方程包括 Euler-Lagrange 方程、Hamilton 正则方程、各类约束方程等等. 这三种主要对称性可直接导致守恒量, 也可间接导致守恒量^[8], 它们导致的守恒量主要有 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量(也称新型守恒量^[8]). Noether 对称性能直接导致 Noether 守恒量, 间接导致 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量; Lie 对称性能

直接导致 Hojman 守恒量, 间接导致 Noether 守恒量和 Mei 守恒量; Mei 对称性能直接导致 Mei 守恒量, 间接导致 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量^[8,16]. 近年来, Mei 对称性理论成为研究约束力学系统守恒量的有力工具之一, 已取得了许多重要研究成果^[8,16-28]. 文献^[28]研究了 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的一种新守恒量. 本文研究一般完整力学系统的 Mei 对称性直接导致的一种守恒量, 给出守恒量存在的条件和形式, 举例说明其应用.

2. 系统的 Mei 对称性及其判据方程

设力学系统由 N 个质点组成, 系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s = 1, \dots, n$) 确定, 系统受到的约束是理想双面完整约束, 系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s, \quad (1)$$

其中 $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数. 由方程 (1) 描述的系统为一般完整力学系统. 引入 Euler 算子

$$E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}, \quad (2)$$

则方程 (1) 可简写为

$$E_s(L) = Q_s. \quad (3)$$

引进无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (4)$$

[†] E-mail: gslyk@yahoo.com.cn

其中 ε 为无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元. 在无限小变换(4)下, $L = L(t, q, \dot{q})$ 变成 $L^* = L(t^*, q^*, \dot{q}^*)$, $Q_s = Q_s(t, q, \dot{q})$ 变成 $Q_s^* = Q_s(t^*, q^*, \dot{q}^*)$.

定义 如果用变换后的 Lagrange 函数 L^* 代替变换前的 L , Q_s^* 代替变换前的 Q_s 时, 方程(3)的形式保持不变, 即

$$E_s(L^*) = Q_s^*, \quad (5)$$

则称这种不变性为一般完整力学系统的 Mei 对称性.

展开 L^*, Q_s^* 有

$$\begin{aligned} L^* &= L(t^*, q^*, \dot{q}^*) \\ &= L(t, q, \dot{q}) + \varepsilon X^{(1)}(L) + O(\varepsilon^2), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_s^* &= Q_s(t^*, q^*, \dot{q}^*) \\ &= Q_s(t, q, \dot{q}) + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + O(\varepsilon^2), \quad (7) \end{aligned}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \quad (8)$$

将(6)式和(7)式代入方程(5), 忽略 ε^2 及以上高阶小量项, 并利用方程(3), 可得

$$E_s(X^{(1)}(L)) = X^{(1)}(Q_s). \quad (9)$$

于是有

判据 对一般完整力学系统(3), 若无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程(9), 则相应的不变性是系统的 Mei 对称性.

称方程(9)为一般完整力学系统 Mei 对称性的判据方程.

3. 系统 Mei 对称性的一种守恒量

已有的研究工作表明^[8]: 如果一般完整力学系统 Mei 对称性的生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G_M = G_M(t, q, \dot{q})$ 满足条件

$$\begin{aligned} &X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] \\ &+ X^{(1)}(Q_s)(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0) + \dot{G}_M = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

则系统的 Mei 对称性可直接导致 Mei 守恒量

$$\begin{aligned} I_M &= X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_M \\ &= \text{const}. \quad (11) \end{aligned}$$

一般完整力学系统 Mei 对称性能直接导致 Mei

守恒量, 也能直接导致广义 Mei 守恒量^[18]. 除此之外, 它还能否直接导致新类型的守恒量? 下述定理给出了一般完整力学系统 Mei 对称性直接导致一种守恒量的条件和形式.

定理 如果一般完整力学系统(3)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G = G(t, q, \dot{q})$ 满足条件

$$\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} - X^{(1)}(Q_s)\dot{q}_s + \dot{G} = 0, \quad (12)$$

则系统的 Mei 对称性直接导致如下形式的一种守恒量:

$$I = X^{(1)}(L) - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s + G = \text{const}. \quad (13)$$

证明 将 I 对 t 求导, 并利用方程(9)和条件(12), 有

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt}[X^{(1)}(L)] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\right]\dot{q}_s - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s + \dot{G} \\ &= \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\dot{q}_s - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\right]\dot{q}_s + \dot{G} \\ &= \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} - E_s[X^{(1)}(L)]\dot{q}_s + \dot{G} \\ &= \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} - X^{(1)}(Q_s)\dot{q}_s + \dot{G} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

守恒量(13)是一般完整力学系统 Mei 对称性直接导致的不同于 Mei 守恒量和广义 Mei 守恒量的一种守恒量.

4. 算 例

力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2, \quad (15)$$

系统所受的广义力为

$$Q_1 = \dot{q}_2^2, \quad Q_2 = 0. \quad (16)$$

试研究系统 Mei 对称性直接导致的守恒量和 Mei 守恒量.

运动微分方程(3)给出

$$\ddot{q}_1 = \dot{q}_2^2, \quad \ddot{q}_2 = -1. \quad (17)$$

做计算有

$$X^{(1)}(L) = (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \xi_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \xi_0)\dot{q}_2 - \xi_2, \quad (18)$$

取生成元

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = (\dot{q}_2 + t)^2, \quad (19)$$

则

$$X^{(1)}(L) = -(\dot{q}_2 + t)^2, \quad (20)$$

于是有

$$E[X^{(1)}(L)] = 0, \quad X^{(1)}(Q_s) = 0. \quad (21)$$

可见对生成元 (19) 系统具有 Mei 对称性.

由 (12) 式可得

$$G = 2q_2 + t^2. \quad (22)$$

由 (13) 式得系统 Mei 对称性导致的守恒量

$$I = \dot{q}_2^2 + 2q_2 = \text{const}. \quad (23)$$

对生成元 (19), 由 (10) 式可求得

$$G_M = 2q_2 + t^2. \quad (24)$$

由 (11) 式得系统 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

$$I_M = \dot{q}_2^2 - 2(\dot{q}_2 + t)^2 + 2q_2 = \text{const}. \quad (25)$$

显然, 对生成元 (19), Mei 对称性的守恒量 (23) 与 Mei 守恒量 (24) 不相同.

5. 结 论

本文给出了一般完整力学系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量, 这类守恒量不同于已找到的 Mei 守恒量和广义 Mei 守恒量. 当非势力 $Q_s = 0$ 时, 本文结果化为文献 [28] 的结果. 本文的结果也可以推广到非完整力学系统.

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **KI** II 235

[2] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]

[3] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[4] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[5] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[6] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269

[7] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[8] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[9] Wu H B, Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3825 (in Chinese) [吴惠彬、梅凤翔 2006 物理学报 **55** 3825]

[10] Shang M, Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 2788

[11] Xu X J, Mei F X, Zhang Y F 2006 *Chin. Phys.* **15** 19

[12] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470

[13] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3054 (in Chinese) [张毅 2007 物理学报 **56** 3054]

[14] Hu C L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3675 (in Chinese) [胡楚勒 2007 物理学报 **56** 3675]

[15] Shi S Y, Fu J L, Chen L Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3060 (in Chinese) [施沈阳、傅景礼、陈立群 2007 物理学报 **56** 3060]

[16] Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2980 (in Chinese) [张毅 2005 物理学报 **54** 2980]

[17] Ge W K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1 (in Chinese) [葛伟宽 2007 物理学报 **56** 1]

[18] Fang J H, Ding N, Wang P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3039 (in Chinese) [方建会、丁宁、王鹏 2007 物理学报 **56** 3039]

[19] Zheng S W, Jia L Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 661 (in Chinese) [郑世旺、贾利群 2007 物理学报 **56** 661]

[20] Hu C L, Xie J F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5045 (in Chinese) [胡楚勒、解加芳 2007 物理学报 **56** 5045]

[21] Fang J H, Ding N, Wang P 2007 *Chin. Phys.* **16** 887

[22] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3054 (in Chinese) [张毅 2007 物理学报 **56** 3054]

[23] Huang X H, Zhang X B, Shi S Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6056 (in Chinese) [黄晓虹、张晓波、施沈阳 2008 物理学报 **57** 6056]

[24] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群、罗绍凯、张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[25] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[26] Zhang M J, Fang J H, Zhang X N and Lu K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1957

[27] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[28] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]

A kind of conserved quantity of Mei symmetry for general holonomic mechanical systems

Liu Yang-Kui[†]

(College of Physics & Electronic Engineering , Longdong University , Qingyang 745000 , China)

(Received 17 January 2009 ; revised manuscript received 23 March 2009)

Abstract

A kind of conserved quantity which directly results from the Mei symmetry of general holonomic mechanical system is studied in the paper. The definition and criterion of Mei symmetry for the general holonomic mechanical system are given. The conditions under which Mei symmetry can lead to a conserved quantity and the form of the conserved quantity are deduced. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords : general holonomic mechanical system , Mei symmetry , conserved quantity

PACC : 0320

[†] E-mail : gslyk@yahoo.com.cn