

一类无奇点宇宙模型*

王永久^{1)†} 李爱根¹⁾²⁾ 龚添喜¹⁾ 陈菊华¹⁾

1) (湖南师范大学物理研究所, 长沙 410081)

2) (Department of Physics and Astronomy, University of Missouri, Columbia, MO 65211)

(2009 年 2 月 23 日收到; 2009 年 6 月 5 日收到修改稿)

按照 Penrose-Hawking 的奇点定理, 在场源物质无旋、无加速且能量密度满足条件 $\rho + 3p \geq 0$ 的宇宙模型中一定存在奇点. 本文研究了场源物质有旋时的无奇点宇宙模型, 获得了几种无奇点的宇宙解.

关键词: 广义相对论, 奇点定理, 宇宙模型

PACC: 0314

1. 关于 Penrose-Hawking 的奇点定理

按照 Penrose-Hawking 的奇点定理, 在场源物质无旋、无加速且满足正能条件的宇宙模型中一定存在奇点. 在物理学中, 奇点是没有物理意义的, 人们总在设法消除它. 宇宙学中的 Penrose-Hawking 奇点也是一样, 所以人们为消除此奇点也做了很大努力^[1-4].

速度 u^μ 的协变导数可构成一个与 u^μ 正交的表达式, 此式可分解为反对称部分、对称无迹部分和它的迹^[5], 有

$$u_{\mu;\nu} + u_{\mu;\lambda} u^\lambda u_\nu = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \vartheta h_{\mu\nu}/3,$$

即

$$u_{\mu;\nu} = -\dot{u}_\mu u_\nu + \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \vartheta h_{\mu\nu}/3, \quad (1)$$

式中, $\dot{u}_\mu$ 为加速度,

$$\dot{u}_\mu = u_{\mu;\nu} u^\nu = \frac{Du_\mu}{Ds};$$

$\omega_{\mu\nu}$ 为旋速度,

$$\omega_{\mu\nu} = u_{[\mu;\nu]} + \dot{u}_{[\mu} u_{\nu]}; \quad (2)$$

$\sigma_{\mu\nu}$ 为切速度,

$$\sigma_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} + \dot{u}_{(\mu} u_{\nu)} - \vartheta h_{\mu\nu}/3; \quad (3)$$

ϑ 为膨胀速度,

$$\vartheta = u^\mu_{;\mu}; \quad (4)$$

另外,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu; \quad (5)$$

$$\dot{u}_\mu u^\mu = \omega_{\mu\nu} u^\nu = \sigma_{\mu\nu} u^\nu = h_{\mu\nu} u^\nu = 0. \quad (6)$$

将(1)代入恒等式

$$(u_{\mu;\nu;\tau} - u_{\mu;\tau;\nu}) g^{\mu\nu} u^\tau = -R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (7)$$

再利用 Einstein 引力场方程, 便可得到

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\tau} = & -\frac{\vartheta^2}{3} - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\ & - k(3p + \rho) + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \dot{u}^\mu_{;\mu}. \end{aligned} \quad (8)$$

假设 $\rho + 3p \geq 0$, 则当旋速度和加速度都等于零时, 可得

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\vartheta} \right) \geq \frac{1}{3}. \quad (9)$$

由此可知, 若 $\vartheta > 0$, 则 ϑ^{-1} 在过去的某一时刻为零; 若 $\vartheta < 0$, 则 ϑ^{-1} 在将来的某一时刻为零. 由于膨胀速度是体积相对变化的量度, 于是 Penrose 和 Hawking 得出结论: 当场源无旋, 无加速且满足 $\rho + 3p \geq 0$ 时, 宇宙一定存在奇点. 在弗里德曼模型中 $\vartheta = 3\dot{R}/R$, 奇点恰与 $R = 0$ 对应. 可以发现, 如果物质本身有旋, 宇宙空间中不存在无旋的类时短程线簇, 则 Penrose-Hawking 奇点是可以避免的. 至今, 人们为了消除宇宙学奇点已经做了不少工作^[1-4]. 本文采用 Einstein-Cartan 引力理论^[2-5], 获得了一系列无奇点的宇宙解.

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB832800)、国家自然科学基金 (批准号: 10873004) 和湖南省教育厅科学研究基金 (批准号: 08B051) 资助的课题.

† E-mail: wyj@hunnu.edu.cn

2. 有旋流体的宇宙模型

我们把有旋的 Gödel 类度规自然推广为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = & \mathrm{d}t^2 - R^2(t) (\mathrm{d}x^2 + ka^2(x) \mathrm{d}y^2) \\ & - r^2(t) \mathrm{d}z^2 - 2R(t)b(x) \mathrm{d}y \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{10}$$

此度规由旋张量

$$\omega_{\mu\nu} = R(t)b'(x)\delta^2_{[\mu}\delta^1_{\nu]} \tag{11}$$

表征. 切张量为

$$\sigma_{\mu\nu} = \vartheta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\vartheta h_{\mu\nu}, \tag{12}$$

其中,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & -\frac{1}{3}\lambda R^2(t), \\ \sigma_{22} = & -\frac{1}{3}\lambda R^2(T)[ka^2(x) + b^2(x)], \\ \sigma_{33} = & \frac{2}{3}\lambda r^2, \\ \lambda = & \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} - \frac{\dot{r}}{r}. \end{aligned} \tag{13}$$

膨胀速度为

$$\vartheta = \vartheta^\mu_\mu = 2\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} - \frac{\dot{r}}{r}. \tag{14}$$

在随动系中速度矢量 $u^\mu = \delta^\mu_0$, 加速度为

$$u^\mu \tilde{\nabla}_\mu u_\alpha = -b\dot{R}\delta^2_\alpha. \tag{15}$$

由空间均匀性条件可得

$$b = \sigma^{1/2}a, \quad a = Ae^{mx}, \tag{16}$$

式中 σ, A, m 均为常数参量.

我们选取正交引力标架^[6-8]

$$\begin{aligned} b^{\dot{0}}_0 = & 1, \quad h^{\dot{1}}_1 = R, \\ h^{\dot{2}}_2 = & (ka^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}R, \\ h^{\dot{3}}_3 = & r, \quad h^{\dot{0}}_2 = -bR, \end{aligned} \tag{17}$$

式中带一点的指标表示标架指标.

在度规 (10) 中, 自然假设源的自旋沿 Z 轴方向, 则

$$\mu_{23} = \mu_{13} = 0, \quad \mu_{12} = \mu(t). \tag{18}$$

这时由 Einstein-Cartan 方程得到挠率的不为零分量为

$$Q_{\dot{0}\dot{1}\dot{2}} = Q(t). \tag{19}$$

由 (10) 和 (19) 式得到局部 Lorentz 联络系数的不为零分量有

$$\Gamma^{\dot{3}}_{\dot{0}\dot{0}} = \Gamma^{\dot{1}}_{\dot{2}\dot{1}} = (1 + k/\sigma)^{-1/2} \dot{R}R^{-1},$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\dot{3}}_{\dot{2}\dot{3}} = & (1 + k/\sigma)^{-1/2} \dot{r}r^{-1}, \\ \Gamma^{\dot{0}}_{\dot{1}\dot{1}} = & \Gamma^{\dot{0}}_{\dot{2}\dot{2}} = \dot{R}R^{-1}, \\ \Gamma^{\dot{0}}_{\dot{3}\dot{3}} = & \dot{r}r^{-1}, \\ \Gamma^{\dot{1}}_{\dot{2}\dot{2}} = & -mR^{-1}, \\ \Gamma_{\dot{2}\dot{0}\dot{1}} = & \Gamma_{\dot{0}\dot{1}\dot{2}} = \Gamma_{\dot{2}\dot{1}\dot{0}} = MR^{-1} + Q, \end{aligned} \tag{20}$$

式中, $M \equiv \frac{m}{2}(1 + k/\sigma)^{-1/2}$.

由 (18) 和 (20) 式可得,

$$\mu = C, \quad \rho = \rho_0 r R^{-2}, \tag{21}$$
$$Q = \frac{\kappa}{2} \rho \mu = Q_0 R^{-2} r^{-1}, \tag{22}$$

其中 C 为常数. 将上式代入度规 (10), Einstein 场方程可写为

$$\begin{aligned} & -(1 + k/\sigma)^{-1}(\ddot{R}R^{-1} + \ddot{r}r^{-1}) + \dot{R}^2 R^{-2} \\ & + (1 + 2k/\sigma)(1 + k/\sigma)^{-1} \dot{R}\dot{R}^{-1} r^{-1} \\ & + 4MQR^{-1} + Q^2 - m^2(1 + 4k/\sigma) \\ & \times (1 + k/\sigma)R^{-2}/4 = \kappa(\varepsilon - \lambda), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} & (1 + \sigma/\kappa)^{-1}(\ddot{R}R^{-1} + \ddot{r}r^{-1} + \dot{R}\dot{R}^{-1} r^{-1}) \\ & - 2MQR^{-1} - M^2 R^{-2} - Q^2 = -\kappa(\rho + \lambda), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{R}R^{-1} + \ddot{r}r^{-1} - (1 + k/\sigma)^{-1} \dot{R}^2 R^{-2} \\ & + (K/\sigma - 1)(K/\sigma + 1)^{-1} \dot{R}\dot{R}^{-1} r^{-1} \\ & - 2MQR^{-1} - M^2 R^{-2} - Q^2 = -\kappa(\rho + \lambda), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} & 2(1 + \sigma/k)^{-1} \ddot{R}R + (1 + \sigma/k) \dot{R}^2 R^{-2} \\ & - Q^2 - m^2(3 + 4k/\sigma) \\ & \times (1 + k/\sigma)^{-1} R^{-2}/4 = -\kappa(\rho + \lambda), \end{aligned} \tag{26}$$

$$(1 + k/\sigma)^{-1/2}(\dot{R}R^{-1} + \dot{r}r^{-1})MR^{-1} = 0, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} & (1 + k/\sigma)^{-1/2}(\ddot{R}R^{-1} + \ddot{r}r^{-1} \\ & - \dot{R}^2 R^{-2} - \dot{R}\dot{R}^{-1} r^{-1}) = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

式中 λ 为宇宙常数.

3. 几种特殊的宇宙解

本节我们分别讨论几种具体情况下方程组 (23) — (28) 的解和它们的性质.

情形 1 当 (16) 中的参量 $m = 0$, 由 (24) — (26) 和 (28) 式可得

$$\ddot{R}R^{-1} = \dot{R}\dot{R}^{-1} r^{-1}, \quad \ddot{r}r^{-1} = \dot{R}^2 R^{-2}. \tag{29}$$

此方程组的一般解为

$$R = R_0 \varphi_1^{2/3}, \quad r = r_0 \varphi_2 / \varphi_1^{1/3}, \quad (30)$$

式中函数 φ_1 和 φ_2 满足方程组

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{3}{2} \omega \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = S \cdot \frac{3}{2} \omega \varphi_1, \quad S = \pm 1.$$

取 $S = 1$, 积分得

$$\varphi_1 = c_1 \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2} \omega t\right) + c_2 \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2} \omega t\right), \quad (31)$$

取 $S = -1$, 得到

$$\varphi_1 = c_1 \sin\left(\frac{3}{2} \omega t\right) + c_2 \cos\left(\frac{3}{2} \omega t\right), \quad (32)$$

式中, $c_1, c_2, \omega > 0$, 均为任意常数.

各向同性解

$$R = r = R_0 e^{\omega t} \quad (33)$$

是(30)的特殊情况. 在这种情况下, 挠率、粒子数密度、能量密度和压强分别为

$$Q = Q_0 R_0^{-3} e^{-3\omega t}, \quad \rho = \rho_0 R_0^{-3} e^{-3\omega t}, \quad (34)$$

$$\varepsilon - \lambda = 3\omega^2 (1 + \sigma/k)^{-1} / \kappa + Q_0^2 R_0^{-6} e^{-6\omega t} / \kappa,$$

$$\rho + \lambda = -3\omega^2 (1 + \sigma/k)^{-1} e^{-6\omega t} / \kappa. \quad (35)$$

当 $\lambda = 0$ 时状态方程(35)由 $\rho = \varepsilon$ 到 $\rho = -\varepsilon$ 随时间变化. $t = -\infty$ 是奇点.

一般解(30)包含了由均匀各向同性 de Sitter 宇宙向各向异性情况的推广. 为了更明显地看出这一点, 在(30)和(31)式中令 $c_1 = 0, S = 1$, 我们得到

$$R = R_0 \operatorname{ch}^{3/2}\left(\frac{3}{2} \omega t\right),$$

$$r = r_0 \left| \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2} \omega t\right) \right| \operatorname{ch}^{-1/3}\left(\frac{3}{2} \omega t\right). \quad (36)$$

当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时成为各向同性模型, 并渐近地趋于 de Sitter 宇宙(33): $r \rightarrow R \rightarrow e^{\omega t}$, 当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时各向异性参量趋于零, 有

$$\lambda(t) = |3\omega / \operatorname{sh}(3\omega t)| \rightarrow 0.$$

不难看出, 无论何时标度因子 R 都不为零, 但是与(35)式不同, (36)式中当 $t = 0$ 时, $r = 0$, 因此(36)式有奇点 $t = 0$. 此时可得

$$Q = 4Q_0 R_0^{-4} r_0^{-2} \operatorname{sh}^{-2}(3\omega t),$$

$$\rho = 4\rho_0 R_0^{-4} r_0^{-2} \operatorname{sh}^{-2}(3\omega t),$$

$$\varepsilon - \lambda = 3k\omega^2 / \kappa (k + \sigma)$$

$$+ 4Q_0^2 / \kappa R_0^4 r_0^2 \operatorname{sh}^2(3\omega t),$$

$$p + \lambda = -3k\omega^2 / \kappa (k + \sigma)$$

$$+ 4Q_0^2 / \kappa R_0^4 r_0^2 \operatorname{sh}^2(3\omega t). \quad (37)$$

可以看出, 对于所研究的情况 ($m = 0$), 不但挠率有奇点, 而且压强和能量密度也有奇点.

情形 2 当 $m = 0, \sigma = 0, \dot{R} \neq 0$ 时, 由(15),

(16)式可知旋量是守恒的. 引入变量 $\varphi^3 = R^2 r$, 取状态方程为 $\rho = \gamma \varepsilon$, 可把 Einstein 场方程(14)—(18)写成如下统一形式:

$$\ddot{\varphi} \varphi^{-1} + \frac{1}{2} (1 + 3\gamma) \dot{\varphi}^2 \varphi^{-2}$$

$$+ \frac{1}{2} (\gamma - 1) \left(1 - \frac{\lambda^2 Q^{-2}}{3} \right) Q_0^2 \varphi^{-6}$$

$$+ \frac{1}{2} (1 + \gamma) \kappa \lambda = 0. \quad (38)$$

当 $0 \leq \gamma \leq 1$ 时, 对于任意 λ , 只要 $\lambda < \sqrt{3}Q$, 则(38)式的解是无奇点的. 我们发现, 如果 $\lambda > 0$ (如 Gödel 度规), 则(38)式描述振荡的无奇点宇宙.

对于特殊情况, $\gamma = 0$, 我们得到^[9-11]

$$(\varphi_{\min})^{3/2} = \frac{4}{3} \left\{ c - \left[c^2 - \frac{3}{8} (3 - \lambda^2 / Q^2) \lambda \right]^{1/2} \right\} \lambda^{-1},$$

$$(\varphi_{\min})^{3/2} = \frac{4}{3} \left\{ c - \left[c^2 + \frac{3}{8} (3 - \lambda^2 / Q^2) \lambda \right]^{1/2} \right\} \lambda^{-1},$$

$$c^2 > \frac{3}{8} (3 - \lambda^2 / Q^2) \lambda.$$

当 $\gamma = 1$ 时, 由(38)式可见挠率不影响宇宙动力学. 在这种情况下宇宙动力学决定于 λ 的大小, 有

$$\varphi = \varphi_0 (c_1 + c_2)^{1/3} \quad (\lambda = 0),$$

$$\varphi = \varphi_0 (\sin \sqrt{3\kappa\lambda} + c)^{1/3} \quad (\lambda > 0),$$

$$\varphi = \varphi_0 (\operatorname{ch} \sqrt{-3\kappa\lambda} t)^{1/3} \quad (\lambda < 0).$$

正如人们所预期, 这种情况下负的宇宙项避免了宇宙的奇异性.

情形 3 这里讨论具有旋转的稳态的宇宙模型. 令

$$\dot{r} = \dot{R} = 0, \quad m \neq 0, \quad \sigma \neq 0,$$

比较(24)—(26)式(方程(27), (28)总被满足), 我们得到

$$Q = \frac{1}{2} m (\sigma + 2k) [\sigma (k + \sigma)]^{-1/2}. \quad (39)$$

因此, 流体物质的旋转角速度决定于挠率(39)式, 从而决定于流体的旋量.

物质的物理参量可表示为

$$\varepsilon = m^2 (k + \sigma) \kappa^{-1} \sigma^{-1} + \lambda,$$

$$p = m^2 (k + \sigma) \kappa^{-1} \sigma^{-1} - \lambda, \quad (40)$$

$$\mu\rho = m (\sigma + 2k) \kappa^{-1} [\sigma (k + \sigma)]^{-1/2}. \quad (41)$$

当 $\lambda = 0$ 时, (40)式给出极端状态方程 $p = \varepsilon$.

当宇宙物质无旋无挠时, 由(30)—(40)式可以得到

$$k/\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon = 2\lambda \quad (p = 0). \quad (42)$$

此即 Gödel 宇宙解. 由 (42) 式可知 $k < 0$, Gödel 宇宙具有闭合的类时测地线. 在我们讨论的 Einstein-Cartan 理论中对于参量 k (和 σ) 求出的解没有限制, 所以可令

$$k \geq 0,$$

我们得到不违背因果律的旋转宇宙模型. 所以, 可以认为旋转流体就是真实的源, 由此可以建立具有 Gödel 类旋转的且没有闭合类时测地线的宇宙模型.

4. 结 论

本文得到了几种旋转流体源的宇宙解. 其中有各向异性有挠的广义 de Sitter 宇宙解, 有由非零宇宙常数推广得到的各向异性宇宙解, 还有有旋的且不违背因果律的稳态解. 我们揭示了挠率在宇宙学中的作用: 它可以消除 (38) 式中的奇异性; 挠率能够改善时空的因果结构^[12–15].

[1] Korotky Y N 1987 *Astrophys.* **28** 6

[2] Korotky V A 1997 *Phys. Lett. A* **64** 1023

[3] Ashtekar A, Bombeli L, Corich A *Phys. Rev. D* **72** 025008

[4] Ashtekar A, Pawlowski T, Singh P 2006 *Phys. Rev. D* **96** 141301

[5] Wang Y J 2008 *Classical Black Hole and Quantum Black Hole* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [王永久 2008 经典黑洞和量子黑洞 (北京: 科学出版社)]

[6] Guth A H 1981 *Phys. Rev. D* **23** 347

[7] Linde A D 1985 *Nucl. Phys. B* **252** 153

[8] Bojowal D M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 061301

[9] Li A, Wang Y J 2006 *Astrophys. J. Lett.* **640** 151

[10] Wang Y J, Tang Z M 2002 *Astrophysics and Space Science* **282** 363

[11] Wang Y J, Tang Z M 2002 *Astrophysics and Space Science* **282** 874

[12] Wang Y J, Tang Z M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2284 (in Chinese) [王永久、唐智明 2001 物理学报 **50** 2284]

[13] Li A, Wang Y J 2008 *Astrophys. J.* **685** 1046

[14] He T M, Wang Y J 2006 *Chin. Phys.* **15** 232

[15] Hu P H, Wang Y J 2006 *Chin. Phys.* **15** 1120

A kind of singularity-free cosmology model^{*}

Wang Yong-Jiu^{1)†} Li Ai-Gen¹⁾²⁾ Gong Tian-Xi¹⁾ Chen Ju-Hua¹⁾

1) (Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

2) (Department of Physics and Astronomy, University of Missouri, Columbia, MO 65211, USA)

(Received 23 February 2009; revised manuscript received 5 June 2009)

Abstract

According to Penrose-Hawking’s theorem on the singularity of cosmology, the singularity exists in the case when the source has no rotation or acceleration, and the energy density satisfies the condition $\rho + 3p \geq 0$. In this paper we study some singularity-free cosmological models under the conditions that the source has rotation. Some cosmological solutions without singularity are obtained.

Keywords: general relativity, singularity theorem, cosmological models

PACC: 0314

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2010CB832800), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10873004), and the Scientific Research Fund of the Education Department of Hunan Province, China (Grant No. 08B051).

[†] E-mail: wyj@hunnu.edu.cn