第 59 卷 第 10 期 2010 年 10 月
1000-3290/2010/59(10)/7129-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 10, October 2010

基于热质理论的 Hamilton 原理*

宋 柏[1)†] 吴 晶[2)] 过增元[1)]

1)(清华大学航天航空学院, 热科学与动力工程教育部重点实验室, 北京 100084)

2)(南京航空航天大学能源与动力学院, 南京 210016)

(2009 年 9 月 24 日收到;2009 年 11 月 20 日收到修改稿)

基于热质理论,类比经典力学,给出了热质运动遵循的 Hamilton 原理以及相应的导热 Lagrange 方程. 由于考虑了热质动能,热质运动的 Hamilton 原理有望应用于非 Fourier 效应的讨论,在忽略热质动能时,回归到 Fourier 热学. 应用 Lagrange 方程对含内热源一维瞬态导热问题进行了近似求解,计算结果与解析解符合较好. 从分析力学的角度对传热理论以及热学与力学的统一做了新的阐释,指出了现有文献中采用分析力学方法讨论导热问题时存在的某些不足,为导热问题的近似求解提供了新的思路,同时也说明了热质和热质能等热学新概念的合理性.

关键词: 热质, 热质能, Hamilton 原理, Lagrange 方程

PACC: 4410, 0560, 0420M

1. 引 言

自从 Fermat 于 1662 年提出光学中的"最短时间原理"以来,人们对于寻找各门自然科学中类似的极值原理始终保持着热情[1]. 以 Hamilton 原理的提出以及 Hamilton 力学体系的建立为代表,这种热情在经典力学中得到了丰厚的回报,同时更为现代物理,尤其是量子力学的发展作好了准备. 如今以已有的微分方程和边界条件为基础,基于加权余量法和 Lagrange 乘子法,或者直接从问题本身的物理含义出发,各式各样的(广义)变分原理在弹塑性力学、流体力学、电磁学以及热学等学科中广泛地建立了起来[2,3].

热学中变分原理的提出始于 Onsager. 在 1931 年提出著名"倒易关系"的同一篇论文里, Onsager[4] 基于熵平衡方程给出了最小能量耗散原理,但需要指出的是,其数学表述为特定条件下稳态导热过程熵产最小. Prigogine[5] 于 1945 年独立地提出了稳态热力学系统满足的最小熵产原理. Rosen[6] 给出了非稳态导热的变分原理. Glansdorff 和 Prigogine[7] 引入了局域势的概念以讨论物性随温度变化的非线性问题. 由于只考虑了泛函对某一函数的偏变分而不是全变分,因此 Rosen[6], Glansdorff 和 Prigogine[7] 的变分原理实为"受限变分原理"[2,8]. Biot[9—11] 类比经典力学,通过引入热位移场和广义坐标得到了导热变分方程和相应的 Lagrange 方程,用来近似求解非线性问题. Vujanovic 和 Strauss[12] 给出了可用于讨论双曲导热的数学上严格的变分原理,但所用泛函的物理意义很难明确. 考虑到现有传热学理论的不足以及熵产最小原理的局限,过增元等[13] 提出了"火积"的概念,并给出了实际传热过程满足的"火积"耗散极值原理,目前这一原理已被成功地用于换热器性能优化、体点散热、辐射换热以及室内通风排污等众多传热传质优化问题[14—20].

热质理论的基本思想是基于 Einstein 质能关系,把对传热过程的研究转化为对热质受力和运动的分析. 本文基于热质和热质能等概念,给出热质运动满足的 Hamilton 原理,进而推导出描述导热过程的 Lagrange 方程. 在此基础上以含内热源导热问题为例,说明基于热质理论的 Lagrange 方程在传热问题中的应用,同时指出 Biot 方法存在的一些不足.

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2007CB206901)资助的课题.

† E-mail: song-b07@mails.tsinghua.edu.cn

2. 热质运动的 Hamilton 原理

2.1. 热 质

热现象无处不在，然而现有热学理论却显得很特殊．一些物理量或现象在许多物理分支学科里有，在热学里却不存在，比如波动现象，在经典的传热理论中是不存在的．传热学奠基人 Fourier[21] 在其专著《热的解析理论》中指出“……无论力学理论的研究范围如何，它们都不能应用于热效应，这些热效应构成一个特殊的现象类，它们不能用运动和平衡的原理来解释．……自然哲学的这一部分不可能与动力学的理论有关，它有它本身特有的原理．”正如 Fourier 所设想和实践的，现有热学理论与力学理论面目迥异，其中既没有热量的质量、运动速度、动量和能量等物理量，也没有类似于 Newton 运动定律那样描述热量运动的定律．

Fourier 的传热理论诞生于 19 世纪初期，正是“热质说”与“热动说”这两种关于热的本质的学说激烈争论的时代．Fourier 的成功并非因为他对热的本质有明确的认识，而是得益于他颇合时宜的科学方法论，正如他在专著[21] 里写到的，“关于热的本质只能形成一些不确定的假说，关于它的作用所服从的自然规律的知识，却与一切假说无关；它仅仅只需要对一些日常观察所表明、由精确实验已确证的主要事实进行细致的观察就够了．”在当时的背景下，就 Fourier 的目的而言，这么做无疑是明智的．然而对于事物本质的正确认识绝非无关紧要，比如对于“热动说”的坚持就是分子动力论和统计热力学成功的必要前提．

Einstein 著名的质能方程使人类对于能量和质量本质的认识发生了革命性的变化．近年来，面对极低温、超快速以及超高热流密度等极端条件带来的挑战，考虑到现有热学理论的不足与特殊，过增元等[22—25] 提出了“热质”的概念，即热能在质能方程意义下的当量质量，对于一定量的热能 U，相应的热质由(1)式给出，

$$M_{\mathrm{h}} = \frac{U}{c^2}, \tag{1}$$

其中 c 为真空中的光速．必须强调的是，这里的热质意为“热的质量”，而传统文献中与热动相对应的热质(caloric)意为“热的物质”，它是没有质量的，两者有着本质区别．

有了热质的概念，对传热过程的研究就可以转化为对热质受力和运动的分析．对应热流密度 q_{h}，热质运动速度由(2)式给出，

$$u_{\mathrm{h}} = \frac{q_{\mathrm{h}}}{\rho C\theta}, \tag{2}$$

其中 ρ 为导热介质的密度，C 为比热，θ 为绝对温度．作为质量，热质具有势能、动能以及与运动相关的耗散．空间某点 p 附近单位体积内的热质势能即为该点处的热质压强

$$V_p = p_{\mathrm{h}}. \tag{3}$$

单位体积内的热质动能为

$$T_p = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{h}} u_{\mathrm{h}}^2, \tag{4}$$

其中 ρ_{h} 为热质密度．假定热质运动时阻力与速度成线性关系，那么表征热质能耗散的 Rayleigh 耗散函数由(5)式给出，

$$D_p = \frac{1}{2}\beta_{\mathrm{h}} u_{\mathrm{h}}^2, \tag{5}$$

β_{h} 即为阻力系数．积分(3)—(5)式，就得到整个系统的热质势能、动能以及耗散函数．

对于固体导热问题，(3)—(5)式可以用温度和热流密度等传统物理量分别表示为

$$V_p = \frac{\gamma\rho C^2}{c^2}\theta^2, \tag{6}$$

$$T_p = \frac{q_{\mathrm{h}}^2}{2c^2\rho C\theta}, \tag{7}$$

$$D_p = \frac{\gamma C}{c^2 k} q_{\mathrm{h}}^2, \tag{8}$$

其中 γ 和 k 分别为固体材料的 Grüneisen 常数和热导率，c 为光速．详细推导参见文献[22,26]．

2.2. 热质运动 Hamilton 原理

经典力学中最著名的、对整个物理学的发展影响最为深远的变分原理当属 Hamilton 于 1834 年提出的 Hamilton 原理．该原理[27] 指出对于完整保守系统，在始末时间和位置相同的所有可能运动中，真实运动轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$ 使系统的 Hamilton 量

$$S(\boldsymbol{q}) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

取驻值，即

$$\delta S(\boldsymbol{q}) = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{10}$$

注意此处 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 是表征系统的 n 个广义坐标，而不是热流密度；$L = T - V$ 为系统的 Lagrange 量，T 是系统动能，V 是势能，L 包含了系统和力的所

有物理信息.

一般力系完整系统的 Hamilton 原理可表述为[27]

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T+\sum_{i=1}^{n} Q_i'\delta q_i\right)\mathrm{d}t=0, \tag{11}$$

其中 Q_{i2}' 是相应于广义坐标 q_i 的广义力. 如果系统中存在有势力和耗散力,(11)式可进一步写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T-\delta V+\delta W_{\mathrm{d}}+\sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i\right)\mathrm{d}t=0, \tag{12}$$

其中 W_{d} 表征系统能量的耗散,Q_i 为既不是势力、又不能归入耗散项的广义力.

热质虽然是相对性质量,但其运动速度远小于光速,可以用 Newton 力学来讨论[28]. 根据力和运动的关系可以建立描述热质运动的微分方程[22—25]. 基于热质理论,热波现象[29]和热驱动现象得到了比较好的解释,Lagrange 方程被成功地用于导热问题的讨论[26],这些都肯定了运用 Newton 力学分析热质运动的合理性. 那么从热质的角度来看,(12)式其实给出了描述热质运动的 Hamilton 原理,而式中 T,V 和 W_{d} 各项依次为热学系统中的热质动能、热质势能以及热质能耗散,Q_i 是相应于广义坐标 q_i 的广义热力,求和项为广义热功.

3. 导热 Lagrange 方程

3.1. Biot 导热 Lagrange 方程

Biot[11]类比经典力学,通过引入热位移场和广义坐标,形式上得到了描述导热过程的 Lagrange 方程. 首先定义热位移矢量场 $\boldsymbol{H}$,其含义是 0 到 t 时刻某点附近单位面积通过的热量. $\boldsymbol{H}$ 对时间的偏导数即为热流密度

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}. \tag{13}$$

而 Fourier 导热定律即为

$$\nabla\theta+\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{H}}=0. \tag{14}$$

常物性无内热源导热过程能量守恒关系可表示为

$$\rho C\theta=-\nabla\cdot\boldsymbol{H}. \tag{15}$$

由于(15)式不显含时间,可以视为完整约束,故得变分关系

$$\rho C\delta\theta=-\nabla\cdot\delta\boldsymbol{H}. \tag{16}$$

把(14)式两边同时点乘 $\delta\boldsymbol{H}$,按系统体积求积分并分部积分可得

$$\iiint_{\tau}-\theta\,\nabla\cdot\delta\boldsymbol{H}\mathrm{d}\tau+\iiint_{\tau}\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{H}}\cdot\delta\boldsymbol{H}\mathrm{d}\tau=-\iint_{A}\theta\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{H}\mathrm{d}A. \tag{17}$$

引入广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$,把 $\delta\boldsymbol{H}$ 按广义坐标展开为

$$\delta\boldsymbol{H}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{18}$$

定义 V,D 和 Q_i 分别为

$$V=\frac{1}{2}\iiint_{\tau}\rho C\theta^2\mathrm{d}\tau, \tag{19}$$

$$D=\frac{1}{2}\iiint_{\tau}\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{H}}^2\mathrm{d}\tau, \tag{20}$$

$$Q_i=-\iint_{A}\theta\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial q_i}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A. \tag{21}$$

则由(16)—(21)式可得一组方程

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i}=Q_i\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{22}$$

(22)式在形式上类似于惯性力可忽略的低速耗散力学系统的 Lagrange 方程,类比力学系统,Biot 把 V,D 和 Q_i 依次称为热势、耗散函数和广义热力,而(22)式即为导热 Lagrange 方程. Biot 用分析力学观点研究热学问题的思路是值得肯定的,但其方程中各项的物理含义并不明确,说不清是谁的势,又耗散了什么. 另外,由于 Biot 方程基于 Fourier 定律,因而不可能用于非 Fourier 效应的讨论.

3.2. 基于热质理论的导热 Lagrange 方程

吴晶等[26]基于热质和热质能等概念,直接类比分析力学中的 Lagrange 方程得到了导热 Lagrange 方程. 根据变分理论,对于一个泛函驻值问题,总能找到一组与之等价的微分方程,所以从热质运动满足的 Hamilton 原理(12)式出发,即可推出热质运动满足的 Lagrange 方程. 热质 Lagrange 量 $L=T-V$ 的变分为

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]. \tag{23}$$

当阻力与速度成线性关系时,热质能耗散与 Rayleigh 耗散函数 D 有如下关系[30]:

$$\delta W_{\mathrm{d}}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i, \tag{24}$$

故(12)式可写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right.$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + Q_i\delta q_i\Bigg]\mathrm{d}t = 0. \quad (25)$$

由于在边界处广义坐标的变分为0,整理(25)式即得导热 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1,2,\cdots,n). \quad (26)$$

(26)式考虑了热质动能,为讨论非 Fourier 效应提供了可能. 在通常条件下,忽略热质动能,热质运动 Hamilton 原理(12)式退化为 Fourier 导热的形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(-\delta V + \delta W_{\mathrm{d}} + \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i\right)\mathrm{d}t = 0. \quad (27)$$

相应的 Lagrange 方程在形式上与 Biot 方程(22)式一致,即为

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1,2,\cdots,n), \quad (28)$$

其中广义热力 Q_i 的表达式为

$$Q_i = -\iint_A \frac{2\gamma C}{c^2}\theta\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial q_i}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A. \quad (29)$$

(29)式包含着各种边界信息,其中 $\boldsymbol{H}$ 为 Biot 引入的热位移场.

3.3. 导热 Lagrange 方程的应用

在热学中引入 Lagrange 方程的主要目的是用来近似求解复杂传热问题. Lardner[31], Richardson[32] 和 Chu[33] 成功地应用 Biot 方程对于各类边界条件以及变物性的一维瞬态问题做了计算. 吴晶等[26] 应用基于热质理论的导热 Lagrange 方程计算了一维无内热源瞬态导热问题,结果与解析解符合较好. 含内热源导热现象在工程应用中广泛存在,但应用 Lagrange 方程求解含源导热问题的算例还很少见诸文献,这里就以一个含源导热问题为例,进一步说明基于热质理论的 Lagrange 方程的应用.

考虑一个简单的一维瞬态导热问题. 厚度为 l 的无限大平板,假定物性为常数,左侧绝热,右侧温度恒为0,含均匀内热源 s, $t=0$ 时刻板内各处温度为0,求 $t>0$ 时刻平板内的温度分布. 不失一般性,这里的温度可理解为过余温度. 由于稳态时的温度分布是一个抛物线,不妨取左侧边界温度 $\theta_1 = \theta_1(t)$ 为广义坐标,并假定 t 时刻的温度分布为

$$\theta = \theta_1\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (30)$$

把(30)式代入能量守恒方程(31)式

$$\rho C\theta = -\frac{\partial H}{\partial x} + st, \quad (31)$$

并关于 x 做积分,可得热位移场 H 为

$$H = \rho C\theta_1\left(\frac{x^3}{3l^2} - x\right) + stx. \quad (32)$$

注意在一维问题中,H 为标量. 有了 θ 和 H,就可以写出热质势能 V,热质能耗散函数 D 以及广义热力 Q

$$V = \int_0^l \frac{\gamma\rho C^2}{c^2}\theta^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}\frac{\gamma\rho C^2 l}{c^2}\theta_1^2, \quad (33)$$

$$D = \int_0^l \frac{\gamma C}{c^2 k}q^2\,\mathrm{d}x = \frac{68}{315}\frac{\gamma\rho^2 C^3 l^3}{c^2 k}\dot{\theta}_1^2 - \frac{8}{15}\frac{\gamma\rho C^2 l^3 s}{c^2 k}\dot{\theta}_1 + \frac{1}{3}\frac{\gamma C l^3 s^2}{c^2 k}, \quad (34)$$

$$Q = \frac{2\gamma C}{c^2}\theta\frac{\partial H}{\partial\theta_1}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0. \quad (35)$$

将 V,D 和 Q 代入 Lagrange 方程(28)式即得

$$\theta_1 + \frac{17}{42}\frac{\rho C l^2}{k}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{sl^2}{k} = 0. \quad (36)$$

令 $\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{sl^2}{k}$, $t_0 = \frac{17}{42}\frac{\rho C l^2}{k}$, 则常微分方程(36)式的解为

$$\theta_1 = \theta_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{t_0}}). \quad (37)$$

把(37)式代入(30)式即得平板内的温度分布

$$\theta = \theta_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{t_0}})\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (38)$$

图1以无量纲的形式给出了近似解(38)式与精确解[34]的比较. 可以看到,在初始阶段两者差别相对较大,但仍在可以接受的范围内;在时间超过 t_0 以后,两者符合得非常好.

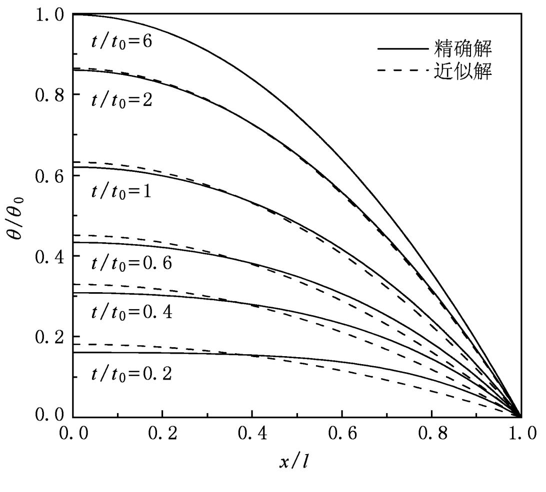

图1 无量纲温度分布近似解与精确解的比较

对比 Biot 方程，本文基于热质理论得到的导热 Lagrange 方程不仅具有物理意义明确的优点，并且能够用于非 Fourier 效应的讨论. 另外，在求解含内热源问题方面，由于 Biot 方程(22)式是基于无内热源导热的能量守恒关系(15)式得到的，因此需要进行相应的修正才能使用，而基于热质理论的 Lagrange 方程对于含源问题和无源问题的处理总是一致的.

4. 结　论

本文基于热质理论，提出了一个新的热学变分原理，即热质运动的 Hamilton 原理. 从理论层面来讲，热质运动 Hamilton 原理的提出是用分析力学方法研究热质运动这一思路的必然结果，它有助于认识热学与力学的统一性. 另一方面，由于考虑了热质动能的影响，该原理有可能用于热波现象等非 Fourier 效应的讨论，而当忽略热质动能时，该原理又可用于讨论 Fourier 传热. 从应用层面来看，基于热质运动的 Hamilton 原理可以用物理意义明确的方式方便地导出导热 Lagrange 方程，进而在非线性、相变以及各向异性等复杂传热问题的近似求解以及多自由度传热优化等问题中发挥作用.

[1] Goldstine H H 1980 *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century* (New York: Springer-Verlag)

[2] Finlayson B 1972 *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles: with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer* (New York: Academic Press) pp335—351

[3] Qian W C 1985 *Generalized Variational Principles* (Shanghai: Knowledge Press) (in Chinese) [钱伟长 1985 广义变分原理 (上海: 知识出版社)]

[4] Onsager L 1931 *Phys. Rev.* **37** 405

[5] Prigogine I 1947 *Etude Thermodynamique des Processus Irréversibles* (Liege: Desoer)

[6] Rosen P 1953 *J. Chem. Phys.* **21** 1220

[7] Glansdorff P, Prigogine I 1964 *Physica* **30** 351

[8] Finlayson B A, Scriven L E 1967 *Int. J. Heat Mass Transfer* **10** 799

[9] Biot M A 1954 *Appl. Phys.* **25** 1385

[10] Biot M A 1957 *J. Aeronaut. Sci.* **24** 857

[11] Biot M A 1970 *Variational Principles in Heat Transfer* (Oxford: Oxford University Press) pp3—20

[12] Vujanovic B, Strauss A M 1971 *Am. Inst. Aeron. Astron. J.* **9** 327

[13] Guo Z Y, Zhu H Y, Liang X G 2007 *Int. J. Heat Mass Transfer* **50** 2545

[14] Chen L, Chen Q, Li Z, Guo Z Y 2009 *Int. J. Heat Mass Transfer* **52** 4778

[15] Chen L G, Wei S H, Sun F R 2009 *J. Appl. Phys.* **105** 094906

[16] Chen Q, Ren J X, Guo Z Y 2009 *Chin. Sci. Bull.* **54** 2862

[17] Chen Q, Wang M R, Pan N, Guo Z Y 2009 *Energy* **34** 1199

[18] Liu X B, Guo Z Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4766 (in Chinese) [柳雄斌、过增元 2009 物理学报 **58** 4766]

[19] Liu X B, Meng J A, Guo Z Y 2009 *Chin. Sci. Bull.* **54** 943

[20] Wu J, Liang X G 2008 *Sci. China Ser.* E **51** 1306

[21] Fourier J B J (Translated by Gui Z L) 1993 *The Analytical Theory of Heat* (Wuhan: Wuhan Press) (in Chinese) 中译本 [傅立叶著，桂质亮译 1993 (武汉: 武汉出版社)]

[22] Cao B Y, Guo Z Y 2007 *J. Appl. Phys.* **102** 053503

[23] Guo Z Y, Cao B Y, Zhu H Y, Zhang Q G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3306 (in Chinese) [过增元、曹炳阳、朱宏晔、张清光 2007 物理学报 **56** 3306]

[24] Guo Z Y, Cao B Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4273 (in Chinese) [过增元、曹炳阳 2008 物理学报 **57** 4273]

[25] Guo Z Y, Wu J, Cao B Y 2009 *Chin. J. Mech. Engng.* **45** 10 (in Chinese) [过增元、吴　晶、曹炳阳 2009 机械工程学报 **45** 10]

[26] Wu J, Guo Z Y, Song B 2009 *Tsinghua Sci. Technol.* **14** 12

[27] Morse P M, Feshbach H 1953 *Methods of Theoretical Physics* (Part 1) (New York: McGraw-Hill) pp280—281

[28] Aharoni J 1985 *The Special Theory of Relativity* (New York: Dover Publications)

[29] Hu R F, Cao B Y 2009 *Sci. China Ser.* E **52** 1786

[30] Luo Y X, Guan F, Guan J H, Li P 1982 *Theoretical Mechanics* (Vol. 3) (3rd Ed.) (Beijing: People's Education Press) pp38—44 (in Chinese) [罗远祥、官　飞、关冀华、李　苹 1982 理论力学 (下册) (第 3 版) (北京: 人民教育出版社) 第 38—44 页]

[31] Lardner T J 1963 *Am. Inst. Aeron. Astron. J.* **1** 196

[32] Richardson P D 1964 *J. Heat Transfer* **86** 298

[33] Chu H N 1964 *J. Spacecraft Rockets* **1** 686

[34] Carslaw H S, Jaeger J C 1959 *Conduction of Heat in Solids* (2nd ed.) (Oxford: Calarendon Press) p130

Hamilton's principle based on thermomass theory*

Song Bai[1)†] Wu Jing[2)] Guo Zeng-Yuan[1)]

1)(*Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering of Ministry of Education, School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

2)(*College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*)

(Received 24 September 2009; revised manuscript received 20 November 2009)

Abstract

Based on thermomass theory, the Hamilton's principle as well as the Lagrangian equations governing the motion of thermomass were established by methods analogous to those of classical mechanics. With the kinetic energy of thermomass taken into consideration, the Hamilton's principle for thermomass is expected to be capable of dealing with non-Fourier phenomena. When the kinetic energy is small enough to be ignored, the principle gets back to Fourier transfer. The application of Lagrangian equations was illustrated by the approximate solution of a 1D transient heat conduction problem with heat source. The unification of thermal and mechanical theories was demonstrated from the perspective of analytical mechanics, the drawbacks of existing theory are discussed, a new way to the approximate solution of heat transfer problem was suggested, and in the meantime the concepts of thermomass and energy of thermomass were to some extent justified.

Keywords: thermomass, energy of thermomass, Hamilton's principle, Lagrangian equation

PACC: 4410, 0560, 0420M

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2007CB206901).

† E-mail: song-b07@mails.tsinghua.edu.cn