

Kepler 方程的 Noether 对称性与 Hojman 守恒量^{*}

顾书龙^{1)2)†} 张宏彬²⁾

1)(南京晓庄学院物理系, 南京 211171)

2)(巢湖学院科研处, 巢湖 238000)

(2009 年 2 月 5 日收到; 2009 年 5 月 27 日收到修改稿)

研究 Kepler 方程的 Noether 对称性与 Hojman 守恒量. 给出系统的运动微分方程并给出 Noether 对称性的确定方程, 提出 Kepler 方程的 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量.

关键词: Kepler 方程, Noether 对称性, Hojman 守恒量

PACC: 0320

1. 引 言

对称性原理是近代分析力学中的一个更高层次的法则. 对称性理论有许多用途, 其中之一就是用来寻求守恒量. 自 1918 年 Noether^[1]发表了著名的论文“*Invariante Variationsprobleme*”后, 动力学系统的 Noether 对称性及其守恒量的研究取得了一系列重要成果并推广为用系统的 Lie 对称性、Mei 对称性寻找不同的守恒量^[2-4]. 1992 年, Hojman^[5]利用时间不变的无限小变换下的特殊的 Lie 对称性生成元直接构成动力学系统的守恒量, 而无需系统的 Lagrange 函数和 Noether 等式. 很快, 这一方法得到迅速推广, 应用到各种动力学系统^[6-14]. 本文将研究利用时间不变的无限小变换下的 Noether 对称性寻找 Kepler 方程守恒量的间接方法.

2. 平面 Kepler 系统的运动方程

平面 Kepler 系统的运动微分方程为

$$\ddot{q}_1 = -\mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha_1, \quad (1)$$

$$\ddot{q}_2 = -\mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha_2, \quad (2)$$

其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

式中 $q_s, \dot{q}_s$ 为系统的广义坐标和广义速度, μ 为常

数. 系统的运动满足方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0. \quad (4)$$

引进 Euler 算子

$$E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}, \quad (5)$$

方程(4)可简写成

$$E_s(L) = 0. \quad (6)$$

3. 无限小变换与 Noether 对称性确定方程

引入时间不变的特殊的无限小变换

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s, \quad (7)$$

或其展开式

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (8)$$

其中 ε 为一无限小参数, ξ_s 为无限小生成元.

Noether 对称性理论指出, 对于给定的系统(3), 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 使无限小变换(8)式的生成元 ξ_s 满足如下 Noether 对称性确定方程

$$\chi^{(1)}(L) + \dot{G} = 0, \quad (9)$$

其中

$$\chi^{(1)} = \xi_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \dot{\xi}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}, \quad (10)$$

则相应的对称性为 Kepler 系统(1)–(3)的 Noether 对称性.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10872037)资助的课题.

[†] E-mail: gs12142@sohu.com

4. Lie 对称性与 Hojman 守恒量^[1]

在变换(8)式的特殊无限小变换下,方程(1),
(2)的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_k, \tag{11}$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{12}$$

当存在函数 $u = u(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 满足

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_s} + \frac{\bar{d}}{dt} \ln u = 0, \tag{13}$$

则系统的 Lie 对称性导致 Hojman 守恒量

$$I_H = \frac{1}{u} \frac{\partial(u \xi_s)}{\partial q_s} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left[u \left(\frac{\bar{d}}{dt} \xi_s \right) \right] = \text{const.} \tag{14}$$

5. 系统的 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量

以下给出利用 Kepler 系统(1)—(3)的 Noether 对称性求守恒量的间接方法.

定理 对 Kepler 系统(1)—(3),如果 Noether 对称性的生成元 ξ_s 满足方程(11),且存在某函数 $u = u(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 使得(13)式成立,则 Kepler 系统的 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量(14)式.

对 Kepler 系统,将方程(3)代入 Noether 等式(9)可解得

$$\xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2. \tag{15}$$

将 Kepler 系统的微分方程(1),(2)代入 Lie 对称性确定方程(11)得

$$\frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \xi_k. \tag{16}$$

显然, Noether 对称性生成元(15)满足方程(16).下面计算 Kepler 系统的 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量.

方程(13)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt} \ln u = 0, \tag{17}$$

它有如下解:

$$u = 1, \tag{18}$$

$$u = \mu (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \tag{19}$$

$$u = \mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_2 \dot{q}_1^2 + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2. \tag{20}$$

由定理,将(15)和(18)式或(19)式代入(14)式得系统的 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量为

$$I_H = 0, \tag{21}$$

它是平凡的.

若取满足(16)式的 Lie 对称性生成元

$$\xi_1 = -\frac{2}{3} q_1 + \dot{q}_1 t, \xi_2 = -\frac{2}{3} q_2 + \dot{q}_2 t, \tag{22}$$

将(20)和(22)式代入(14)式得系统的 Hojman 守恒量为

$$I_H = -\frac{2}{3} \left[1 + \frac{3 \dot{q}_2 t (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}}}{\mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_2 \dot{q}_1^2 + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2} \right] = \text{const.} \tag{23}$$

(23)式是非平凡的 Hojman 守恒量.

6. 结 论

由动力学系统的对称性寻找守恒量的直接方法都是利用时间不变的无限小变换下的特殊的 Lie 对称性. 本文给出了利用 Noether 对称性寻找 Kepler 方程守恒量的间接方法,即由系统的 Noether 对称性生成元(15)满足 Lie 对称性确定方程(16),可找到守恒量(23).

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A:Math. Gen.* **12** 973

[3] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities for Mechanical Systems with Constraints* (Beijing: Beijing Institute Technology Press) pp12—23 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约

束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)第12—23页]

[4] Luo S K 2003 *Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[5] Hojman S A 1992 *J. Phys. A:Math. Gen.* **25** L291

[6]

Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[7]

Ding N, Fang J H, Chen X X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1967

[8]

Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 1544 (in Chinese) [梅凤翔 2002 科学通报 **47** 1544]

[9]

Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[10]

Zheng S W, Fu J L, Li X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5511 (in Chinese) [郑世旺、傅景礼、李显辉 2005 物理学报 **54** 5511]

[11]

Gu S L, Zhang H B 2008 *J. Anhui Normal University* **31** 326 (in Chinese) [顾书龙、张宏彬 2008 安徽师范大学学报 **31** 326]

[12]

Li P, Fang J H, Pang T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4361

[13]

Chen X W, Liu C, Mei F X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3180

[14]

Liu C, Liu S X, Mei F X, Guo Y X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 856

Noether symmetry and the Hojman conserved quantity of the Kepler equation^{*}

Gu Shu-Long^{1)2)†} Zhang Hong-Bin²⁾

1) (*Department of Physics, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing 211171, China*)

2) (*Department of Science and Technology, Chaohu College, Chaohu 238000, China*)

(Received 5 February 2009; revised manuscript received 27 May 2009)

Abstract

The Noether symmetry and the Hojman conserved quantities of the Kepler equation are studied. The determining equations of Noether symmetry for the system are given. A theorem asserting that the Noether symmetry for the system leads to the Hojman conserved quantity is presented.

Keywords: Kepler equation, Noether symmetry, Hojman conserved quantity

PACC: 0320

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872037).

[†] E-mail: gs12142@sohu.com