

二阶非线性耦合动力学系统守恒量的扩展 Prelle-Singer 求法与对称性研究

楼智美[†]

(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2009 年 3 月 13 日收到; 2009 年 6 月 23 日收到修改稿)

将扩展 Prelle-Singer 法(扩展 P-S 法)用于求 $\ddot{x} = \phi_1(x, y)$, $\ddot{y} = \phi_2(x, y)$ 类型的二阶非线性耦合动力学系统的守恒量, 得到了积分乘子满足的微分方程与守恒量的一般形式, 并讨论所得守恒量的 Noether 对称性与 Lie 对称性. 最后用扩展 P-S 法求得了四次非谐振子系统的两个守恒量, 并讨论了系统的对称性.

关键词: 扩展 Prelle-Singer 法, 二阶非线性耦合动力学系统, 守恒量, 对称性

PACC: 0320, 0230

1. 引 言

已知力学系统的 Lagrange 函数可以通过 Lagrange 方程求得系统的运动微分方程, 且系统的运动微分方程往往是二阶非线性耦合方程, 如中心力场问题、非中心力场问题和耦合谐振子等问题. 寻求力学系统的守恒量一直是力学、物理学、数学研究者关注的问题, 长期以来, 寻找力学系统的守恒量有多种方法, 如 Noether 对称性法^[1-5]、Lie 对称性法^[5-7]、Mei 对称性法^[8-10]、Ermakov 方法^[11-13]、Poisson 括号法^[14-17]、直接积分法^[18-22]. 用 Noether 对称性法、Lie 对称性法和 Mei 对称性法求守恒量都要用到群的无限小变换, 理论性强且比较抽象. Ermakov 方法只能求能表示成 Ermakov 形式系统的守恒量. Poisson 括号法只能求线性耦合系统的守恒量. 直接积分法用到 1-形式微分式比较多, 且不相互独立, 导致用到的积分乘子也比较多(比扩展 P-S 法多 2 个积分乘子). 近几年, 数学家致力于研究用 Prelle-Singer 法(P-S 法)求微分方程的第一积分(守恒量)^[23-29]. 1983 年, Prelle 和 Singer^[23]提出了一种根据组成解的基本函数求得一阶微分方程解的有效方法(简称 P-S 法), 其优点是只要一阶微分方程存在基本函数组成的解, 则 P-S 法一定能找到其解和第一积分. P-S 法求第一积分的基本思路是先假

设系统存在第一积分 I (守恒量), 然后用几个积分乘子 R, S (未知函数)去乘以恒为零的 1-形式微分式, 通过比较系数法求得积分乘子 R, S , 从而求得第一积分(守恒量). Guha 等^[24]将 P-S 法进行扩展(扩展 P-S 法)并应用于求解二阶及二阶以上的相互耦合的微分方程组的第一积分. 而力学系统中出现的多为二阶非线性耦合的微分方程, 因此, 扩展 P-S 法可以用于求力学系统的守恒量. 扩展 P-S 法理论简洁直观, 便于掌握, 便于应用.

许多力学系统的运动微分方程可以写成 $\ddot{x} = \phi_1(x, y)$, $\ddot{y} = \phi_2(x, y)$ (不含广义速度 $\dot{x}, \dot{y}$). 本文将扩展 P-S 法应用于求二阶非线性耦合微分方程的守恒量, 得到积分乘子满足的微分方程与守恒量的一般形式, 并讨论所得守恒量的 Noether 对称性与 Lie 对称性. 最后以四次非谐振子系统为例, 用扩展 P-S 法求其守恒量, 得到了能量积分以外的守恒量, 并讨论了系统的对称性.

2. 用扩展 P-S 法求守恒量的基本理论

在平面直角坐标系下, 设力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - V(x, y), \quad (1)$$

其中 m 为力学系统的质量, $V(x, y)$ 为系统的势能.

[†] E-mail: louzhimei@zscas.edu.cn

则其运动微分方程可表示为

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} = \phi_1(x, y), \quad (2a)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial y} = \phi_2(x, y). \quad (2b)$$

显然, $\phi_{1x} = \phi_{1y} = 0, \phi_{2x} = \phi_{2y} = 0$, 这里的下标 $\dot{x}, \dot{y}$ 表示 ϕ_1, ϕ_2 分别对 $\dot{x}, \dot{y}$ 的偏导 (本文下同). 设此力学系统存在守恒量 $I = I(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$, 则

$$\begin{aligned} dI &= I_t dt + I_x dx + I_y dy \\ &+ I_{\dot{x}} d\dot{x} + I_{\dot{y}} d\dot{y} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

利用 4 个独立且恒为 0 的 1-形式微分式: $dx - \dot{x}dt$, $dy - \dot{y}dt$, $d\dot{x} - \phi_1 dt$, $d\dot{y} - \phi_2 dt$. 用积分乘子 $R_1 = R_1(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), R_2 = R_2(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), S_1 = S_1(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), S_2 = S_2(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 分别乘以上述 1-形式微分式并求和, 则

$$\begin{aligned} S_1(dx - \dot{x}dt) + S_2(dy - \dot{y}dt) \\ + R_1(d\dot{x} - \phi_1 dt) + R_2(d\dot{y} - \phi_2 dt) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

令 (3) 与 (4) 式相等, 并比较式中 $dt, dx, dy, d\dot{x}, d\dot{y}$ 的系数, 得

$$\begin{aligned} I_t &= -(S_1\dot{x} + S_2\dot{y} + R_1\phi_1 + R_2\phi_2), \\ I_x &= S_1, I_y = S_2, I_{\dot{x}} = R_1, I_{\dot{y}} = R_2. \end{aligned} \quad (5)$$

由可积条件

$$\begin{aligned} I_{tx} &= I_{xt}, I_{ty} = I_{yt}, \\ I_{tx} &= I_{tx}, I_{ty} = I_{ty}, \\ I_{xy} &= I_{yx}, I_{x\dot{x}} = I_{\dot{x}x}, \\ I_{x\dot{y}} &= I_{\dot{y}x}, I_{xy} = I_{yx}, \\ I_{x\ddot{y}} &= I_{\ddot{y}x}, I_{y\ddot{x}} = I_{\ddot{x}y}, \end{aligned}$$

得

$$\dot{S}_1 = -R_1\phi_{1x} - R_2\phi_{2x}, \quad (6a)$$

$$\dot{S}_2 = -R_1\phi_{1y} - R_2\phi_{2y}, \quad (6b)$$

$$\dot{R}_1 = -S_1, \quad (6c)$$

$$\dot{R}_2 = -S_2, \quad (6d)$$

其中 $\dot{R}_1$ 表示 R_1 对时间的全导数, 即 $\dot{R}_1 = \frac{\partial R_1}{\partial t} +$

$$\dot{x} \frac{\partial R_1}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial R_1}{\partial y} + \phi_1 \frac{\partial R_1}{\partial \dot{x}} + \phi_2 \frac{\partial R_1}{\partial \dot{y}} \text{ (其他类同)}.$$

将 (6c), (6d) 式分别对时间求导一次, 并利用 (6a), (6b) 式可得关于 R_1, R_2 的二阶耦合变系数微分方程组

$$\ddot{R}_1 = R_1\phi_{1x} + R_2\phi_{2x}, \quad (7a)$$

$$\ddot{R}_2 = R_1\phi_{1y} + R_2\phi_{2y}. \quad (7b)$$

事实上, 方程 (7) 不封闭, 无法求得其通解, 只能根据研究问题的特征 (是否为自治系统、Lagrange 函数的形式等) 先假设 R_1, R_2 的拟解, 如自治系统一般可假设 R_1, R_2 不显含时间 t , 形如

$$\begin{aligned} R_1 &= a_1(x, y)\dot{x} + b_1(x, y)\dot{y}, \\ R_2 &= a_2(x, y)\dot{x} + b_2(x, y)\dot{y}. \end{aligned} \quad (8)$$

将 R_1, R_2 及 $\ddot{R}_1, \ddot{R}_2$ 联同 (2) 式代入 (7) 式, 并比较等式两边速度项 $\dot{x}^m \dot{y}^n$ (m, n 为非负整数) 的系数, 可得一组 a_1, b_1, a_2, b_2 关于 x, y 的偏微分方程组

$$\begin{aligned} a_{1xx} &= 0, b_{1yy} = 0, 2a_{1xy} + b_{1xx} = 0, \\ 2b_{1xy} + a_{1yy} &= 0, \\ (\phi_1 a_1 + \phi_2 b_1)_x + 2a_{1x}\phi_1 + (a_{1y} + b_{1x})\phi_2 \\ &= \phi_{1x}a_1 + \phi_{2x}a_2, \\ (\phi_1 a_1 + \phi_2 b_1)_y + 2b_{1y}\phi_2 + (a_{1y} + b_{1x})\phi_1 \\ &= \phi_{1y}b_1 + \phi_{2y}b_2, \\ a_{2xx} &= 0, b_{2yy} = 0, \\ 2a_{2xy} + b_{2xx} &= 0, 2b_{2xy} + a_{2yy} = 0, \\ (\phi_1 a_2 + \phi_2 b_2)_x + 2a_{2x}\phi_1 + (a_{2y} + b_{2x})\phi_2 \\ &= \phi_{1y}a_1 + \phi_{2y}a_2, \\ (\phi_1 a_2 + \phi_2 b_2)_y + 2b_{2y}\phi_2 + (a_{2y} + b_{2x})\phi_1 \\ &= \phi_{1y}b_1 + \phi_{2y}b_2. \end{aligned} \quad (9)$$

先通过观察 (9) 式并联合 (2) 式, 进一步假设 a_1, b_1, a_2, b_2 是常数或是关于 x^2, y^2, xy 等简单项的拟解, 将 a_1, b_1, a_2, b_2 的拟解代入 (9) 式就可解得几组 a_1, b_1, a_2, b_2 的特殊解, 将 a_1, b_1, a_2, b_2 代入 (8) 式就可解得几组 R_1, R_2 的特殊解. 然后分别将解得的 R_1, R_2 代入 (6c), (6d) 式便可解得 S_1, S_2 . 则守恒量的一般表达式为

$$\begin{aligned} I &= \int [S_1(dx - \dot{x}dt) + S_2(dy - \dot{y}dt) \\ &+ R_1(d\dot{x} - \phi_1 dt) + R_2(d\dot{y} - \phi_2 dt)]. \end{aligned} \quad (10)$$

将求得的每组积分乘子 R_1, R_2, S_1, S_2 分别代入 (10) 式, 并设法将 $S_1(dx - \dot{x}dt) + S_2(dy - \dot{y}dt) + R_1(d\dot{x} - \phi_1 dt) + R_2(d\dot{y} - \phi_2 dt)$ 配成全微分 $dI(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 的形式, 就可直接得到守恒量. 由于 R_1, R_2, S_1, S_2 的解可能有多组, 因此相应的守恒量也可能有多个. 而求守恒量的关键是求得 R_1, R_2 . 本文的第 4 部分中以四次非谐振子为例说明了 P-S 法求守恒量的过程, 并得到了能量积分以外的守恒量.

3. 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

引进群的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \tau_\alpha(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ x^* &= x + \varepsilon \xi_1^\alpha(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ y^* &= y + \varepsilon \xi_2^\alpha(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \end{aligned} \quad (11)$$

其无限小生成元向量为

$$X^{(0)} = \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1^\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2^\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad (12)$$

(12) 式的一次扩展为

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= X^{(0)} + (\dot{\xi}_1^\alpha - \dot{x}\tau_\alpha) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \\ &\quad + (\dot{\xi}_2^\alpha - \dot{y}\tau_\alpha) \frac{\partial}{\partial \dot{y}}, \end{aligned} \quad (13)$$

二次扩展为

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} + (\ddot{\xi}_1^\alpha - \ddot{x}\tau_\alpha - 2\dot{x}\dot{\tau}_\alpha) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} + (\ddot{\xi}_2^\alpha - \ddot{y}\tau_\alpha - 2\dot{y}\dot{\tau}_\alpha) \frac{\partial}{\partial \ddot{y}}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 α 代表守恒量的个数, ε 为无限小参数, $\tau_\alpha, \xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha$ 是与第 α 个守恒量相应的无限小变换的生成元.

由 Lagrange 系统的 Noether 逆定理^[1]知: 如果已知 Lagrange 系统的 α 个线性独立的第一积分(守恒量)(10)式, 那么可由守恒量(10)式找到相应的生成元 $\tau_\alpha, \xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha$, 使无限小变换(11)式为系统的 Noether 对称变换(或 Noether 准对称变换), 即系统具有 Noether 对称性(或 Noether 准对称性).

对于给定的守恒量和 Lagrange 函数, 由下面的(15), (16) 式可确定生成元 $\tau_\alpha, \xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha$, 能使无限小变换(11)式为系统的 Noether 对称变换, 系统具有 Noether 对称性.

$$\begin{aligned} \xi_1^\alpha - \dot{x}\tau_\alpha &= \bar{h}_{11} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{x}} + \bar{h}_{12} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{y}}, \\ \xi_2^\alpha - \dot{y}\tau_\alpha &= \bar{h}_{21} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{x}} + \bar{h}_{22} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{y}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{1}{L} \left[I^\alpha - (\xi_1^\alpha - \dot{x}\tau_\alpha) \right. \\ &\quad \times \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - (\xi_2^\alpha - \dot{y}\tau_\alpha) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \left. \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\bar{h}_{sk}(s=1, 2; k=1, 2)$ 为 Lagrange 函数的 Hess 矩阵的逆矩阵.

如果由下式确定 τ_α , 有

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{1}{L} \left[I^\alpha - (\xi_1^\alpha - \dot{x}\tau_\alpha) \right. \\ &\quad \times \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - (\xi_2^\alpha - \dot{y}\tau_\alpha) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - G^\alpha \left. \right], \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $G^\alpha = G^\alpha(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 为规范函数, 且规范函数

满足 Noether 等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} \tau_\alpha + \frac{\partial L}{\partial x} \xi_1^\alpha + \frac{\partial L}{\partial y} \xi_2^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\xi}_1^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{\xi}_2^\alpha \\ + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} \right) \dot{\tau}_\alpha = -\dot{G}^\alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

则由(15), (17) 式确定的生成元 $\tau_\alpha, \xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha$, 使无限小变换(11)式为系统的 Noether 准对称变换, 系统具有 Noether 准对称性.

根据 Lie 对称性理论^[1], 如果由(15), (16) 式或(15), (17) 式确定的生成元 $\tau_\alpha, \xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha$ 满足下面的 Lie 对称性确定方程

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1^\alpha - \ddot{x}\tau_\alpha - 2\phi_1\dot{\tau}_\alpha &= X^{(1)}(\phi_1), \\ \ddot{\xi}_2^\alpha - \ddot{y}\tau_\alpha - 2\phi_2\dot{\tau}_\alpha &= X^{(1)}(\phi_2), \end{aligned} \quad (19)$$

则说明与守恒量(10)式相应的无限小变换(11)式是 Lie 对称变换, 系统具有 Lie 对称性.

4. 应用举例

以四次非谐振子为例说明 P-S 法求守恒量的过程并讨论系统的对称性. 设四次非谐振子的 Lagrange 函数为^[18]

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 - Ax^2 - Ay^2 \\ &\quad - Cx^4 - Cy^4 - 6Cx^2y^2. \end{aligned} \quad (20)$$

由 Lagrange 方程可得系统运动微分方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{1}{m}(2Ax + 4Cx^3 + 12Cxy^2) \\ &= \phi_1(x, y), \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{1}{m}(2Ay + 4Cy^3 + 12Cyx^2) \\ &= \phi_2(x, y). \end{aligned} \quad (21b)$$

将(21a), (21b) 式代入(7a), (7b) 式, 得

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1 &= \left(-\frac{2A + 12Cx^2 + 12Cy^2}{m} \right) R_1 \\ &\quad + \left(-\frac{24Cxy}{m} \right) R_2, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{R}_2 &= \left(-\frac{24Cxy}{m} \right) R_1 \\ &\quad + \left(-\frac{2A + 12Cy^2 + 12Cx^2}{m} \right) R_2. \end{aligned} \quad (22b)$$

由于系统的 Lagrange 函数不显含时间 t , 且 $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ 只是关于 x, y 的多项式, 故可假设 R_1, R_2 的拟解为

$$R_1 = a_1(x, y)\dot{x} + b_1(x, y)\dot{y},$$

$$R_2 = a_2(x, y)\dot{x} + b_2(x, y)\dot{y}. \quad (23)$$

将(23)式代入(22a), (22b)式可解得二组特殊解(解法如第2节所述)

$$\begin{aligned} R_1^1 &= m\dot{x}, R_2^1 = m\dot{y}, \\ R_1^2 &= m\dot{y}, R_2^2 = m\dot{x}. \end{aligned} \quad (24)$$

将(24)式分别代入(6c), (6d)式, 得

$$\begin{aligned} S_1^1 &= 2Ax + 4Cx^3 + 12Cxy^2, \\ S_2^1 &= 2Ay + 4Cy^3 + 12Cyx^2, \\ S_1^2 &= S_2^2 = 2Ay + 4Cy^3 + 12Cyx^2, \\ S_2^2 &= S_1^1 = 2Ax + 4Cx^3 + 12Cxy^2. \end{aligned} \quad (25)$$

将(24), (25)式分别代入(10)式, 得两守恒量

$$\begin{aligned} I^1 &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + Ax^2 + Ay^2 \\ &\quad + Cx^4 + Cy^4 + 6Cxy^2, \end{aligned} \quad (26a)$$

$$I^2 = m\dot{x}\dot{y} + 2Axy + 4Cxy(x^2 + y^2). \quad (26b)$$

很明显, I^1 代表系统的能量, I^2 代表系统的耦合能. 四次非谐振子系统具有 2 个守恒量, 因此此系统是一可积的系统.

将(20), (26a)式分别代入(15), (16)式, 可解得

$$\tau_1 = -1, \xi_1^1 = 0, \xi_2^1 = 0, \quad (27)$$

说明与守恒量 I^1 相应的无限小变换是 Noether 对称变换.

将(20), (26a)式分别代入(15), (17)与(18)式, 可解得

$$\tau_1 = -1, \xi_1^1 = 0, \xi_2^1 = 0, G^1 = 0. \quad (28)$$

说明与守恒量 I^1 相应的无限小变换也是 Noether 准对称变换. 比较(27)与(28)式知, 与守恒量 I^1 相应的无限小变换是 Noether 对称变换, 一定也是 Noether 准对称变换(规范函数为 0).

将(26b)式代入(15)式可解得

$$\xi_1^2 - \dot{x}\tau_2 = \dot{y}, \xi_2^2 - \dot{y}\tau_2 = \dot{x}. \quad (29)$$

将(20), (26b)和(29)式代入(16)式, 得不到 τ_2 的解析解, 则说明不存在 Noether 对称变换与守恒量 I^2 相对应.

同时考虑(17), (18), (20)及(29)式, 可解得

$$\tau_2 = 0, \xi_1^2 = \dot{y}, \xi_2^2 = \dot{x},$$

$$G^2 = -m\dot{x}\dot{y} + 2Axy + 4Cxy(x^2 + y^2). \quad (30)$$

说明与守恒量 I^2 相应的无限小变换是 Noether 准对称变换, 而不是 Noether 对称变换, 系统具有 Noether 准对称性.

下面讨论系统的 Lie 对称性. 将(27), (30)式分别代入 Lie 对称性的确定方程(19), 并利用(21a), (21b)式, 可以证明无限小生成元(27), (30)式均满足确定方程(19), 说明与守恒量 I^1, I^2 相对应的无限小变换为 Lie 对称变换, 系统具有 Lie 对称性.

由(27)式知, 系统的运动微分方程(21)式对于无限小变换

$$t^* = t - \varepsilon, x^* = x, y^* = y \quad (31)$$

是不变的. 众所周知, 此变换是时间平移变换.

由(30)式知, 系统的运动微分方程(21)对于无限小变换

$$t^* = t, x^* = x + \varepsilon\dot{y}, y^* = y + \varepsilon\dot{x} \quad (30)$$

是不变的. 此变换表示时间不变, 只有空间变换, 且空间变换表现为 x 方向扩张(或收缩)与 y 方向的速度分量 $\dot{y}$ 有关, 而 y 方向的扩张(或收缩)与 x 方向的速度分量 $\dot{x}$ 有关, 即是一种与其垂直速度分量有关的空间变换, 也就反映了系统的耦合性, 从而导致耦合能量守恒.

5. 结 论

本文用扩展 Prolle-Singer 法讨论 $\ddot{x} = \phi_1(x, y), \ddot{y} = \phi_2(x, y)$ 类型二阶非线性耦合动力学系统的守恒量, 得到了 4 个积分乘子满足的微分方程和守恒量的一般形式, 并讨论了所得守恒量的 Noether 对称性与 Lie 对称性. 文中以四次非谐振子系统为例, 用扩展 P-S 法求得了能量积分以外的守恒量(耦合能量). 本文讨论的是二维情形, 如果是三维情形, 则所需的积分乘子有 6 个, 要解 3 个相互耦合的微分方程组, 求解会更困难, 将在后续论文中讨论.

[1] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京: 科学出版社)]

[2] Shang M, Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 2788

[3] Fang J H, Liu Y K, Zhang X N 2008 *Chin. Phys.* **17** 1962

[4] Fu J L, Chen L Q, Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 8

[5] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯]

[6]

[7]

[8]

[9]

[10]

[11]

[12]

[13]

[14]

[15]

[16]

[17]

[18]

2004 物理学报 **53** 5]

Lou Z M 2006 *Chin. Phys.* **15** 891

Lin P, Fang J F, Pang T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4361

Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1560

Fang J H, Ding N, Wang P 2007 *Chin. Phys.* **16** 887

Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

Haas F, Goedert J 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 4083

Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1460 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **54** 1460]

Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1969 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **54** 1969]

Kaushal R S, Gupta S 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 9879

Kaushal R S, Parashar D, Gupta S 1997 *Ann. Phys.* **259** 233

Lou Z M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1182

Lou Z M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2475 (in Chinese) [楼智美 2007 物理学报 **56** 2475]

Annamalai A, Tamizhmani K M 1994 *Nonlinear Math. Phys.* **1** 309

[19]

[20]

[21]

[22]

[23]

[24]

[25]

[26]

[27]

[28]

[29]

Shang M, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1707

Lou Z M, Wang W L 2006 *Chin. Phys.* **15** 895

Ge W K, Mei F X 2001 *Acta Armamentarii* **22** 241 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2001 兵工学报 **22** 241]

Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5041 (in Chinese) [梅凤翔、解加芳、江铁强 2007 物理学报 **56** 5041]

Prelle M J, Singer M F 1983 *Trans. Amer. Math. Soc.* **279** 215

Guha P, Choudhury A G, Khanra B 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 115206

Duarte L G S, Duarte S E S, da Mota L A C, Skea J E F 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 3015

Duarte L G S, Duarte S E S, da Mota L A C 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 1001

Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** L69

Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M 2005 *J. Nonlinear Math. Phys.* **12** 184

Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M 2006 *J. Math. Phys.* **47** 023508

The extended Prelle-Singer method for the conserved quantities of second-ordinary nonlinear coupled dynamics systems and their symmetries

Lou Zhi-Mei[†]

(Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

(Received 13 March 2009; revised manuscript received 23 June 2009)

Abstract

The extended Prelle-Singer method is used to find the conserved quantities of second-ordinary nonlinear coupled dynamics systems such as $\ddot{x} = \phi_1(x, y)$, $\ddot{y} = \phi_2(x, y)$, and the differential equations of integral factors and the general expression of conserved quantities are obtained. The Noether symmetry and Lie symmetry of the systems are also discussed. Finally, two conserved quantities of quartic anharmonic oscillator are obtained by the extended Prelle-Singer method, and the symmetries of this system are discussed.

Keywords: extended Prelle-Singer method, second-ordinary nonlinear coupled dynamics systems, conserved quantity, symmetry

PACC: 0320, 0230

[†] E-mail: louzhimei@zscas.edu.cn