

# 小波变换在 HT-7 Tokamak 磁流体动力学振荡动态 频谱分析中的应用\*

马天鹏<sup>1)†</sup> 胡立群<sup>2)</sup> 陈开云<sup>2)</sup>

1)(北方民族大学基础部,银川 750021)

2)(中国科学院等离子体物理研究所,合肥 230031)

(2009 年 9 月 9 日收到;2009 年 12 月 27 日收到修改稿)

将 Gauss 复小波变换方法成功地应用于 HT-7 Tokamak 磁流体动力学振荡动态频谱分析中. 研究表明,这种方法具有较好的时间分辨率和空间分辨率,比较适用做动态频谱分析. 对典型放电数据的分析结果表明,  $m = 1$  模的振荡频率与等离子体压强梯度有着密切的关系.

**关键词:** 小波变换, 磁流体动力学振荡, 动态频谱

**PACC:** 5270, 5270L

## 1. 引 言

小波变换 (wavelet transform) 是近几十年来发展起来的一种新的时-频分析方法<sup>[1]</sup>. 小波变换的数学基础是 Fourier 变换, 是通过伸缩和平移把待分析的信号分解成一系列子小波, 在此适合于各种应用的子小波是小波变换的基函数<sup>[1,2]</sup>. 小波变换是时间和频率的局域变换<sup>[2]</sup>, 根据小波的这一特性, 我们可以采用逐渐精细的时域或频域步长来聚焦到分析对象的任意细节, 通过伸缩和平移等运算功能对信号进行多尺度细化分析<sup>[1]</sup>. 与传统的 Fourier 变换方法相比, 它有很多的优点. 目前, 小波变换在很多科技领域都得到广泛的应用, 成为科研工作者不可缺少的数学工具之一<sup>[1,2]</sup>.

Tokamak 等离子体中的锯齿振荡是一种典型的非线性磁流体动力学 (MHD) 不稳定性<sup>[3]</sup>. 自 1974 年首次在 ST Tokamak 装置观测到以来<sup>[4]</sup>, 在实验研究和诊断方法、理论解释、数值模拟以及实际应用等方面都得到了巨大发展. 实验表明, 在 Tokamak 等离子体中的锯齿不稳定性对芯部等离子体的温度、密度、电流密度等物理参数的分布形成扮演着非常重要的角色<sup>[5]</sup>, 对等离子体的能量约束和有效

加热是不利的, 需要加以研究和控制, 以便大大提高等离子体芯部粒子和能量约束时间, 增加聚变反应率. 对这种 MHD 振荡研究的一项重要内容就是对其幅值和频率进行分析<sup>[6]</sup>. 本文利用小波变换来分析 HT-7 Tokamak 上 MHD 振荡的动态频谱.

## 2. 小波变换原理

本节简单地介绍小波变换原理, 详细的原理介绍见文献[7]. 设  $\varphi(t) \in L^2(R)$ , 其中  $L^2(R)$  表示平方可积的实数空间, 其 Fourier 变换为  $\hat{\varphi}(\omega)$ , 当  $\hat{\varphi}(\omega)$  满足容许条件  $c_\varphi = \int_R \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$  时, 称  $\varphi(t)$  为一个基本小波或母小波. 将小波母函数  $\varphi(t)$  经伸缩和平移后得

$$\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (1)$$

这里,  $a, b \in R; a \neq 0$  称为一个小波序列, 其中  $a$  为伸缩因子,  $b$  为平移因子. 对于任意函数  $f(t) \in L^2(R)$  的连续小波变换为

$$W_f(a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_R f(t) \overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (2)$$

其逆变换为

\* 宁夏回族自治区自然科学基金 (批准号: NZ0847) 资助的课题.

† E-mail: ma\_tianpeng@163.com

$$f(t) = \frac{1}{C_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db. \quad (3)$$

在实际应用中,连续小波变换必须加以离散化<sup>[7]</sup>. 因此,在连续小波中,考虑函数  $\varphi_{a,b} = |a|^{-1/2} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ , 这里  $b \in R, a \in R_+$ , 且  $a \neq 0, \varphi$  是容许的. 为方便起见,在离散化中,总限制  $a$  只取正值,这样相容性条件就变为  $c_\varphi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\varphi}(\bar{\omega})|}{|\bar{\omega}|} d\bar{\omega} < \infty$ . 通常,把连续小波变换中尺度参数  $a$  和平移参数  $b$  的离散化公式分别取作  $a = a_0^j, b = ka_0^j b_0$ , 这里  $j \in Z$ , 扩展步长  $a_0 \neq 1$  是固定值.

为方便起见,总是假定  $a_0 > 1$ . 所以对应的离散小波函数  $\varphi_{j,k}(t)$  即可写为

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) &= a_0^{-j/2} \varphi\left(\frac{t - ka_0^j b_0}{a_0^j}\right) \\ &= a_0^{-j/2} \varphi(a_0^{-j} t - kb_0), \end{aligned} \quad (4)$$

而离散化的小波系数则可表示为

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{j,k}^*(t) dt = W_f(j, k), \quad (5)$$

其重构公式为

$$f(t) = C \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} C_{j,k} \varphi_{j,k}(t), \quad (6)$$

这里,  $C$  是一个与信号无关的常数.

### 3. 小波变换分析 MHD 振荡动态频谱

图 1 是在低杂波和离子回旋波双波协同 (LHW + IBW) 加热的条件下从等离子体芯部软 X

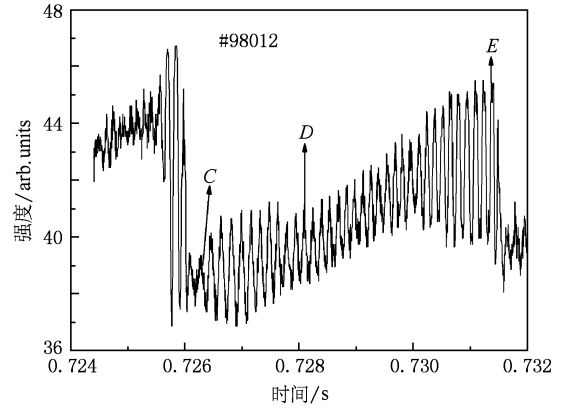


图 1 典型低杂波电流驱动 (LHCD) 和 IBW 条件下中心区软 X 信号的波形

射线信号上观察到锯齿振幅比较强的一炮 (炮号: 98012). 其典型的放电参数如下: 等离子体电流  $I_p \approx 120$  kA, 纵场强度  $B_z(0) \approx 1.8$  T, 中心弦平均电子密度  $N_e(0) \approx 2.5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$  以及低杂波功率  $P_{LH} \approx 400$  kW. 从图中可以看出,在锯齿振荡的一个周期内其前兆模振幅很强,而且在锯齿崩塌后伴有后续模,其振幅也比较强,锯齿上升阶段芯部软 X 射线辐射逐渐增大,表明芯部的加热作用加强;而当锯齿崩塌后芯部的软 X 射线强度急速下降,表明等离子体芯部的能量很快被损失掉. 图 2 是利用 Gauss 复小波变换 (Gaussian complex wavelet transform) 分析了在一个周期内叠加在锯齿上  $m = 1$  模的频率变化. 从图中很明显地看出,在锯齿崩塌前叠加在其上的前兆模频率最高,在锯齿崩塌后,  $m = 1$  模的频率最小. 随着等离子体芯部加热作用加强,在锯齿的上升阶段  $m = 1$  模的频率也在逐渐增大. 从图 1

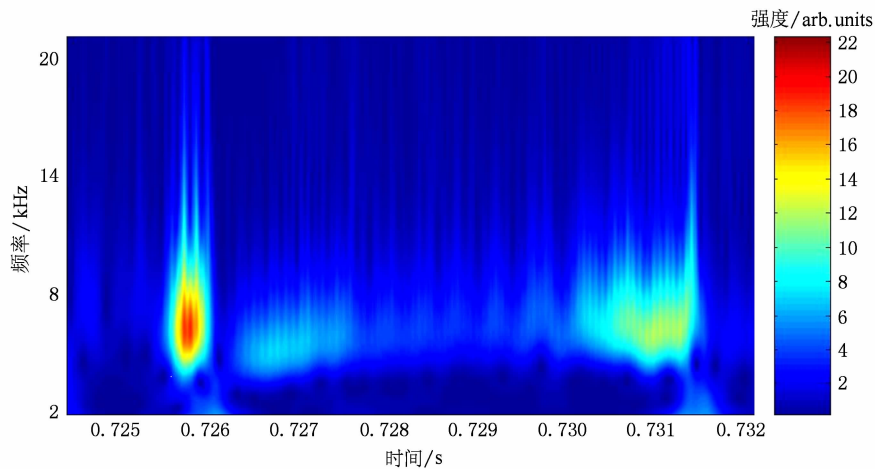


图 2 对图 1 叠加在锯齿上的 MHD 振荡的动态频谱分析 (#98012)

可以看出,在锯齿上升阶段,叠加在其上的中间模振荡幅值与前兆模和后续模相比较小,但其频率却比后续模的频率高,这说明叠加在锯齿上  $m = 1$  模的振荡频率可能与其振幅无关.从图 1 还可以看出,锯齿的后续模和中间模与其前兆模比较,模的增长率比较小,相应地在  $q = 1$  面形成  $m = 1$  的磁岛的增长率也比较小,而前兆模的增长率比较大,相应地在  $q = 1$  面形成  $m = 1$  的磁岛的增长率也比较大.当锯齿崩塌后,热量从  $q = 1$  面向外传输,  $m = 1$  的磁岛的旋转频率减小;再随着中心加热作用的加强,相应  $m = 1$  的磁岛的旋转频率也逐渐增大.这说明  $m = 1$  模的振荡频率可能与中心的加热作用有关.

众所周知,软 X 射线强度及其分布是由等离子体内的温度、密度和杂质情况来决定的<sup>[8]</sup>,与压强及其分布有关.由于实验诊断条件的限制,很难精确地给出等离子体温度和密度的分布及其随时间的演化,而软 X 射线诊断具有较好的时间和空间分辨率.因此,在本文中我们用软 X 射线辐射强度分布的变化来近似代替压强分布的相对变化.图 3 是在一个锯齿周期内不同时刻软 X 射线辐射强度在径向的分布.图中 C、D、E 各点分别表示在锯齿崩塌、上升及前兆阶段软 X 射线辐射强度在径向的分布(如图 1 所示).从图中可以看出,在反转面附近,锯齿崩塌后的 C 点的软 X 射线强度梯度要比锯齿上升阶段的 D 点的软 X 射线强度梯度小,而 D 点的软 X 射线强度梯度要比锯齿崩塌前的 E 点的软 X 射线强度梯度小.也就是说,在一个锯齿周期中,锯齿崩塌前的压强梯度是最大的,锯齿崩塌后的压强梯度是最小的.图 4 是一个锯齿周期中在反转面附近频率与压强梯度的关系图.从图中可以看出,随着压强梯度的增大,频率随着增大.

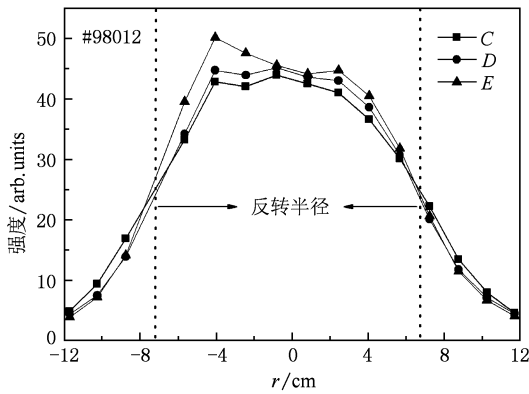


图 3 在一个锯齿周期中不同时刻软 X 射线辐射强度在径向的分布

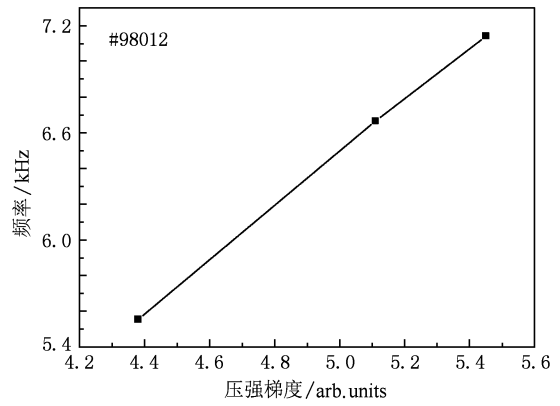


图 4 在一个锯齿周期中频率与压强梯度的关系

图 5 是在 LHCD 下出现 MHD 振荡幅值比较强的一炮(炮号:100649).其典型的放电参数如下:等离子体电流  $I_p \approx 140$  kA,纵场强度  $B_z(0) \approx 1.8$  T,中心弦平均电子密度  $N_e(0) \approx 2.0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$  以及低杂波功率  $P_{\text{LH}} \approx 400$  kW.从图中可以看出,随着等离子体中心加热的减弱,软 X 射线辐射强度逐渐减弱.图 6 是利用 Gauss 复小波变换分析了在此时间范围内 MHD 振荡频率随时间的变化趋势.从图中可以看出,随着软 X 射线辐射强度的减弱,从软 X 射线上观察到的 MHD 频率也随之相应地减弱.而在此过程中,MHD 振荡幅值并未发生较大变化.图 7 是在 MHD 振荡中不同时刻软 X 射线辐射强度在径向的分布图.从图中可以看出,随着软 X 射线辐射强度逐渐减弱,软 X 射线辐射强度在径向分布越趋于平化,相应压强梯度也逐渐变小.图 8 是在 MHD 振荡中小半径 5 cm 附近频率与压强梯度的关系图.从图中可以看出,随着压强梯度的减小,频率随着减小,频率与压强梯度呈近似的线性关系.

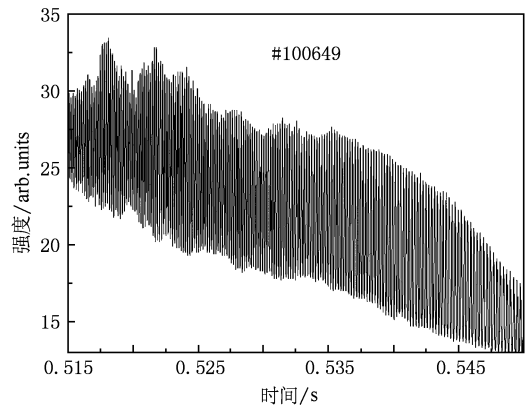


图 5 典型 LHCD 放电条件下中心区软 X 射线信号的波形

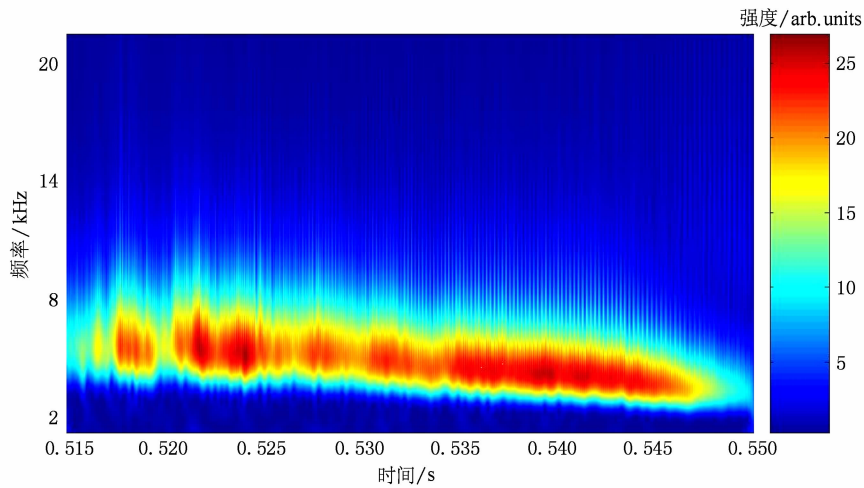


图 6 对图 5 中 MHD 振荡的动态频谱分析(#100649)

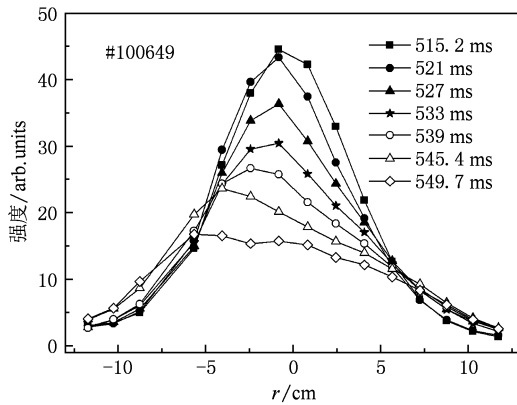


图 7 MHD 振荡中不同时刻软 X 射线辐射强度在径向的分布

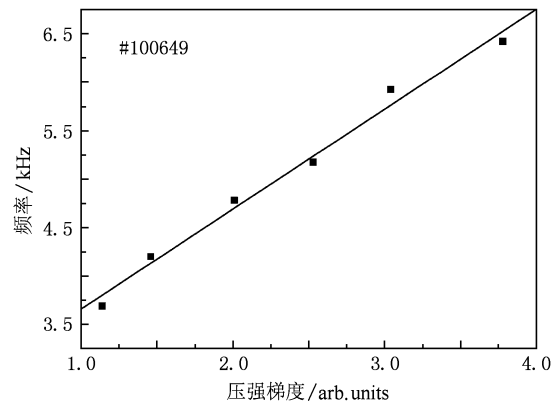


图 8 MHD 振荡中频率与压强梯度的关系

## 4. 结 论

利用 Gauss 复小波变换分析了在 LHW + IBW 放电条件下一个锯齿周期内  $m = 1$  模的频率变化以及在 LHCD 典型放电情况下 MHD 振荡频率随时间的变化趋势. 研究表明, 中心  $m = 1$  模的振荡频率与

其振幅无关, 而与等离子体压强梯度有着密切的关系. 在一个锯齿周期内, 崩塌前的压强梯度最大, 振荡频率也最大; 而崩塌后的压强梯度最小, 振荡频率也最小. 在 MHD 放电条件下, 振荡频率随压强梯度的增大而增大, 振荡频率与压强梯度呈近似的线性关系.

- [1] Deng Y Q, Xing Q R, Lang L Y, Chai L, Wang Q Y, Zhang Z G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5224 (in Chinese) [邓玉强、邢岐荣、郎利影、柴路、王清月、张志刚 2005 物理学报 **54** 5224]
- [2] Zhang M J, He S P, Tan H, Xu W M 2000 *J. Vib. Meas. Diag.* **20** 211 (in Chinese) [张梅军、何世平、谭华、徐文明 2000 振动、测试与诊断 **20** 211]
- [3] Nagayama Y, Yamada M, Park W, Fredrickson E D, Janos A C, McGuire K M, Taylor G 1996 *Phys. Plasmas* **5** 1647
- [4] Von Goeler S, Stodiek W, Sauthoff N 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 1201

- [5] Porcelli F, Boucher D, Rosenbluth M N 1996 *Plasma Phys. Contr. Fusion* **38** 2163
- [6] Zhong F C, Xie J K, Xu Z Z 1998 *Nucl. Fusion Plasma Phys.* **18** 37 (in Chinese) [钟方川、谢纪康、徐至展 1998 核聚变与等离子体物理 **18** 37]
- [7] Zhou W 2006 *Advanced Technique of MATLAB Wavelet Analysis* (Xi'an: Xidian University Press) p5 [周伟 2006 MATLAB 小波分析高级技术 (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 5 页]
- [8] Yamaguchi S, Igami H, Tanaka H, Maekawa T 2004 *Plasma Phys. Contr. Fusion* **46** 1163

# Application of wavelet transform in the dynamic frequency spectrum analysis of magnetohydrodynamics oscillations on HT-7 Tokamak \*

Ma Tian-Peng<sup>1)†</sup> Hu Li-Qun<sup>2)</sup> Chen Kai-Yun<sup>2)</sup>

1) (*Department of Basic Sciences, Beifang Ethnic University, Yinchuan 750021, China*)

2) (*Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*)

(Received 9 September 2009; revised manuscript received 27 December 2009)

## Abstract

Gaussian complex wavelet transform was used in the dynamic frequency spectrum analysis of HT-7 MHD (magneto-hydrodynamic) oscillations. It is shown that this method can provide good temporal resolution and spatial resolution, which is suitable to analyze the dynamic frequency spectrum of MHD oscillations. Typical discharges with sawtooth and MHD instabilities are analyzed with this method. The results show that the oscillation frequency is associated with the plasma pressure gradient.

**Keywords:** wavelet transform, magnetohydrodynamics oscillations, dynamic frequency spectrum

**PACC:** 5270, 5270L

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Ningxia Autonomy Region, China (Grant No. NZ0847).

† E-mail: ma\_tianpeng@163.com