

# (2 + 1) 维孤子系统的多孤子解和分形结构\*

周振春 马松华<sup>†</sup> 方建平 任清褒

(丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2010 年 1 月 28 日收到; 2010 年 2 月 23 日收到修改稿)

利用投射方程法和变量分离法, 得到了 (2 + 1) 维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的新显式精确解. 根据得到的孤波解, 构造出了该系统的多孤子和分形孤子.

**关键词:** 投射方程法, (2 + 1) 维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统, 多孤子, 分形孤子

**PACC:** 0230, 0340, 0290

## 1. 引 言

孤子理论是非线性科学中最重要的一个方面, 它广泛应用于物理学、数学、化学、生物学、气象学、通信工程等自然科学领域, 尤其在物理学中的流体力学、等离子体物理、光学、凝聚态物理等领域发挥着十分重要的作用<sup>[1-3]</sup>. 自 Boiti 等人<sup>[4]</sup> 通过 Bäcklund 变换法发现 Davey-Stewartson 系统的 dromion 钟状平面相干孤子后, 人们对 (2 + 1) 维孤子系统产生了极大的兴趣. 近年来, 许多学者对高维非线性物理模型进行了广泛的研究, 提出了许多相干孤子结构诸如线孤子、半线孤子、紧致子、环孤子、方孤子、盘孤子、折叠子、泡孤子和峰孤子等<sup>[5-16]</sup>. 随着对非线性理论研究的不断深入, 人们总结出了许多求解非线性方程的新方法, 如双线性法、齐次平衡法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、分离变量法、tanh 函数法和投射方程法等<sup>[17-30]</sup>. 分形是自然界存在的一种普遍现象, 大到星系、海岸线、小到细菌群落的生长、植物的生长及视网膜上血管的分布等, 其共同特点是局部与整体具有相似性, 或者说在标度变换下具有相似性的几何形状. 对分形的研究有利于促进对自然的理解. 本文的工作是将投射方程法运用到 (2 + 1) 维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - 3v_x u - 3vu_x &= 0, \\ u_x &= v_y \end{aligned} \quad (1)$$

研究其多孤子和分形孤子局域激发. 方程 (1) 最先由 Boiti 等人导出<sup>[31]</sup>, 并命名该系统为非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统 (ANNV). 文献 [32] 证明了通过适当的变换, ANNV 系统也可以从著名的 Kadomtsev-Petviashvili 方程得到.

## 2. (2 + 1) 维 ANNV 系统的精确解

投射方程法的基本思想是: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_x, u_{x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$u = \sum_{i=0}^N A_i(x) \phi^i [q(x)], \quad (3)$$

其中  $\phi$  满足

$$\phi' = \sigma \phi + \phi^2, \quad (4)$$

这里  $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $A(x)$  和  $q(x)$  为待定的  $x$  的任意函数.  $N$  由通常的截断法来确定. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组  $A(x)$  和  $q(x)$  的约束方程. 通过约束方程求得变量  $A(x)$  和  $q(x)$ , 再根据投射方程 (4) 如下的孤波解

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma \left[ 1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right] & \sigma \neq 0, \\ -\frac{1}{2}\sigma \left[ 1 + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right] & \sigma = 0, \end{cases} \quad (5)$$

就可以确定所求方程的精确解 (省略了周期波解和有理函数解).

根据对方程 (1) 的领头项分析, 可设其形式

\* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6090545), 丽水学院科研基金 (批准号: KZ09005), 丽水学院青年基金 (批准号: QN07015) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

解为

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= f(x, y, t) + g(x, y, t)\phi(q(x, y, t)) \\ &\quad + h(x, y, t)\phi^2(q(x, y, t)), \\ v(x, y, t) &= F(x, y, t) + G(x, y, t)\phi(q(x, y, t)) \\ &\quad + H(x, y, t)\phi^2(q(x, y, t)), \end{aligned} \quad (6)$$

这里,  $f, g, h, F, G, H$  和  $q$  是  $(x, y, t)$  的任意函数, 将(6)式和(4)式代入(1)式, 并按  $\phi$  的同次幂合并, 提取  $\phi^i (i=1, 2, \dots)$  前的系数, 令其等于零, 得到下列方程:

$$-12hq_x H + 24hq_x^3 = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &-3hH_x - 3h_x H - 9gq_x H + 54hq_x^3 \sigma + 18h_x q_x^2 \\ &-12hq_x H \sigma + 18hq_x q_{xx} - 9hq_x G + 6gq_x^3 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &2hq_{xxx} + 6g_x q_x^2 - 9hq_x G \sigma - 3gH_x - 6hq_x F - 3h_x G \\ &+ 6g_x q_x q_{xx} - 6fHq_x - 6gq_x G - 3hG_x + 12gq_x^3 \sigma \\ &+ 30h_x q_x^2 \sigma - 3g_x H + 38hq_x^3 \sigma^2 \\ &+ 30hq_x q_{xx} \sigma + 2hq_t + 6h_{xx} q_x - 9gq_x H \sigma \\ &+ 6h_x q_{xx} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &-6gq_x G \sigma - 3gq_x F + 9gq_x q_{xx} \sigma + 12hq_x q_{xx} \sigma^2 \\ &+ 6h_{xx} q_x \sigma + 6h_x q_{xx} \sigma - 3fGq_x + h_t - 3fH_x \\ &- 3g_x G - 3h_x F - 3gG_x - 6hq_x F \sigma - 6fHq_x \sigma \\ &+ 2hq_{xxx} \sigma + 2hq_t \sigma + 12h_x q_x^2 \sigma^2 + 8hq_x^3 \sigma^3 \\ &+ 7gq_x^3 \sigma^2 + 9g_x q_x^2 \sigma + gq_{xxx} + 3g_x q_{xx} \\ &+ 3g_{xx} q_x + h_{xxx} + gq_t = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &3gq_x q_{xx} \sigma^2 + gq_{xxx} \sigma + g_t + 3g_x q_{xx} \sigma \\ &+ g_{xxx} + 3g_x q_x^2 \sigma^2 - 3fGq_x \sigma - 3fG_x - 3g_x F \\ &+ gq_t \sigma + 3g_{xx} q_x \sigma - 3gq_x F \sigma + gq_x^3 \sigma^3 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$2Hq_y - 2hq_x = 0, \quad (12)$$

$$2Hq_y \sigma - h_x + Gq_y + H_y - gq_x - 2hq_x \sigma = 0, \quad (13)$$

$$G_y + Gq_y \sigma - g_x - gq_x \sigma = 0, \quad (14)$$

由这些方程可求得

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{6(q_x q_{xy} - q_{xx} q_y) q_x^2} \{ q_y q_x^2 q_{yt} + 4q_y q_x^2 q_{xxx} \\ &+ q_{xxx} q_y^2 q_x + q_{xt} q_y^2 q_x + 3q_x^2 q_y^2 q_{xxx} \sigma + 3q_y q_x^3 q_{xy} \sigma \\ &- 4q_y q_{xxx} q_x q_{xy} - q_y q_t q_x q_{xy} + 6q_x^2 q_y q_{xx} q_y \sigma \\ &- q_x^4 q_y q_{xy} \sigma^2 - 3q_x q_{xy} q_{xx} q_y + 2q_x^3 q_y^3 q_{xx} \sigma^2 \\ &- q_y^2 q_t q_{xx} - q_y^2 q_{xy} q_{xy} - 6q_x^3 q_{xy}^2 \sigma \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{6(q_x q_{xy} - q_{xx} q_y) q_x} \{ 4^2 q_x q_{xxx} + q_x^2 q_{yt} + 9q_{xx}^2 q_{xy} \\ &- 9q_{xx} q_x q_{xy} + 3q_x^3 q_{xy} \sigma - 3q_{xx} q_y q_t - 2q_{xxx} q_{xy} q_x \\ &+ q_t q_{xy} q_x - 3q_{xx} q_y q_{xxx} + 3q_x^2 q_y q_{xxx} \sigma + q_x^4 q_{xy} \sigma^2 \end{aligned}$$

$$+ q_{xt} q_y q_x + q_{xxx} q_y q_x + 6q_x^2 q_{xx} q_{xy} \sigma - 6q_y q_{xx}^2 q_x \sigma \},$$

$$g = 2q_{xy} + 2q_y q_x \sigma, \quad h = 2q_x q_y,$$

$$G = 2q_{xx} + 2q_x^2 \sigma, \quad H = 2q_x^2. \quad (15)$$

将(15)式中的  $f, g, h, F, G, H$  代回(7)~(14)式, 得到如下单个方程:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{(q_x q_{xy} - q_{xx} q_y) q_x^2} \{ q_{xxx} q_x^4 q_y q_{xy} \sigma^2 + q_y q_x q_t q_{xy} q_{xxx} \\ &+ 2q_{xy} q_x^2 q_{xx} q_y - 3q_x q_{xy} q_{xx} q_y q_t - 6q_x^3 q_{xx} q_{xy} q_{xy} \sigma \\ &+ 6q_{xxx} q_x^2 2q_{xy} q_{xx} q_y \sigma^2 + 6q_x^2 q_{xx} q_{xy} q_y \sigma - 3q_{xx}^2 q_{xy} q_y q_{xxx} \\ &+ 4q_y q_{xxx}^2 q_x q_{xy} + 9q_x q_{xy} q_{xy} q_{xxx} - 6q_{xxx} q_x^3 q_y^2 \\ &+ 4q_x^2 q_{xy} q_{xy} q_{xxx} + 4q_{xy} q_x^3 q_{xxx} - 9q_{xx} q_x^2 q_{xy} \\ &+ q_x^5 q_{xy} q_{xy} \sigma^2 - q_y q_x^2 q_{yt} q_{xxx} + q_{xy} q_t q_{xy} q_x^2 + q_{xy} q_{xt} q_y q_x^2 \\ &+ q_{xy} q_{xxx} q_y q_x^2 + 2q_{xxx} q_x^3 q_{xxx} q_y - 4q_y q_{xx}^2 q_{xxx} q_{xxx} \\ &- 6q_{xx} q_x^2 q_x q_{xxx} - 2q_{xy} q_x^3 q_{xy} - 2q_{xxx} q_x^3 q_{xy} \\ &+ 3q_x^4 q_{xy} \sigma \} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

仔细观察发现(16)式有如下变量分离形式的特解:

$$q = \chi(x, t) + \varphi(y), \quad (17)$$

其中  $\chi \equiv \chi(x, t)$ ,  $\varphi \equiv \varphi(y)$  是关于  $x, t$  和  $y$  的任意函数.

当  $\sigma \neq 0$ , 得到 ANNV 系统的如下孤波解:

$$u_1 = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ -1 + \tanh \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right]^2 \right\} \chi_x \varphi_y, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{6\chi_x} \{ 2\chi_{xxx} - \chi_x^3 \sigma^2 + 2\chi_t - 6\chi_x \chi_{xx} \sigma \\ &\times \tanh \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] + 3\chi_x^3 \sigma^2 \\ &\times \tanh \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right]^2 \}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$u_2 = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ -1 + \coth \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right]^2 \right\} \chi_x \varphi_y, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{6\chi_x} \{ 2\chi_{xxx} - \chi_x^3 \sigma^2 + 2\chi_t - 6\chi_x \chi_{xx} \sigma \\ &\times \coth \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] + 3\chi_x^3 \sigma^2 \\ &\times \coth \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right]^2 \}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $\chi(x, t), \varphi(y)$  为所示变量的任意函数.

### 3. (2+1) 维 ANNV 系统的多孤子结构

由于(18)~(21)式中都包含有任意函数  $\chi$  和

$\varphi$ ,使得系统的解变的相当丰富. 本文仅是以  $u_1$  (18) 式为例,讨论 ANNV 系统的多孤子和分形孤子局域激发. 为画图清楚起见,令

$$U = u_1 = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ -1 + \tanh \left[ \frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right\}^2 \chi_x \varphi_y. \tag{22}$$

由于(22)式中的  $\chi$  和  $\varphi$  的任意性,不妨取  $\chi$  和  $\varphi$  为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{n=-N}^N 0.4 \operatorname{sech}(x + 5n + t), \\ \varphi &= \sum_{m=-M}^M 0.4 \operatorname{sech}(y + 5m), \end{aligned} \tag{23}$$

$$M = N = 2,$$

于是可以得到如图 1 所示的多孤子结构 (取  $\sigma = 1, t = 0$ ). 此外,如果取  $\chi$  和  $\varphi$  为如下形式:

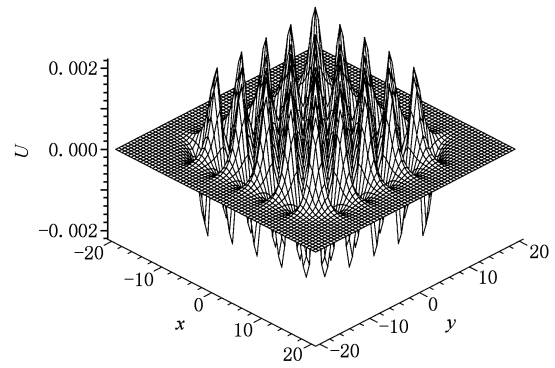


图 1 (22)式利用(23)式得到的多孤子解(取  $\sigma = 1, t = 0$ )

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{n=-N}^N 0.4 \operatorname{sech}(x + 5n + t) \\ &\quad + 0.6 \operatorname{sech}(x + 5n - t) \}, \end{aligned}$$

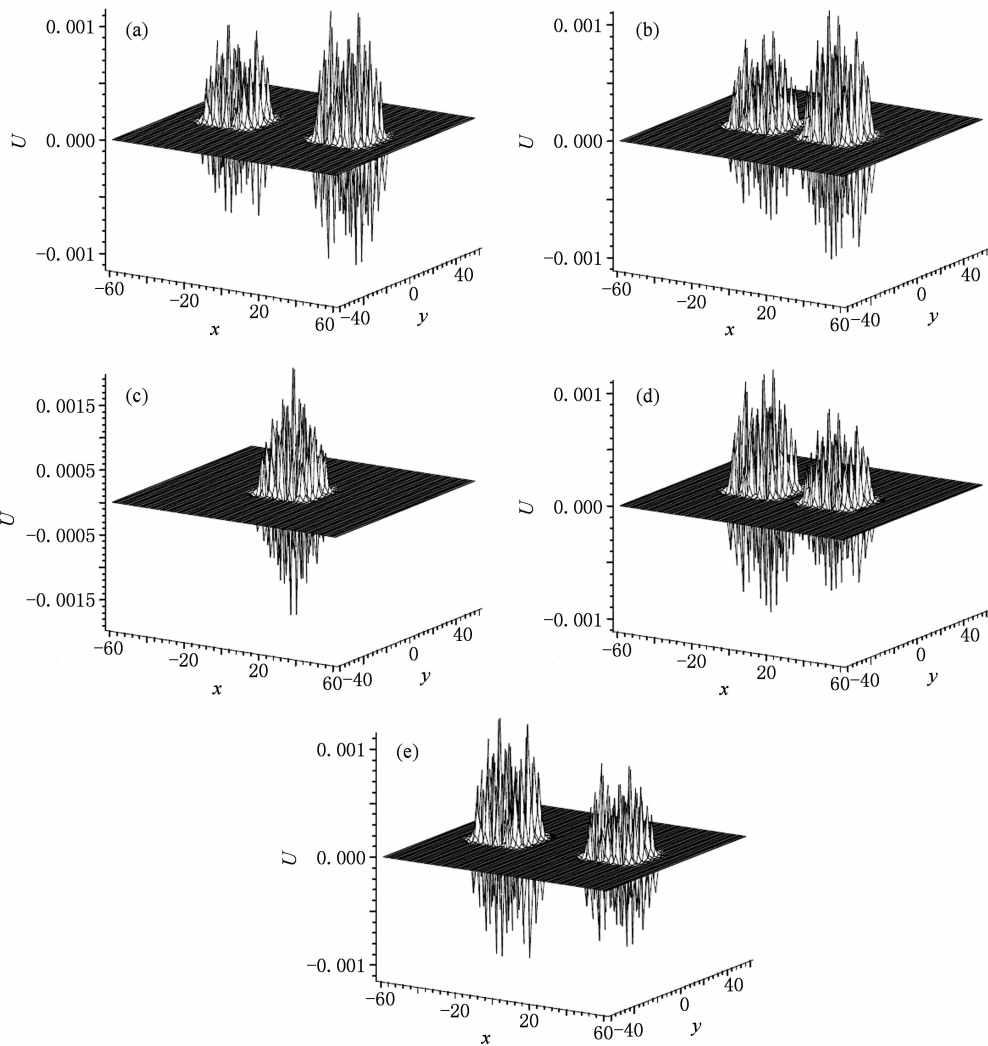


图 2 (22)式利用(24)式得到的两个多孤子相互作用演化侧面图

$$\varphi = \sum_{m=-M}^M 0.4 \operatorname{sech}(y + 5m),$$

$$M = N = 2, \quad (24)$$

则得到如图 2 所示的两个多孤子之间的相互作用时间演化图, 取  $\sigma = 1$ , 时间分别为 (a)  $t = -30$ , (b)  $t = -20$ , (c)  $t = 0$ , (d)  $t = 20$ , (e)  $t = 30$ . 从图中清楚看到, 两个多孤子以相同的速度相向运动, 然后发生碰撞. 碰撞脱开后, 其形状、波幅和运动速度都没有发生改变. 即孤子之间的相互作用具有“各自分开, 互不改变”的特性.

#### 4. (2+1) 维 ANNV 系统的分形行为

以上研究了 ANNV 系统的多孤子局域激发, 下面我们来研究该系统的分形现象.

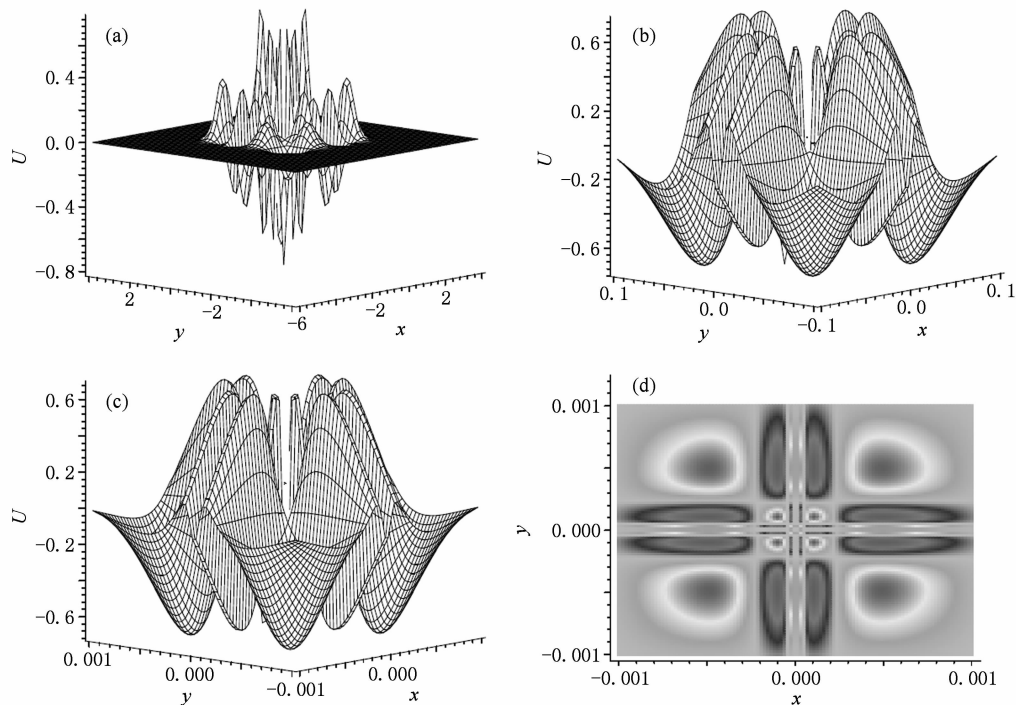


图 3 (a) (22) 式利用 (25) 式得到的局域分形结构; (b) 对应图 (a) 取  $x, y$  的范围为  $x \in [-0.1, 0.1], y \in [-0.1, 0.1]$  时的分形图; (c) 对应图 (a) 取  $x, y$  的范围为  $x \in [-0.001, 0.001], y \in [-0.001, 0.001]$  时的分形图; (d) 对应图 (c) 的分形结构密度斑图

在 (22) 式中, 取  $\chi, \varphi$  为如下形式:

$$\chi = 0.1 + 2 \exp[-(x - ct)((x - ct) + 4 \operatorname{sn}(\ln x^2, 0.8))],$$

$$\varphi = 0.1 + 2 \exp[-y(y + 4 \operatorname{sn}(\ln y^2, 0.8))], \quad (25)$$

式中  $\operatorname{sn}$  是 Jacobian 椭圆正弦函数. 图 3(a) 给出了系统的局域分形孤子结构 (取  $\sigma = 1, c = 1, t = 0$ ). 图 3(b) 表示  $x, y$  在区间  $x \in [-0.1, 0.1], y \in [-0.1, 0.1]$  时的分形结构. 为了更加细致的观察其自相似结构, 将  $x, y$  的范围取得更小, 例如取  $x \in [-0.001, 0.001], y \in [-0.001, 0.001]$ , 发现了与 3(b) 相同的分形图, 如图 3(c) 所示. 实际上,  $x, y$  的范围一直往下取时, 也有相同的结构. 图 3(d) 是对应图 3(c) 的分形结构密度斑图.

#### 5. 结 论

投射方程法是一种非常经典、有效的和成熟的求解非线性演化方程的方法, 其最大的特点是可以有多样不同形式的设解, 使得最终求得的解丰富多彩. 本文利用投射方程法结合变量分离法, 得到了

(2+1) 维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的孤波解, 根据孤波解  $u_1$ , 选取适当的  $\chi$  和  $\varphi$ , 得到了系统的多孤子局域结构, 进一步研究了两个多孤子之间的相互作用, 验证了孤子之间的相互作用具有“各自分开, 互不改变”的特性. 接着, 利用 Jacobian 椭圆正弦函数研究了系统的自相似局域分形结构, 将分形孤子 (图 3(a)) 的中心微小部分放大观察,

发现不管  $x, y$  的尺度如何小,都具有相同的分形图样(3(b), 3(c)),即“在标度变换下具有相似性的几何形状”. 投影方程法在求解非线性演化方程中已经得到了广泛的应用,这里进一步拓展了它的应

用,这种方法对其他高维非线性物理模型的应用有待于进一步研究.

作者对张解放教授的建议和指导表示感谢.

- [1] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601
- [3] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [4] Boiti M, Leon J J P, Manna M, Pempinelli F 1988 *Phys. Lett. A* **132** 432
- [5] Zhang J F, Zheng C L, Fang J P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 448
- [6] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [7] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113
- [8] Radha R, Lakshmanan M 1991 *Phys. Lett. A* **197** 7
- [9] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen A* **28** 7227
- [10] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [11] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [12] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 0483 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 0483]
- [13] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [14] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [15] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [16] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [17] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [18] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487
- [19] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 473
- [20] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 0620]
- [21] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch.* **61a** 249
- [22] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1352
- [23] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 121
- [24] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [25] Zhang D J 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **18** 31
- [26] Zhang D J 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1333
- [27] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [28] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [29] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [30] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]
- [31] M Boiti, J J P Leon, M Manan, F Pempinelli 1986 *Inverse Problems* **2** 271
- [32] J Hietarinta 1990 *Phys. Lett. A* **149** 133

## Multi-soliton solutions and fractal structures in a $(2+1)$ -dimensional soliton system

Zhou Zhen-Chun Ma Song-Hua<sup>†</sup> Fang Jian-Ping Ren Qing-Bao

(*Department of Physics, Lishui University, Lishui 323000, China*)

(Received 28 January 2010; revised manuscript received 23 February 2010)

### Abstract

By the projective equation approach and the variable separation method, a series of excitations of the  $(2+1)$ -dimensional asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system is derived. Based on the derived solitary wave excitation, we obtain multi solitons and fractal solitons of the system.

**Keywords:** projective equation approach, ANNV system, multi solitons, fractal solitons

**PACC:** 0230, 0340, 0290

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant Nos. Y604106, Y6090545); the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University (Grant No. KZ09005) the Young People Foundation of Lishui University (Grant No. ON07015).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn