第 59 卷 第 11 期 2010 年 11 月
1000-3290/2010/59(11)/7552-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 11, November, 2010
©2010 Chin. Phys. Soc.

Appell 方程 Mei 对称性导致的一种新型守恒量*

贾利群[1)†] 解银丽[1)] 张耀宇[2)] 崔金超[1)] 杨新芳[1)]

1)(江南大学理学院,无锡 214122)

2)(平顶山学院电气信息工程学院,平顶山 467002)

(2010 年 1 月 30 日收到;2010 年 2 月 23 日收到修改稿)

研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性导致的一种新型守恒量. 首先,给出完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据. 其次,得到用 Appell 函数表示的完整系统 Appell 方程 Mei 对称性导致的一种新型守恒量. 最后,举例说明由所得结果可找到新的守恒量.

关键词: Appell 方程, Mei 对称性, 新型守恒量

PACC: 0320

1. 引 言

1918 年,Noether 揭示了对称性与守恒量间的潜在关系[1]. 但是,直到 20 世纪 70 年代,分析力学界才开始认识到 Noether 理论的科学价值. 对称性与守恒量的研究从此蓬勃发展[2—10]. 2000 年,Mei 提出了力学系统中的动力学函数经历无限小变换后仍满足原方程的一种对称性[11],人们普遍称之为 Mei 对称性. 2000 到 2007 年间,Mei 对称性的研究成果集中反映在梅凤翔的专著[12]和国内众多学者的研究成果[13]中. 2008 年以来,还有很多学者继续对 Mei 对称性进行研究[14—21]. 但是,迄今为止,作为分析力学理论中三大力学体系之一的 Appell 方程的对称性研究成果甚少. Mei 首先由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了 Noether 守恒量[22];李仁杰等由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了变质量完整系统的守恒量[23];罗绍凯由形式不变性分别通过 Noether 对称性和 Lie 对称性间接得到了转动相对论完整系统 Appell 方程的守恒量[24]. 上述研究为寻找 Appell 方程的守恒量提供了一种方法,但却无法得到用 Appell 函数直接表示的守恒量. 文献[25]给出了用 Appell 函数直接表示的力学系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量, 文献[26]研究了用 Appell 函数直接表示的 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量. 本文研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性导致的一种新型守恒量.

2. 完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性判据

完整力学系统的 Appell 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

方程(1)中 $S = S(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的加速度能量, $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为广义力. 利用方程(1)可解出所有广义加速度

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{3}$$

其中, ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小变换生成元. 本文采用 Einstein 求和约定. 引进无限小变换生成元向量以及它的一次扩展和二次扩展

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{4}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s \frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{5}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10572021),江南大学预研基金(批准号: 2008LYY011)资助的课题.

† E-mail: jlq0000@163.com

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right) - \ddot{q}_s\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}. \tag{6}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} + \dot{\alpha}_s\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}. \tag{7}$$

由(3)式可得

$$\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}q_s + \varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = \ddot{q}_s + \varepsilon[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

假设在经历无限小变换(3)后,系统的动力学函数 S 和 Q_s 分别变为 S^* 和 Q_s^*,将 S^* 和 Q_s^* 在$(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$处作 Taylor 级数展开后可得

$$S^* = S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(2)}(S) + O(\varepsilon^2), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Q_s^* &= Q_s^*\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$
$$(s = 1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

定义　如果用经无限小变换(3)变换后的动力学函数 S^* 和 Q_s^* 代替变换前的动力学函数 S 和 Q_s,系统的 Appell 方程(1)的形式保持不变,即

$$\frac{\partial S^*}{\partial\ddot{q}_s} = Q_s^*\quad(s = 1,2,\cdots,n), \tag{11}$$

则这种对称性称为完整系统 Appell 方程(1)的 Mei 对称性.

将(9),(10)式代入(11)式,忽略 ε^2 以上的高阶小项,并利用方程(1)可得

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}[X^{(2)}(S)] - X^{(1)}(Q_s) = 0, \tag{12}$$

方程(12)称为 Appell 方程 Mei 对称性的判据方程.于是,有

判据　对于完整系统的 Appell 方程(1),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程(12)成立,则 Appell 方程(1)在无限小变换(3)下的不变性,称为完整系统 Appell 方程(1)的 Mei 对称性.

3. 完整系统 Appell 方程 Mei 对称性导致的新型守恒量

命题　如果完整系统 Appell 方程(1)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G_X = G_X(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下新型结构方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}G_X}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s E_s[X^{(2)}(S)] \\ &+ [X^{(1)}(Q_s)]\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

则完整系统 Appell 方程(1)的 Mei 对称性导致的新型守恒量为

$$I_X = X^{(2)}(S) - \frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s + G_X = \text{const}. \tag{14}$$

证明　利用(7)式,有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_X}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t} \\ &\quad - \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}G_X}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}G_X}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s E_s[X^{(2)}(S)] \\ &\quad + \frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

注意到新型结构方程(13)和 Mei 对称性的判据方程(12),则有

$$\frac{\mathrm{d}I_X}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s} - X^{(1)}(Q_s)\right]\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t} = 0.$$

证毕.

文献[27]中完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和守恒量分别为

$$\begin{aligned} &X^{(2)}(S)\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t} + X^{(1)}[X^{(2)}(S)] + (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ &\times E_s[X^{(2)}(S)] + \xi_0[X^{(1)}(Q_s)]\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}G_M}{\mathrm{d}t} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} I_M &= \xi_0 X^{(2)}(S) + \frac{\partial X^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_M \\ &= \text{const}. \end{aligned} \tag{16}$$

显然,完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的新型结构方程和新型守恒量形式上更加简洁.

4. 算　　例

完整系统的 Appell 函数和广义力分别为

$$S = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2) + \ddot{q}_1 q_2 + \ddot{q}_2 q_1 + t, \tag{17}$$

$$Q_1 = Q_2 = 0. \tag{18}$$

试研究系统的 Mei 对称性及其导致的新型守恒量.

首先,研究完整系统 Appell 方程的 Mei 对称

性.将(17),(18)式代入方程(1)得

$$\ddot{q}_1 + q_2 = 0, \ddot{q}_2 + q_1 = 0. \tag{19}$$

注意到方程(19),利用(4),(5)和(6)式做计算得

$$X^{(2)}(S) = \xi_0 + \xi_1 \ddot{q}_2 + \xi_2 \ddot{q}_1 . \tag{20}$$

判据方程(12)给出

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \ddot{q}_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \ddot{q}_1}\ddot{q}_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial \ddot{q}_1}\ddot{q}_1 + \xi_2 = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \ddot{q}_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \ddot{q}_2}\ddot{q}_2 + \xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial \ddot{q}_2}\ddot{q}_1 = 0 . \tag{22}$$

由方程(21)和(22)可找到 Mei 对称的生成元

$$\xi_0 = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \ \xi_1 = \xi_2 = 0 . \tag{23}$$

因此,系统具有 Mei 对称性.

下面,研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性直接导致的新型守恒量.将(23)式代入(20)式得

$$X^{(2)}(S) = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X^{(2)}(S) = 0, \tag{25}$$

$$-\dot{q}_s E_s[X^{(2)}(S)] = 0, \tag{26}$$

$$X^{(1)}(Q_1) = X^{(1)}(Q_2) = 0 . \tag{27}$$

将(25),(26),(27)式代入新型结构方程(13),并注意到方程(19),可得

$$G_X = 0 . \tag{28}$$

故由(14)式可得

$$I_X = -\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 = \text{const} . \tag{29}$$

值得注意的是:对生成元(23)式,由文献[25]给出的结构方程(15)可知,尽管系统具有 Mei 对称性,但却不能得到 Mei 守恒量.

5. 结 论

本文给出了完整系统 Appell 方程 Mei 对称性导致的新型结构方程和新型守恒量.它不仅形式比已找到的完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程(15)和 Mei 守恒量(16)式更加简洁,而且还可找到新的守恒量.因此,本文的结果发展和完善了约束力学系统 Mei 对称性与 Mei 守恒量理论,可以推广到非完整约束力学系统等领域.

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **KI, II** 235

[2] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[3] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[4] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[5] Chen X W, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[6] Zhang Y, Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[7] Guo Y X, Jiang L Y, Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181

[8] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1

[9] Wu H B 2005 *Chin. Phys.* **14** 452

[10] Li Y C, Jing H X, Xia L L, Wang J, Hou Q B 2007 *Chin. Phys.* **16** 2154

[11] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[12] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[13] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]

[14] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1560

[15] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese)[葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[16] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese)[蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[17] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1312

[18] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.*. **58** 3617 (in Chinese)[方建会 2009 物理学报 **58** 3617]

[19] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1731

[20] Yang X F, Jia L Q, Cui J C, Luo S K 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030305

[21] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030304

[22] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[23] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese)[李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[24] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[25] Jia L Q, Xie J F, Zheng S W 2008 *Chin. Phys.* B **17** 0017

[26] Cui J C, Jia L Q, Yang X F 2009 *J. Henan Norm Univ.* **37**(2) 70 (in Chinese)[崔金超、贾利群、杨新芳 2009 河南师范大学学报 **37**(2) 70]

[27] Jia L Q, Zhang Y Y, Cui J C 2009 *Yunnan Univ.* **31** 52 (in Chinese)[贾利群、张耀宇、崔金超 2009 云南大学学报 **31** 52]

A new type of conserved quantity induced by Mei symmetry of appell equation*

Jia Li-Qun[1)†] Xie Yin-Li[1)] Zhang Yao-Yu[2)] Cui Jin-Chao[1)] Yang Xin-Fang[1)]

1)(*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

2)(*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

(Received 30 January 2010; revised manuscript received 23 February 2010)

Abstract

A New type of conserved quantity induced by Mei symmetry of Appell equations for a holonomic system is studied. The definition and the criterion of Mei symmetry of Appell equations for a holonomic system are given. A new type of conserved quantity induced by Mei symmetry of Appell equations expressed by Appell functions is obtained. And an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Appell equation, Mei symmetry, new type of conserved quantity

PACC: 0320

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021), the Preparatory Research Foundation of Jiangnan University, China (Grant No. 2008LYY011).

† E-mail: jlq0000@163.com