

mKdV 方程的双扭结单孤子及其稳定性研究*

石玉仁[†] 张 娟 杨红娟 段文山

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2010 年 2 月 8 日收到; 2010 年 3 月 15 日收到修改稿)

基于双曲函数法的思想, 通过选择新的展开函数, 得到了 modified Korteweg-de Vries (mKdV) 方程的几类精确解, 其中一类为具有扭结—反扭结状结构的双扭结单孤子解. 在不同的极限情况下, 该解分别退化为 mKdV 方程的扭结状或钟状孤波解. 文中对双扭结型孤子解的稳定性进行了数值研究, 结果表明: 在长波和短波简谐波扰动、钟型孤立波扰动与随机扰动下, 该孤子均稳定.

关键词: mKdV 方程, 双扭结单孤子, 稳定性

PACC: 0340K, 0290

1. 引 言

科学技术中的许多非线性现象, 如流体力学和等离子体中的非线性波动、非线性光学现象、晶格非线性波等, 大都可以用非线性演化方程 (nonlinear evolution equations, NEE) 来描述. 对 NEE 的求解也成为非线性科学的一重要组成部分. 在过去的几十年中, 很多数学家和物理学家提出了许多精巧的方法求解 NEE, 常用的有逆散射法、Bäcklund 变换法、Hirota 双线性算子法、Cole-Hopf 变换、Doubaux 变换法等. 近年来, 很多学者又提出和发展了许多新的方法, 如齐次平衡法^[1-4]、双曲函数法^[5-8]、sine-cosine 法、Jacobi 椭圆函数展开法^[9-11]、同伦分析法^[12-17]等. 这些方法都可以借助计算机代数系统得以部分甚至完全实现, 从而大大提高了工作效率. 但到目前为止, 对 NEE 的求解, 仍没有一个普适的方法.

modified Korteweg-de Vries (mKdV) 方程可作为描述非谐晶格中声波的一个模型方程^[18], 最早由 Miura 引入^[19]. 它也可用来研究尘埃等离子体中的尘埃声孤波^[20], 非线性光学中的波动问题^[21]等. 考虑下列形式的 mKdV 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

其中 α, β 为常数, 分别表示非线性和色散效应. 利用文献[5]中的双曲函数法可以发现: 当 $\alpha\beta > 0$ 时, 方程(1)存在钟状孤立波解; 当 $\alpha\beta < 0$ 时, 它有扭结状孤立波解. 在本文中, 我们重新选择了展开函数, 发现当 $\alpha\beta < 0$ 时, 方程(1)既存在扭结状孤立波解, 也存在钟状孤立波解. 而且, 当 $\alpha\beta < 0$ 时, 方程(1)存在双扭结状单孤立波解. 文中对该类孤立波的稳定性进行了数值研究, 结果表明: 该孤子对于周期性扰动和随机扰动, 均具有很好的稳定性.

2. mKdV 方程的双扭结单孤子解

考虑方程(1)的行波解

$$u(x, t) = \varphi(\xi), \quad \xi = kx - \omega t + x_0, \quad (2)$$

上式中 k 和 ω 为待定常数, 分别为波数和圆频率; 相速度为 $v = \frac{\omega}{k}$; x_0 为任意常数. 此时(1)式变为

$$-\omega\varphi' + \alpha k\varphi^2\varphi' + \beta k^3\varphi''' = 0, \quad (3)$$

其中撇号表示 $\frac{d}{d\xi}$.

引入展开函数

$$f(\xi) = \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(\xi) + (1-p)\sinh(\xi)},$$
$$g(\xi) = \frac{(1-p)\cosh(\xi) + (1+p)\sinh(\xi)}{2r + (1+p)\cosh(\xi) + (1-p)\sinh(\xi)}, \quad (4)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10575082), 教育部科学技术研究重点项目 (批准号: 209128), 西北师范大学科技创新工程 (批准号: NWNU-KJXGC-03-53) 资助的课题.

[†] E-mail: shiy@nwnu.edu.cn.

其中 p, r 为常数. 容易验证, $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 满足下列关系:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= -fg, \\ g'(\xi) &= 1 - g^2 - rf, \\ g^2 &= 1 - 2rf + (r^2 - p)f^2. \end{aligned} \quad (5)$$

容易看出, 文献[5]中的双曲函数法是这里 $p = 1$ 的特例.

设(3)式有解

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 f(\xi) + b_1 g(\xi), \quad (6)$$

其中 a_0, a_1, b_1 为待定常数. 把(6)式代入(3)式并反复利用(5)式, 使得所得方程中仅含 f 和 g 的幂次

项且 g 的幂次不大于 1, 然后令 $f^i g^j (i=0, 1, \dots; j=0, 1)$ 项的系数为零, 得包含所有待定常数的一组超定非线性代数方程组, 通过求解该方程组就能最终得到方程(2)的精确解.

利用上述方法, 得到了下面 3 种情况下方程(1)的解(下面所得解也适合于所选参数是复数的情况, 本文只讨论参数取实数的情况).

$$1) \quad r = 0, a_0 = a_1 = 0, b_1 = \pm k \sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}, \omega = -2k^3\beta.$$

此时得方程(1)的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \pm k \frac{-\frac{6\beta}{\alpha} (1-p) \cosh(kx - \omega t + x_0) + (1+p) \sinh(kx - \omega t + x_0)}{(1+p) \cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p) \sinh(kx - \omega t + x_0)} \\ &= \pm k \sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha} \frac{e^{2(kx - \omega t + x_0)} - p}{e^{2(kx - \omega t + x_0)} + p}}, \end{aligned}$$

其中 p, k 为任意常数. 若要求该解为实函数, 则它仅存在于 $\alpha\beta < 0$ 的情况下. 理论分析表明, 当 $p < 0$ 时该解存在间断点; 当 $p = 0$ 时, 该解为平凡解(常数); 当 $p > 0$ 时, 该解为 mKdV 方程的扭结型孤立波解. 如当 $p = 1$ 时, 得

$$u(x, t) = \pm k \sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha} \tanh(kx - \omega t + x_0)}, \quad (7)$$

这是大家熟知的 mKdV 方程的扭结型孤立波解.

$$2) \quad a_0 = 0, a_1 = \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{3(p-r^2)\beta}{2\alpha}}, b_1 = \varepsilon_2 k$$

$$\sqrt{-\frac{3\beta}{2\alpha}}, \omega = -\frac{1}{2}k^3\beta.$$

其中 $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1, k$ 为任意常数. 与前面类似, 此时的实函数解仅存在于 $\alpha\beta < 0$ (从而要求 $r^2 \geq p$) 的情况下. 理论分析表明, 当 $r, p \geq 0$ 时, 该解为 mKdV 方程的扭结型孤立波解, 无奇性; 否则解存在间断点.

$$3) \quad b_1 = 0, a_0 = \pm kr \sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha(p-r^2)}}, a_1 = \pm k$$

$$\sqrt{\frac{6\beta(p-r^2)}{\alpha}}, \omega = \frac{k^3\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)}.$$

此时方程(1)的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \pm kr \sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha(p-r^2)}} \pm k \sqrt{\frac{6\beta(p-r^2)}{\alpha}} \frac{2}{2r + (1+p) \cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p) \sinh(kx - \omega t + x_0)} \\ &= \pm kr \sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha(p-r^2)}} \pm k \sqrt{\frac{6\beta(p-r^2)}{\alpha}} \frac{2}{2r + pe^{-(kx - \omega t + x_0)} + e^{kx - \omega t + x_0}}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 k 为任意常数. 值得说明的是, 上述解既存在于 $\alpha\beta < 0$ (要求 $r^2 > p$) 的情况下, 也存在于 $\alpha\beta > 0$ (要求 $r^2 < p$) 的情况下. 考虑不同参数情况下解的特征, 分析结果如表 1 所示.

图 1(a)和(b)分别显示了 $\alpha = 6, \beta = -1, k = 1, r = 1, x_0 = 0, t = 0, p = 0$ 与 $p = 0.9$ 两种情况下(8)式(取“+”号)的图像. 图 1(a)为扭结型孤立波; 图 1(b)为钟型孤立波, 表明在 $\alpha\beta < 0$ 的情况下, mKdV 方

程(1)既存在扭结型孤立波解, 也存在钟型孤立波解.

进一步, 发现: 在 $p \rightarrow 0^+$ 的过程中, 钟型孤立波逐渐演变为双扭结型孤立波. 图 2(a)和(b)分别显示了 $\alpha = 6, \beta = -1, k = 1, r = 1, x_0 = 0, t = 0, p = 10^{-6}$ 时(8)式(取“+”号) $u(x, t)$ 与 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 的图像. 注意到 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 的图像有 2 个反向波峰, 可称其为“反向双峰孤立子”. 由于这里考虑的是行波解, 波在传

播过程中,波形不发生变化,所以两波峰之间的距离保持不变.

表1 不同参数情形下(8)式表示的解的特征

	$\alpha\beta < 0 (r^2 > p)$	$\alpha\beta > 0 (r^2 < p)$
$r > 0, p > 0$	孤立波, 无奇点	钟型孤立波, 无奇点
$r > 0, p = 0$	扭结型孤立波, 无奇点	/
$r > 0, p < 0$	有奇点	/
$r < 0, p > 0$	有奇点	钟型孤立波, 无奇点
$r < 0, p = 0$	有奇点	/
$r < 0, p < 0$	有奇点	/
$r = 0, p > 0$	/	钟型孤立波, 无奇点
$r = 0, p = 0$	/	/
$r = 0, p < 0$	有奇点	/

注:/ 表示不存在该情况.

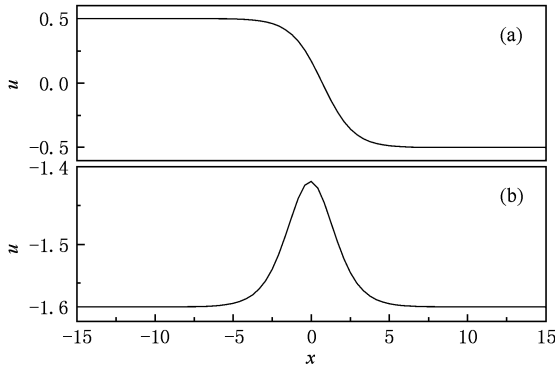


图1 mKdV 方程的扭结型和钟型孤立波解 ($\alpha=6, \beta=-1, k=1, r=1, x_0=0, t=0$) (a) $p=0$; (b) $p=0.9$

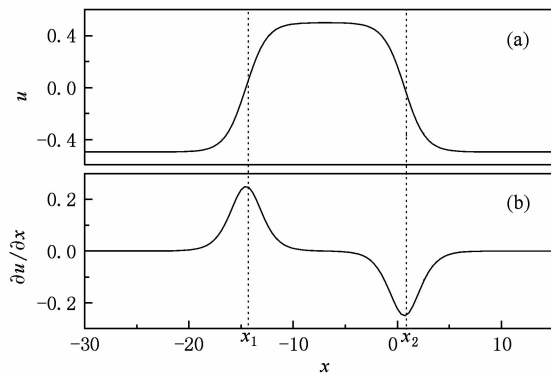


图2 mKdV 方程的双扭结型孤立波解 ($\alpha=6, \beta=-1, k=1, r=1, x_0=0, t=0, p=10^{-6}$)

对图2所示的双扭结型孤立波,容易得

$$u(\infty, t) = \pm kr \sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha(p-r^2)}}, \quad (0 < p < r^2), \tag{9}$$

这里正负号分别和(8)式中正负号相对应. 波的振

幅 A 和波宽 W 可分别定义为

$$A = \max_{-\infty < x < +\infty} (|u(x, t) - u(\infty, t)|),$$

$$W = |x_2(t) - x_1(t)|, \tag{10}$$

其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为图2所示位置. 理论计算得有限远极值点为 $\xi = kx - \omega t + x_0 = \frac{1}{2} \ln p$, 峰值为

$$u = \pm kr \sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha(p-r^2)}} \pm k \sqrt{\frac{6\beta(p-r^2)}{\alpha}} \frac{1}{r + \sqrt{p}}, \tag{11}$$

且有

$$A = \frac{\sqrt{6\beta(p-r^2)}}{r + \sqrt{p}} |k|,$$

$$W = \frac{1}{|k|} \ln \left(\frac{r + \sqrt{8p+r^2} + \sqrt{4p+2r^2+2r\sqrt{8p+r^2}}}{r + \sqrt{8p+r^2} - \sqrt{4p+2r^2+2r\sqrt{8p+r^2}}} \right),$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{k^2\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)}. \tag{12}$$

(12)式表明:波的振幅与波数成正比而波的宽度与波数成反比;波的相速度正比于波数的平方,说明振幅大的波传播速度也快. 这一点和 KdV 方程所描述的孤立子有着类似的性质. 从(12)式还可以看出,该孤子既可以是向右传播的($\beta < 0, \alpha > 0$ 时),也可以为向左传播的($\beta > 0, \alpha < 0$ 时). 理论结果表明, p 越小,两波峰之间的距离越大;当 $p \rightarrow 0$ 时, $W \rightarrow +\infty$. 事实上,当 $p = 0$ 时,波已演变为扭结型孤立波.

值得一提的是,文献[22]中曾报道:在水槽中会存在一对反向波峰(通常称为“一对反向孤子”),稳定后,保持相互距离不变,两波峰沿槽长方向运动. 其波形和图2(b)所示非常类似,运动特征也与本文所得结果类似. 所以我们猜测文献[22]中的实验结果,理论上可以解释为 mKdV 方程所描述的双峰孤立子,这一点尚需进行进一步理论探讨. 从下面的数值结果可以看出,该孤子具有很好的稳定性.

3. 解的稳定性研究

设 $u_0 = u_0(x, t)$ 是 mKdV 方程的一个精确解,下面数值研究该解的稳定性. 在初始时刻对 u_0 加一相对很小的扰动 $u'(x, 0) = \varepsilon(x)$, 记 $u(x, t) = u_0(x, t) + u'(x, t)$ 且设 $u(x, t)$ 满足 mKdV 方程(1), 则可通过考察 $u(x, t)$ 随时间的演变而得知 u_0 的稳定性. 数值求解时,采用如下有限差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \alpha \left[\frac{1}{3}(u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \right]^2 \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \beta \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2(\Delta x)^3} = 0, \quad (13)$$

其中 $\Delta x, \Delta t$ 分别为空间和时间方向步长. 该格式为三层显式格式, 截断误差为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$, 条件稳定. 计算第一层时, 采用下列格式启动:

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} + \alpha \left[\frac{1}{3}(u_{j+1}^0 + u_j^0 + u_{j-1}^0) \right]^2 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2\Delta x} + \beta \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2(\Delta x)^3} = 0. \quad (14)$$

本文着重考察 mKdV 方程的双扭结单孤立波解的稳定性, 故取 u_0 为(8)式(取“+”号), 所用方法也适合于考察其他解的稳定性. 数值计算时, 各参数分别取为 $\alpha = 6, \beta = -1, k = 1, x_0 = 0, r = 1, p = 10^{-6}$. 此时波的振幅 $A \approx 1$, 波宽 $W \approx 15.2$, 波速 $v \approx 0.5$, 初始时刻波的峰值位于 $x = \frac{1}{2} \ln p \approx -6.9$ 处.

实际计算在区间 $[-50, 50]$ 上进行, 采用周期性边界条件, 步长取 $\Delta x = 0.05, \Delta t = 2 \times 10^{-5}$. 下面考虑三种初始扰动下解的稳定性.

3.1. 简谐波扰动

当初始扰动为简谐波时, 记

$$\varepsilon(x) = A' \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (15)$$

其中 A' 和 λ 分别是扰动波的振幅和波长. 图 3 显示了 $A' = \frac{1}{50}, \lambda = 10$ 时 $u(x, t)$ 在不同时刻的波形图. 从图中可以看出, 随着时间的演变, 波的扰动始终控制在有限范围内, 说明 mKdV 方程的双扭结型孤立波在长波扰动下是稳定的.

图 4 显示了 $A' = \frac{1}{50}, \lambda = 1$ 时 $u(x, t)$ 在不同时刻的波形图. 从图 4 可以看出, mKdV 方程的双扭结型孤立波对于短波扰动也是稳定的.

3.2. 钟型孤立波扰动

取初始扰动为

$$\varepsilon(x) = A' \operatorname{sech} k'(x + l), \quad (16)$$

其中 A' 为扰动的振幅, 改变 k' 可以改变扰动的宽度, 调节 l 可以改变扰动的位置. 图 5 显示了 $A' = \frac{1}{10}, k' = 1, l = -\frac{1}{2} \ln p$ 时波形的演变. 可以看出, 随着

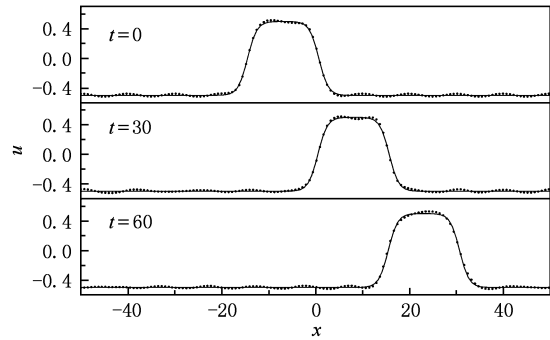


图 3 长波扰动下不同时刻 $u(x, t)$ 的波形 (实线为无扰动时的波形)

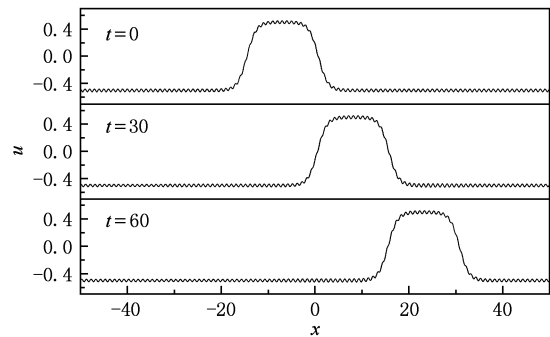


图 4 短波扰动下不同时刻 $u(x, t)$ 的波形图

时间的演变, 初始时刻局域性的钟型扰动逐渐演变为整个周期上的粼粼微波, 表明在这种情况下 mKdV 的双扭结型孤立波仍然是稳定的.

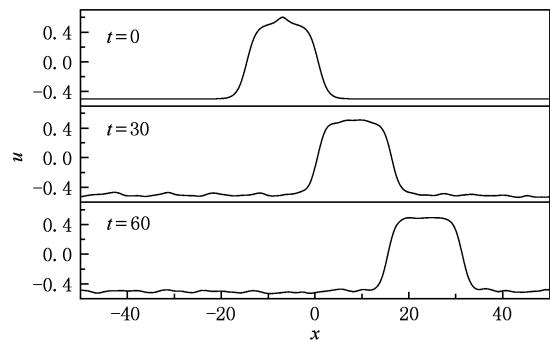


图 5 钟型孤立波扰动下不同时刻 $u(x, t)$ 的波形图

3.3. 随机扰动

设初始时刻节点上的扰动为一随机数, 随机数区间取为 $[-0.02, 0.02]$. 由于孤子的局域性, 故设初始时刻的扰动也限于某个区间, 这里取为

$[-27, 13]$. 图 6 显示了不同时刻的波形,从中可以看出:随着时间的演变,初始时刻的局部扰动逐渐扩散为整个周期上的扰动,但扰动幅度始终局限于有限范围内,表明此时的双扭结孤立波依然稳定.

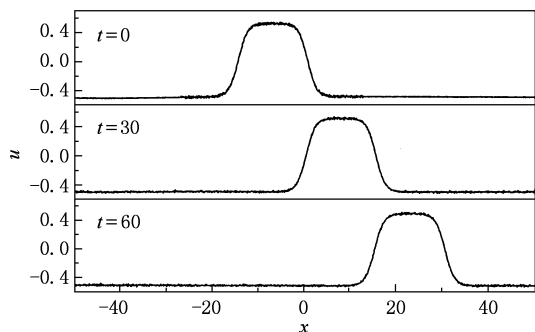


图 6 随机扰动下不同时刻 $u(x, t)$ 的波形图

综上所述, $mKdV$ 方程(1)的双扭结孤立波在各种不同情况的扰动下均具有很强的稳定性.

4. 结 论

本文基于双曲函数展开法思想,通过选择新的展开函数,得到了 $mKdV$ 方程的几类精确解,其中一类为具有扭结一反扭结状结构的双扭结单孤子解.在不同的极限情况下,该解分别退化为 $mKdV$ 方程的扭结状或钟状孤波解.文中对双扭结型孤子解的稳定性进行了数值研究,结果表明,在长波和短波简谐波扰动、钟型孤立波扰动与随机扰动下,该孤子均稳定.对于由其它非线性演化方程描述的物理系统中,是否也存在双扭结型孤立波以及这样的波是否稳定,是个值得研究的问题.

- [1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [2] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett. A* **216** 67
- [3] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
- [4] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
- [5] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Science In China (Series A)* **30** 1103 [张桂成、李志斌、段一士 2000 中国科学(A) **30** 1103]
- [6] Lü K P, Shi Y R, Duan W S, Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]
- [7] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Hong X R, Zhao J B, Yang H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [石玉仁、吕克璞、段文山、洪学仁、赵金保、杨红娟 2003 物理学报 **52** 267]
- [8] Huang D J, Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]
- [9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2001 物理学报 **50** 2068]
- [10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
- [11] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、傅遵涛、刘式适、赵强 2002 物理学报 **51** 718]
- [12] Liao S J, Chen C, Xu H 2006 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [廖世俊、陈晨、徐航 2006 超越摄动: 同伦分析方法导论 (北京: 科学出版社)]
- [13] Liao S J, Pop I. 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** 271
- [14] Shi Y R, Xu X J, Wu Z X, Wang Y H, Yang H J, Duan W S, Lü K P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1555 (in Chinese) [石玉仁、许新建、吴枝喜、汪映海、杨红娟、段文山、吕克璞 2006 物理学报 **55** 1555]
- [15] Yang H J, Shi Y R, Duan W S, Lü K P, 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3064 (in Chinese) [杨红娟、石玉仁、段文山、吕克璞 2007 物理学报 **56** 3064]
- [16] Shi Y R, Wang Y H, Yang H J, Duan W S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6791 (in Chinese) [石玉仁、汪映海、杨红娟、段文山 2007 物理学报 **56** 6791]
- [17] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 67 (in Chinese) [石玉仁、杨红娟 2010 物理学报 **59** 67]
- [18] M Wadati 1973 *J. Phys. Soc. Japan* **34** 1289
- [19] R M Miura 1968 *J. Math. Phys.* **9** 1202
- [20] E F El-Shamy 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **25** 665
- [21] G P Agrawal 1989 *Nonlinear Fibre Optics* (Academic Press, Boston)
- [22] Ni W S, Wei R J 1997 *Solitary Wave in Water Trough, Shanghai Scientific and Technological* (Shanghai: Education Publishing House) (in Chinese) [倪皖荪、魏荣爵 1997 水槽中的孤波 (上海: 上海科技教育出版社)]

Single soliton of double kinks of the mKdV equation and its stability *

Shi Yu-Ren[†] Zhang Juan Yang Hong-Juan Duan Wen-Shan

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 8 February 2010; revised manuscript received 15 March 2010)

Abstract

Based on the idea of the hyperbola function expansion method, some analytical solutions of the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation are obtained by introducing new expansion functions. One of the single soliton solutions has a kink-antikink structure and it reduces to a kink-like solution and bell-like solution under different limitations. The stability of the single soliton solution with double kinks is investigated numerically. The results indicate that the soliton is stable under different disturbances.

Keywords: mKdV equation, single soliton solution with double kinks, stability

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10575082), the Key Project Foundation of the Education Ministry of China (Grant No. 209128), the Natural Science Foundation of Northwest Normal University (Grant No. NWNNU-KJCXGC-03-53).

[†] E-mail: shiyu@nwnu.edu.cn