第 59 卷 第 11 期 2010 年 11 月
1000-3290/2010/59(11)/7575-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 11, November, 2010

量子算符的左逆右逆及其数学性质*

徐世民　张运海　徐兴磊†　李洪奇

（菏泽学院物理系，量子信息与物理计算重点实验室，菏泽　274015）

（2010 年 1 月 30 日收到；2010 年 3 月 4 日收到修改稿）

运用围道积分方法，给出了湮没算符的右逆算符和产生算符的左逆算符；进一步利用湮没算符和产生算符在 Fock 表象中的矩阵形式对算符的左逆算符、右逆算符的数学性质进行了分析.

关键词： 左逆算符，右逆算符，IWOP 技术，矩阵的初等变换

PACC： 0365

1. 引　　言

在量子理论中，算符（方阵也是一种算符）是一个很重要的概念，很多文献[1—7]对算符和逆算符的问题都作过较详细的讨论，但对左逆算符、右逆算符的介绍却很少. 而在量子理论中有一些这样的算符，它们只有左逆算符而无右逆算符（例如产生算符 $\hat{a}^\dagger$），或者只有右逆算符而无左逆算符（例如湮没算符 $\hat{a}$），所以很有必要对左逆算符、右逆算符进行深入的探讨. 本文旨在采用相干态与围道积分方法研究 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的逆算符，并进一步利用湮没算符和产生算符在 Fock 表象中的矩阵形式对右逆、左逆与矩阵的行初等变换、列初等变换的对应关系进行分析.

2. 右逆算符、左逆算符和逆算符

2.1. 右逆算符与左逆算符

在量子理论中有两个重要的算符：湮没算符 $\hat{a}$ 和产生算符 $\hat{a}^\dagger$，它们的定义分别为

$$\hat{a} = \frac{\hat{x} + \mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{2}}, \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x} - \mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{2}},$$

这里 $\hat{x}$, $\hat{p}$ 分别为坐标算符和动量算符，并且已经取了自然单位 $\hbar = m = \omega = 1$. 显然这两个算符都不是厄米算符，对易关系为 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的逆算符是什么? $\hat{a}$ 和 $\frac{1}{\hat{a}}$ 有什么关系? 为此，我们采用相干态与围道积分方法研究 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的逆算符. 由于 $|z\rangle$ 是 $\hat{a}$ 的本征态，也就是说 $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$，很自然地应该有 $\frac{1}{\hat{a}}|z\neq 0\rangle = \frac{1}{z}|z\neq 0\rangle$，但是在 $z = 0$ 处遇到了困难. 为了克服这个困难，利用柯西公式[8]构造 Fock 态的围道积分形式如下：

$$|n\rangle = \frac{\sqrt{n!}}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \mathrm{d}z \frac{|z\rangle}{z^{n+1}},$$

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + z\hat{a}^\dagger\right)|0\rangle, \tag{1}$$

其中围道 l 包围了 $z = 0$ 点. 在围道积分意义下，有 $\frac{1}{\hat{a}}|z\rangle = \frac{1}{z}|z\rangle$，因此 $\frac{1}{\hat{a}}$ 对 Fock 态的作用结果是

$$\frac{1}{\hat{a}}|n\rangle = \frac{\sqrt{n!}}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \mathrm{d}z \frac{|z\rangle}{z^{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}|n+1\rangle. \tag{2}$$

这意味着

$$\frac{1}{\hat{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}|n+1\rangle\langle n|. \tag{3}$$

利用真空投影算符正规乘积展开式[9] $|0\rangle\langle 0| = :\exp\{-\hat{a}^\dagger\hat{a}\}:$，可以得到(3)式的正规乘积形式为

$$\frac{1}{\hat{a}} = :\exp(-\hat{a}^\dagger\hat{a})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot(n+1)}\hat{a}^{\dagger n+1}\hat{a}^n:. \tag{4}$$

---

* 山东省自然科学基金（批准号：Y2008A16），菏泽学院自然科学基金（批准号：XY07WL01，XY08WL03）和山东省高等学校实验技术（批准号：S04W138）资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail：xxlwlx@126.com

这里::是正规乘积符号. 利用 $|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n+1}}|n\rangle$,还可以得到(3)式的简洁形式为

$$\frac{1}{\hat{a}} = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1} = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\hat{N}+1}. \tag{5}$$

由算符的函数定义[10]得

$$\frac{1}{\hat{N}+1} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\hat{N}^m = 1-\hat{N}+\hat{N}^2-\hat{N}^3+\cdots. \tag{6}$$

该算符函数作用在粒子数态 $|n\rangle$ 上并且利用 $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{N}+1}|n\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\hat{N}^m|n\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m n^m|n\rangle \\ &= \frac{1}{n+1}|n\rangle. \end{aligned}\tag{7}$$

利用(7)式和 Fock 表象的完备性 $\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1$、$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ 以及 $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{a}}\hat{a} &= \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a} = \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a}\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\ &= \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}|n\rangle\langle n| \\ &= \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}|n-1\rangle\langle n| \\ &= \hat{a}^\dagger\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}|n-1\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1-|0\rangle\langle 0| \neq 1, \end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}\frac{1}{\hat{a}} &= \hat{a}\hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1} = \hat{a}\hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\ &= \hat{a}\hat{a}^\dagger\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}|n\rangle\langle n| \\ &= \hat{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}|n+1\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1. \end{aligned}\tag{9}$$

(8)和(9)式表明算符 $\frac{1}{\hat{a}}$ 不是湮没算符 $\hat{a}$ 的左单侧逆算符,仅是湮没算符 $\hat{a}$ 的右单侧逆算符,记作 $\hat{a}_r^{-1} \equiv \frac{1}{\hat{a}}$.

同样可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{a}^\dagger} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}|n\rangle\langle n+1| \\ &= :\exp(-\hat{a}^\dagger\hat{a})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot(n+1)}\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^{n+1}: \\ &= \frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a}, \end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{a}^\dagger}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a}\hat{a}^\dagger\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1, \end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger} &= \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a} = \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}\hat{a}\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1-|0\rangle\langle 0| \neq 1. \end{aligned}\tag{12}$$

(11)和(12)式表明算符 $\frac{1}{\hat{a}^\dagger}$ 仅是产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 的左单侧逆算符,记作 $(\hat{a}^\dagger)_l^{-1} \equiv \frac{1}{\hat{a}^\dagger}$,而不是产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 的右单侧逆算符.

由以上分析可知,有必要对算符的左逆算符和右逆算符进行深入的探讨,即对于算符 $\hat{A}$,如果存在算符 $\hat{B}$,使得 $\hat{B}\hat{A}=1$,则称 $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 的左逆算符,并记 $\hat{A}_l^{-1} \equiv \hat{B}$;如果存在算符 $\hat{C}$,使得 $\hat{A}\hat{C}=1$,则称 $\hat{C}$ 是 $\hat{A}$ 的右逆算符,并记 $\hat{A}_r^{-1} \equiv \hat{C}$.

显然,对于两个算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$,若 $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 的左逆算符,则 $\hat{A}$ 是 $\hat{B}$ 的右逆算符;若 $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 的右逆算符,则 $\hat{A}$ 是 $\hat{B}$ 的左逆算符. 进一步可以得知,如果 $\hat{A}_l^{-1}$ 存在,则 $(\hat{A}_l^{-1})_r^{-1} = \hat{A}$;如果 $\hat{A}_r^{-1}$ 存在,则 $(\hat{A}_r^{-1})_l^{-1} = \hat{A}$.

2.2. 逆算符

对于算符 $\hat{A}$,如果既存在左逆算符 $\hat{A}_l^{-1}$,又存在右逆算符 $\hat{A}_r^{-1}$,那么左逆算符 $\hat{A}_l^{-1}$ 与右逆算符 $\hat{A}_r^{-1}$ 必相等. 这是因为根据算符乘法结合律,有

$$\hat{A}_l^{-1}\hat{A}\hat{A}_r^{-1} = \hat{A}_l^{-1}(\hat{A}\hat{A}_r^{-1}) = \hat{A}_l^{-1}\cdot 1 = \hat{A}_l^{-1},$$

$$\hat{A}_l^{-1}\hat{A}\hat{A}_r^{-1} = (\hat{A}_l^{-1}\hat{A})\hat{A}_r^{-1} = 1\cdot\hat{A}_r^{-1} = \hat{A}_r^{-1}.$$

显然有 $\hat{A}_l^{-1} = \hat{A}_r^{-1}$. 因此,逆算符的定义表述为:给定一个算符 $\hat{A}$,如果存在算符 $\hat{B}$,使得 $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = 1$,则把 $\hat{B}$ 叫做 $\hat{A}$ 的逆算符,并记 $\hat{A}^{-1} \equiv \hat{B}$,这时算符 $\hat{A}$ 是可逆的.

例如一维线性谐振子的哈密顿算符 $\hat{H}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}$ 就是可逆算符，且其逆算符为 $\hat{H}^{-1}=\frac{2}{2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1}$. 这是因为

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\hat{H}^{-1} &= \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1} \\
&= \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1}\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\
&= \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1 = \hat{H}^{-1}\hat{H}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

根据以上左逆算符、右逆算符、逆算符的探讨，容易得出以下结论：对于一个算符 $\hat{A}$，可能只存在左逆算符 $\hat{A}_{\mathrm{l}}^{-1}$ 而不存在右逆算符；可能只存在右逆算符 $\hat{A}_{\mathrm{r}}^{-1}$ 而不存在左逆算符；可能既不存在左逆算符又不存在右逆算符，这时我们说 $\hat{A}$ 不可逆；当 $\hat{A}$ 既存在左逆算符 $\hat{A}_{\mathrm{l}}^{-1}$ 又存在右逆算符 $\hat{A}_{\mathrm{r}}^{-1}$ 时，其左逆算符 $\hat{A}_{\mathrm{l}}^{-1}$ 与右逆算符 $\hat{A}_{\mathrm{r}}^{-1}$ 相等，记 $\hat{A}_{\mathrm{l}}^{-1}=\hat{A}_{\mathrm{r}}^{-1}\equiv\hat{A}^{-1}$，这时我们说 $\hat{A}$ 可逆.

3. 左逆右逆的数学性质

在代数学的有关文献[11]中，对利用矩阵的初等变换方法得到一个可逆方阵的逆矩阵的问题都作过详细的分析，但一般局限于有限阶的可逆方阵. 在这种情况下，初等行变换方法与初等列变换方法是等价的，即所得到的逆矩阵是相同的. 对于一个无限阶的方阵，初等行变换方法与初等列变换方法是否等价？下面对产生算符 $\hat{a}^{\dagger}$ 和湮没算符 $\hat{a}$ 在 Fock 表象中的矩阵形式[12]作进一步分析.

产生算符 $\hat{a}^{\dagger}$ 和湮没算符 $\hat{a}$ 在 Fock 空间的矩阵元分别为

$$
\begin{aligned}
a_{mn}^{\dagger} &= \langle m|\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}, \\
a_{mn} &= \langle m|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

于是得到产生算符 $\hat{a}^{\dagger}$ 和湮没算符 $\hat{a}$ 的方阵

$$
a^{\dagger}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix},
\tag{15}
$$

$$
a=\begin{pmatrix}
0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}.
\tag{16}
$$

观察(15)式可以看出，利用矩阵的列初等变换求逆矩阵的方法不能使 $a^{\dagger}$ 单位化，行初等变换方法能使 $a^{\dagger}$ 单位化，即

$$
\left(\begin{array}{ccccc:ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1^{-1/2} & 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 3^{-1/2} & 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -4^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & 4^{-1/2} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right).
\tag{17}
$$

可以验证

$$\begin{pmatrix} 1^{-1/2} & 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 3^{-1/2} & 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ -4^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & 4^{-1/2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \hat{a}^{\dagger}$$

$$= \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 3^{-1/2} & 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ -4^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & 4^{-1/2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{18}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 表示无限阶的单位矩阵. (18)式表明 $a^{\dagger}$ 存在左逆矩阵

$$(\hat{a}^{\dagger})_l^{-1} = \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 3^{-1/2} & 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ -4^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & 4^{-1/2} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{19}$$

但是

$$\hat{a}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 3^{-1/2} & 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ -4^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & 4^{-1/2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 3^{-1/2} & 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ -4^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & 4^{-1/2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{I}, \tag{20}$$

(20)式表明 $(\hat{a}^{\dagger})_l^{-1}$ 不是 $a^{\dagger}$ 的右逆矩阵.

观察(16)式可以看出,利用矩阵的行初等变换求逆矩阵的方法不能使 a 单位化,列初等变换方法能使 a 单位化,即

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right) \xrightarrow{\text{若干次列初等变换}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 1^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} & 4^{-1/2} & \cdots \\ 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right). \tag{21}$$

可以验证

$$\hat{a} \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} & -4^{-1/2} & \cdots \\ 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$
\times \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} & -4^{-1/2} & \cdots \\ 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}. \tag{22}
$$

(22)式表明 $\hat{a}$ 存在右逆矩阵

$$
a_{\mathrm{r}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} & -4^{-1/2} & \cdots \\ 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{23}
$$

但是

$$
\begin{pmatrix} 1^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} & -4^{-1/2} & \cdots \\ 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \hat{a}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} & -4^{-1/2} & \cdots \\ 1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & ? & \cdots \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{I}, \tag{24}
$$

(24)式表明 a_{r}^{-1} 不是 a 的左逆矩阵.

一维线性谐振子的哈密顿算符 $\hat{H} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}$在 Fock 空间的矩阵表示为

$$
H = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5/2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{25}
$$

可以证明,行初等变换法与列初等变换法得到的 H 的左逆与右逆是相同的,即

$$
H_{\mathrm{l}}^{-1} = H_{r}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2/3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5/3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \equiv H^{-1}. \tag{26}
$$

粒子数算符 $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ 在 Fock 空间的矩阵表示为

$$
N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{27}
$$

显然,N 既无左逆也无右逆,也就是说不可逆.

综上所述可知,矩阵的左逆矩阵与初等行变换法相对应,矩阵的右逆矩阵与初等列变换法相对应;当且仅当左逆矩阵与右逆矩阵都存在时,初等行变换法与初等列变换法才等价.

进一步分析(19),(23)和(25)式,容易得出这样的结论:若把方阵$(a^{\dagger})_{\mathrm{l}}^{-1}$ 的第一列(或者 a_{r}^{-1} 的第一行)元素全置为 0,它仍然是 $a^{\dagger}$ 的左逆(或者 a 的右逆),即当某方阵仅存在单侧逆时,其单侧逆不具有唯一性;当某方阵存在双侧逆时,其逆具有唯一性.

总之,采用相干态与围道积分方法研究了湮没算符的右逆与产生算符的左逆,探讨了右逆、左逆与初等行变换法、初等列变换法的对应关系;进一步给出了当某方阵(算符)仅存在单侧逆时,其单侧逆不具有唯一性的结论.

[1] Wang J S 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 547(in Chinese)[王继锁 1991 物理学报 **40** 547]

[2] Fan H Y 2005 *From Quantum Mechanics to Quantum Optics* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press) p298 (in Chinese)[范洪义 2005 从量子力学到量子光学(上海:上海交通大学出版社)第 298 页]

[3] Xu S M, Jiang J J, Li H Q, Xu X L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7430(in Chinese)[徐世民、蒋继建、李洪奇、徐兴磊 2008 物理学报 **57** 7430]

[4] Xu S M, Xu X L, Jiang J J, Li H Q, Wang J S 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4369

[5] Xu S M, Xu X L, Li H Q, Wang J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2174(in Chinese)[徐世民、徐兴磊、李洪奇、王继锁 2009 物理学报 **58** 2174]

[6] Xu S M, Xu X L, Li H Q, Wang J S 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2129

[7] Li H Q, Xu S M, Xu X L, Jiang J J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3806(in Chinese)[李洪奇、徐世民、徐兴磊、蒋继建 2008 物

理学报 **58** 3806]

[8] Liang K M 1998 *Methods of Mathematical Physics* 3nd ed (Beijing: Higher Education Press) p37 (in Chinese) [梁昆淼 1998 数学物理方法(第三版)(北京:高等教育出版社)第 37 页]

[9] Fan H Y, Tang X B 2008 *Development of the Mathematical Physics of the Quantum Mechanics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) p7 [范洪义、唐绪兵 2008 量子力学数理基础进展(合肥:中国科学技术大学出版社)第 7 页]

[10] Zeng J Y 1984 *Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press), p114 [曾谨言 1984 量子力学(北京:科学出版社)第 114 页]

[11] Tongji University Mathematics Teaching and Research 2000 Linear Algebra 3nd ed (Beijing: Higher Education Press), p90 [同济大学数学教研室 2000 线性代数(第三版)(北京:高等教育出版社)第 90 页]

[12] Zhou S X 1979 *Quantum Mechanics Tutorial* (Beijing: Higher Education Press), p127 [周世勋 1979 量子力学教程(北京:高等教育出版社)第 127 页]

Left-hand and right-hand inverse operators of quantum operators and its mathematical property*

Xu Shi-Min Zhang Yun-Hai Xu Xing-Lei† Li Hong-Qi

(*Department of Physics Heze University*, *Heze* 274015, *China*)

(Received 30 January 2010; revised manuscript received 4 March 2010)

Abstract

The right-hand inverse operator of the annihilation operators and the left-hand inverse operator of the creation operator are given by using the contour integration. Furthermore, the corresponding relation between the right-hand inverse or left-hand inverse operator derived and the column elementary transformation or row transformation of a matrix is investigated.

Keywords: left-hand inverse operator, right-hand inverse operator, IWOP technique, elementary transformation of a matrix, contour integration

PACC: 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (No. Y2008A16), the Natural Science Foundation of Heze University of Shandong Province, China (Grant Nos. XY07WL01, Grant XY08WL03) and the University Experimental Technology Foundation of Shandong Province, China (Grant No. S04W138).

† Corresponding author. E-mail: xxlwlx@126.com