

量子稀疏图码的反馈式迭代译码^{*}

王云江[†] 白宝明 王新梅

(西安电子科技大学 综合业务网国家重点实验室, 西安 710071)

(2010 年 1 月 7 日收到; 2010 年 3 月 8 日收到修改稿)

量子稀疏图码的译码可以由基于错误图样的和积译码算法来实现. 本文在此基础上构建了一个新的反馈式迭代译码算法. 其反馈策略不仅仅重新利用了错误图样, 而且还利用了稳定子上相应元素的值和信道的错误模型. 由此, 本方法一方面可以克服传统的量子码和积译码算法中遇到的所谓对称简并错误, 另一方面还能反馈更多的有用信息到译码器中, 帮助其产生有效的译码结果, 大大提高译码器的译码能力. 另外, 本算法并没有增加量子测量的复杂度, 而是对测量中所能获得的信息的更充分利用.

关键词: 量子稀疏图码, 和积算法, 量子纠错码, 量子信息

PACC: 0367, 0365, 0210

1. 引 言

无论是量子通信^[1-3]还是经典通信, 都不可避免的要受到噪声的影响. 所幸的是我们可以通过对信息的编码来克服噪声的影响, 从而实现可靠的通信. 编码的基本思想是通过增加冗余来实现对信息的保护, 比如最简单的重复码, 就是把信息进行多份拷贝然后再传送. 然而在实际应用中, 这种简单的编码方式并不实用和有效. 由于稀疏图码^[4]在和积译码算法下可以接近信道容量, 因此成为近十多年来经典编码领域的研究热点. 考虑到通过经典码来构造量子码^[5], 一直是量子纠错码的一种主要的构造方式. 因此, 对于基于经典稀疏图码的量子稀疏图码的构造^[6-8]以及对相应的译码算法^[9]的研究变得非常有意义.

本文中, 为量子稀疏图的译码构建了一个新的反馈式迭代译码算法. 反馈算法充分利用了更多的可以利用的信息, 来帮助译码器得到有效的译码输出, 大大提高了量子稀疏图码的译码表现. 在第 2 节中, 简单介绍基本的量子稀疏图的和积译码算法. 第 3 节分两小节是本文的主要工作: 第一小节

介绍了我们的反馈式迭代译码算法的主要思想和相应的算法设计; 在第二小节中, 我们通过对常见的量子稀疏图码的译码仿真展示了译码算法的优越性, 并在本节末尾做了相应的讨论和评价. 最后一节是对全文的总结.

2. 量子稀疏图码的和积译码算法

经典稀疏图码的译码一般采用和积译码算法, 同样的译码思想也可以应用到量子稀疏图码的译码中来^[10]. 然而, 由于量子理论的限制, 不能对携带信息的单个量子比特进行直接测量, 因为这样的测量会破坏量子态, 只能应用稳定子的每一个生成子对一个量子码进行整体测量. 通过这种整体测量, 并不能获取单个量子比特所携带的信息, 因此并不会对码所对应的量子态造成破坏. 这种情形下的测量方式决定了对于量子稀疏图码的译码, 不能采用针对经典稀疏图码的基于后验概率的和积译码算法, 而只能采用基于错误图样的和积译码算法.

假设量子稀疏图码为 $[n, k]$ 稳定子码, 这里 $[n, k]$ 指用 n 个物理比特来编码 k 个逻辑比特. 由稳定子码的理论可知^[11], $[n, k]$ 的稳定子由 $m = n$

^{*} 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB328300), 国家预研项目 (批准号: * * * * * 060104), 国家自然科学基金委员会-广东省联合基金 (批准号: U0635003), 111 基地项目 (批准号: B08038), 国家留学基金委员会国家公派专项研究生奖学金项目 (批准号: [2008]3019) 资助的课题.

[†] E-mail: yunjiang. w@ gmail. com

$-k$ 个相互独立的生成子构成, 即 $S = \{S_1, \dots, S_m\} \subset G_n$, 这里 G_n 是 Pauli 算子的 n 维张量积. 在和积译码算法中这 m 个稳定子将作为 m 个校验节点使用^[8,9]. 考虑的信道为无记忆的 Pauli 信道即 $E \subset G_n$, E 表示发生在量子码上的错误, 其中发生在每个量子比特上的错误彼此相互独立. 由于稳定子码被定义为 S 的 $+1$ 本征空间^[12], 如果令 $s_c = 1$ 指 $[S_c, E] = 0$, $s_c = -1$ 指 $\{S_c, E\} = 0$, 稳定子的测量结果 $s = \{s_1, \dots, s_m\} \in \{-1, 1\}$ 就构成码的错误图样. 量子译码的关键就是根据 s 找出实际发生的错误 E .

介绍量子稀疏图码的和积算法之前, 先明确几个相关名称的定义. 第 q 个量子比特上发生的错误为 $E_q (E_q \in \{I, X, Z, Y\})$ 的概率由 $p_q(E_q)$ 表示; 第 q 个量子比特的邻居校验节点由 $n(q)$ 表示; 校验节点 $S_c (c \in \{1, \dots, m\}, \text{下同})$ 的邻居比特节点由 $n(c)$ 表示. 另外用 $S_c \cdot E_c = 1$ 表示 $[S_c, E_c] = 0$, $S_c \cdot E_c = -1$ 表示 $\{S_c, E_c\} = 0$, 这里 E_c 指发生在 $n(c)$ 上的错误. 这样, 根据和积译码算法的思想, 得到^[9]

$$m_{c \rightarrow q}(E_q) \propto \sum_{E_{q'}} (\delta_{s_c, S_c \cdot E_c} \prod_{q'} m_{q' \rightarrow c}(E_{q'})), \quad q' \in n(c) \setminus q, \quad (1)$$

$$m_{q \rightarrow c}(E_q) \propto p_q(E_q) \prod_{c'} m_{c' \rightarrow q}(E_q), \quad c' \in n(q) \setminus c, \quad (2)$$

这里, $m_{c \rightarrow q}(E_q)$ 和 $m_{q \rightarrow c}(E_q)$ 分别表示从校验节点传往相邻的比特节点的信息和从比特节点传往相邻校验节点的信息. 它们构成了由经典和积算法演变而来的量子稀疏图码的主体.

3. 反馈式的量子稀疏图码译码算法

基于错误图样的量子稀疏图码译码算法, 虽然能有效的应用于量子稀疏图码的译码, 但是它也会带来一个新的问题, 即容易造成对称式简并错误^[9]. 针对这种情况, 2008 年 Poulin 和 Chung 提出了一种随机扰动的反馈策略^[9] (简称 PC08, 下同) 作为基本的量子稀疏图码译码算法的补充, 来克服对称式简并错误. 然而值得注意的是, 仍有大量的译码错误并不属于对称式简并错误. 因此, 基于 PC08 的译码器仍然会产生大量的可检测错误^[9], 这意味着译码器的译码能力仍有很大的提升空间.

针对这种情况, 本文构建了一种新的反馈迭代译码策略. 我们的方法和 PC08 的不同之处在于:

PC08 是基于译码器输出的错误图样和实际接收码的错误图样的比较上的; 而在我们的反馈策略中, 不仅利用了错误图样的比较, 而且还对错误图样的比较结果进行了分类, 并在此基础上, 又利用了稳定子中相应元素的值和信道的错误模型来设计反馈策略. 相较于 PC08, 此方法一方面可以克服对称性带来的对称简并错误, 更为重要的是, 我们的方法还能反馈更多的有用信息给译码器, 帮助其得到一个有效的译码结果. 从某种意义上说, 我们的反馈策略起到了在经典译码中软判决技术所起到的作用, 从而大大提高了译码器的译码能力, 使量子稀疏图码的性能表现获得明显提升. 另外值得一提的是, 我们的方法并没有增加量子通信中测量的复杂度, 因为除了算法中用到的量子码的错误图样是经由量子测量得到的以外, 稳定子中相关元素的值以及信道的错误模型对于量子通信的双方而言都是已知的, 并不需要额外的物理操作去获取. 下面就介绍基于这种新的反馈策略之上的量子稀疏图码译码算法.

3.1. 算法设计

首先用基本的量子稀疏图码译码算法来确定码在传输过程中所发生的错误 E , 当该译码过程失败的时, 也就是说 $s(E_{\text{out}}) \neq s$ 时 (这里 E_{out} 指译码器的输出, $s(E_{\text{out}})$ 指 E_{out} 的错误图样), 通过比较 $s(E_{\text{out}})$ 和 s , 容易找出是在哪些稳定子的生成子上出现了错误. 然后, 随机选择这样一个出错的生成子, 比如说是 S_c , 那么只有两种情况发生: 1) $s_c = -1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = 1$; 2) $s_c = 1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = -1$. 在确定这两种情况后, 随机选择一个和 S_c 相连的量子比特节点, 比如说是第 q 个量子比特, 根据 S_{c_q} 的值和信道模型来重新设定 $p_q(E_q)$ (这里 S_{c_q} 指 S_c 上和第 q 个量子比特相对应的元素的指), 并将这一更新的结果反馈到译码器中. 考虑最常用的极化信道 (depolarizing channel), 其模型如下:

$$\rho_q \rightarrow p_I \rho_q + (1 - p_I) (X \rho_q X + Y \rho_q Y + Z \rho_q Z) / 3. \quad (3)$$

这里 $p_I = (1 - p)$, p 为信道的极化强度. 具体算法可表示为

首先令 $\Sigma_{1,2,3} = \{X, Z, Y = XZ\}$, 如果 $S_{c_q} = \Sigma_1$, 那么当 $s_c = -1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = 1$ 时, 调整 $p_q(E_q)$ 为

$$\begin{aligned} p_q(I) &= (1 - P_I) / 2 = p_q(\Sigma_1), \\ p_q(\Sigma_2) &= P_I / 2 = p_q(\Sigma_3). \end{aligned} \quad (4)$$

比如, 如果 $S_{c_q} = X$, 得到

$$\begin{aligned} p_q(I) &= (1 - P_I)/2 = p_q(X), \\ p_q(Z) &= P_I/2 = p_q(Y). \end{aligned} \quad (5)$$

另一方面, 当 $s_c = 1$ 而 $S_c \cdot E_{\text{out}} = -1$ 时, 调整 $p_q(E_q)$ 为

$$\begin{aligned} p_q(I) &= P_I/2 = p_q(\Sigma_1), \\ p_q(\Sigma_2) &= (1 - P_I)/2 = p_q(\Sigma_3), \end{aligned} \quad (6)$$

令 $S_{c_q} = X$, 得到

$$\begin{aligned} p_q(I) &= P_I/2 = p_q(X), \\ p_q(Z) &= (1 - P_I)/2 = p_q(Y). \end{aligned} \quad (7)$$

把这些调整过后的分布概率, 重新反馈到和积译码器中, 利用(1), (2)式重新迭代以确定 E . 如果在此过程中译码器得到了一个有效的译码输出, 即终止. 否则, 判断 $S_c \cdot E_{\text{out}}$ 和 s_c 是否相等. 如果不相等, 恢复 $p_q(E_q)$, 接着选取和 S_c 相连的其他量子比特 q' , 按照调整 $p_q(E_q)$ 的策略来调整 $p_{q'}(E_{q'})$, 并将其反馈到译码器中重新译码. 而如果 $S_c \cdot E_{\text{out}} = s_c$, 但不满足 $s(E_{\text{out}}) = s$, 选择另外一个校验失败的生成子 $S_{c'}$, 然后按照调整和 S_c 相连的量子比特节点的 $p_q(E_q)$ 一样, 调整发生在和 $S_{c'}$ 相连的量子比特节点上的错误分布概率.

3.2. 仿真及结果讨论

将反馈式量子码和积译码算法应用于各种不同的量子稀疏图码, 包括传统量子稀疏图码和纠缠辅助型量子稀疏图码, 所有的仿真结果都表明算法大大提高了译码器的译码能力, 明显提升了量子稀疏图码的性能表现. 在本节中, 选用最常用的也是最成功的量子稀疏图码的构造方式来构造一个量子稀疏图码, 然后给出相关译码算法的仿真结果, 并对此进行相应的讨论和分析来说明我们算法的优越性.

我们知道, 传统的量子稀疏图码可以由满足对偶约束 (dual-containing) 条件的经典稀疏图码来构造^[12]. 其中, 最成功的构造方式之一是 MacKay 等人提出的所谓“Construction B”方法^[6]. 其构造思路如下, 首先选择一个行重为 $L/2$ 的 $n/2 \times n/2$ 循环矩阵, 然后定义

$$H_0 = [C, C^T]. \quad (8)$$

从 H_0 中删掉 $n - m$ 行, 从而得到一个新的 $m \times n$ 的矩阵 H , 容易验证, H 是满足对偶约束条件的. 最后, 根据 CSS 构造方式^[13, 14], 就可以得到我们所需要的量子稀疏图码.

据此, 首先基于有限几何理论构造一个二进制循环稀疏图码^[63, 37], 其行重为 8. 由于^[63, 37]的校验矩阵是一个 63×63 的循环矩阵, 包含 26 个独立的行和 37 个冗余的行, 因此“Construction B”可以给出一个码率为 $74/126$, 行重为 16 的量子稀疏图码^[126, 74]. 在图 1 中, 展示了^[126, 74]码分别在基本的量子码和积译码算法, 基于随机策略的量子码和积译码算法 (PC08), 以及我们的新型的反馈式量子码和积译码算法下的表现, 这里用到的信道是极化信道.

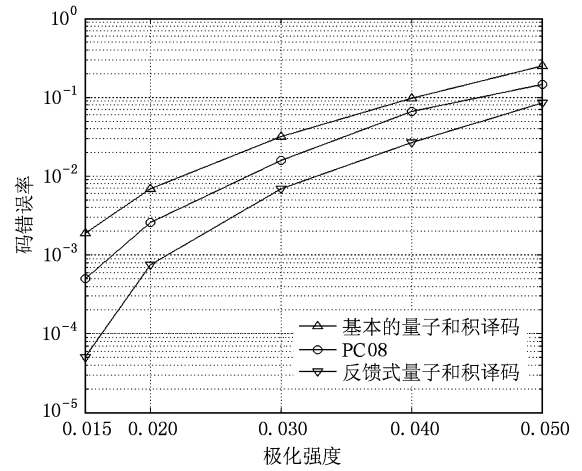


图 1 极化信息的极化强度

从图 1 中, 明显的看到反馈式量子码和积译码算法大大提高了译码器的译码能力, 明显提升了量子稀疏图码的性能表现. 比如, 当信道的极化强度 $p \approx 0.015$ 时, 相比较 PC08, 我们的方法有约 10 dB 的增益, 而相比较于基本的量子码和积译码算法, 我们的方法更是有约 40 dB 的增益. 另外, 由于译码错误的类型可以分为两类: 可检测错误与不可检测错误. 可检测错误意味着译码器的译码失败, 因此可以用可检测错误在总体错误中的百分比 (POD) 来作为衡量译码器的译码能力的一个重要参数. 在本例中, 我们注意到, 当 $p = 0.03$ 时, 对于基本的量子码和积译码器而言, 当仿真 1567 个码时, 会出现 50 次的译码错误, 这其中可检测错误多达 49 个, $\text{POD} = 98\%$. 对于 PC08, 当仿真到 2544 个码时出现了 50 次的译码错误, 可检测错误仍然为 49 个, 所以此时 POD 仍然为 98%. 最后考虑我们的新型反馈式量子码和积译码算法, 当仿真到 7237 个码时, 才出现 50 次译码错误, 并且这其中只有 22 个可检

测错误, 因此我们的 $\text{POD} = 44\%$. 可见, 我们设计的译码器的译码能力大大高于已有的译码器.

4. 结 论

在本文中, 针对量子稀疏图码的译码, 构造了一种新型的反馈式量子积译码算法. 我们的算法中所用到的反馈策略不仅仅利用了错误图样的比较, 而且还利用了稳定子中相应元素的值和信道的错误模型. 通过对这些可利用资源的充分利用, 分析和判断, 我们的反馈式策略一方面可以克服和积

算法所带来的对称简并错误, 另一方面也给译码器提供了更多的可靠信息来帮助其确定出有效的译码结果. 从这个意义上来讲, 我们的反馈式策略起到经典通信中的软判决技术, 从而大大提高了译码器的译码能力, 使量子稀疏图码的表现得到了明显的提升. 就算法复杂度而言, 在我们的反馈式算法中只是选择了生成子中某些非零元素所对应的量子比特进行概率分布调整, 而由于量子稀疏图码的稳定子本身也是稀疏的, 因此我们的算法复杂度和 PC08 的随机扰动策略一样, 与基本的和积译码算法成线性关系.

-
- [1] Liu W J, Chen H W, Ma T H, Li Z Q, Liu Z H, Hu W B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4105
 - [2] Wang X B 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 077902
 - [3] Li C Y, Li X H, Deng F G, Zhou H Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2352
 - [4] Gallager R G 1962 *IRE Trans. Inform. Theory* **8** 21
 - [5] Li Z, Xing L J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 28 (in Chinese) [李卓、邢莉娟 2008 物理学报 **57** 28]
 - [6] MacKay D J C, Mitchison G J, McFadden P L 2004 *IEEE Trans. Inform. Theory* **50** 2315
 - [7] Wang Y J, Bai B M, Zhao W B, Wang X M 2009 *Int. J. Quantum Inf.* **7** 1373
 - [8] Li Y, Zeng G H, Moon H L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4154
 - [9] Poulin D, Chung Y 2008 *Quantum Inform. Comput.* **8** 987
 - [10] Camara T, Ollivier H, Tillich J P 2007 *Proceedings of the International Symposium on Information Theory* Nice, France, June 2007 p811
 - [11] Gottesman D 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1862
 - [12] Calderbank A R, Rains E M, Shor P W, Sloane N J A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 405
 - [13] Steane A M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 793
 - [14] Calderbank A R, Shor P W 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1098

Feedback iterative decoding of sparse quantum codes^{*}

Wang Yun-Jiang[†] Bai Bao-Ming Wang Xin-Mei

(*State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

(Received 7 January 2010; revised manuscript received 8 March 2010)

Abstract

Decoding sparse quantum codes can be accomplished by syndrome-based decoding through using the sum-product algorithm (SPA). We significantly improve this decoding scheme by developing a new feedback adjustment strategy for the standard SPA. In our feedback strategy, we exploit not only the syndrome but also the values of the frustrated checks on individual qubits of the code and the channel model. Consequently, our decoding algorithm, on the one hand, can break the symmetric degeneracy, and on the other hand, can feed back more useful information to the SPA decoder to help the decoder determine a valid output, thereby significantly improving the decoding ability of the decoder. Moreover, our algorithm does not increase the measurement complexity compared with the previous method, but takes full advantage of the measured information.

Keywords: sparse quantum codes, sum-product algorithm, quantum error-correcting codes, quantum information

PACC: 0367, 0365, 0210

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB328300), the National Pre-Research Program of China (Grant No. * * * * * 060104), the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the Guangdong Province, China (Grant No. U0635003), the 111 Program, China (Grant No. B08038) and the China Scholarship Council (Grant No. 2008 3019).

[†] E-mail: yunjiang. w@gmail. com