

# 黑洞背景下费米物质能量密度涨落的计算\*

邹伯夏 颜 骏<sup>†</sup> 李季根

(四川师范大学物理系, 成都 610066)

(2009 年 9 月 18 日收到; 2010 年 3 月 2 日收到修改稿)

应用泛函积分方法推导了量子 Thirring 模型中的传播子和有效势, 计算了二维点物质黑洞和 dilaton 黑洞模型中费米物质的能量密度涨落, 在相同的物理条件下, 发现 dilaton 黑洞外费米物质的能量密度涨较大.

**关键词:** 泛函积分, Thirring 模型, 黑洞, 能量密度涨落

**PACC:** 0460, 0470

## 1. 引 言

Bekenstein 和 Hawking 等人发现黑洞具有热辐射效应以来, 研究黑洞与周围物质的作用和黑洞的熵一直是黑洞热力学中重要的研究课题<sup>[1,2]</sup>. 1985 年, t'Hooft 根据砖墙模型方法研究了 Schwarzschild 黑洞视界表面附近标量场的热力学性质, 成功地验证了黑洞统计熵与其面积成正比的结论<sup>[3]</sup>. 近年来 Zhao 等人发展了这种方法并将其改善成为薄膜模型, 去除了一些砖墙模型中不自洽的表示, 并计算了各种黑洞的玻色子熵和费米子熵, 使这种方法更加完善<sup>[4-6]</sup>.

砖墙模型和薄膜模型都属于弯曲时空下量子场论模型, 场论中的泛函积分方法还可以广泛应用于各种统计物理模型<sup>[7,8]</sup>. 本文将非微扰泛函积分方法推广到二维弯曲时空<sup>[9-11]</sup>, 推导了含有背景粒子作用的 Thirring 模型的传播子和有效势, 研究了两种了黑洞的度规涨落对视界外物质能量密度涨落的影响. 结果表明 dilaton 黑洞远大于点物质黑洞视界外费米物质的能量密度涨落.

## 2. 弯曲时空下的泛函积分方法

含有背景粒子作用的 Thirring 模型的总哈密顿量为

$$H(\tau) = H_f(\tau) + H_{\text{mod}}(\tau) + H_{\text{imp}}^{(1)}(\tau) + H_{\text{imp}}^{(2)}(\tau)$$

$$\begin{aligned} & + H_{\text{int}}(\tau) \\ = & \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx \left[ -i \left( \bar{\Psi}_1(x, \tau) \frac{\partial \psi_1(x, \tau)}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\Psi}_2(x, \tau) \frac{\partial \psi_2(x, \tau)}{\partial x} \right) + m \left( \bar{\Psi}_1(x, \tau) \psi_2(x, \tau) \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{\Psi}_2(x, \tau) \psi_1(x, \tau) \right) \right] + \mu \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx \\ & \times \left[ \left( \bar{\Psi}_1(x, \tau) \psi_1(x, \tau) + \bar{\Psi}_2(x, \tau) \psi_2(x, \tau) \right) \right. \\ & \left. + v_0 \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx \left[ \delta(x - x_0) \left( \bar{\Psi}_1(x, \tau) \psi_2'(x, \tau) \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \bar{\Psi}_2(x, \tau) \psi_1'(x, \tau) \right) + u_0 \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[ \delta(x - x_0) \left( \bar{\Psi}_1(x, \tau) \psi_1'(x, \tau) \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \bar{\Psi}_2(x, \tau) \psi_2'(x, \tau) \right) \right] \right. \\ & \left. + 2\omega \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx \left( \bar{\Psi}_1(x, \tau) \bar{\Psi}_2(x, \tau) \right) \right. \\ & \left. \times \psi_2(x, \tau) \psi_1(x, \tau) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $g = \det g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  是时空的度规,  $\psi_1(x, \tau)$ ,  $\psi_2(x, \tau)$  为费米场,  $x_c$  为黑洞的视界,  $\varepsilon$  为黑洞视界外物质距离,  $x_c + \varepsilon < x_0 < L + x_c + \varepsilon$ ,  $\mu$  为化学势,  $u_0$  和  $v_0$  为两个背景粒子的耦合系数,  $\omega$  为费米场耦合系数. 费米场变换到动量空间有

$$\psi_i(x, \tau) = (\beta L)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \Omega} e^{i(\mathbf{k}x + \Omega\tau)} a_i(p), \quad (2a)$$

$$\bar{\Psi}_i(x, \tau) = (\beta L)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \Omega} e^{-i(\mathbf{k}x + \Omega\tau)} a_i^*(p), \quad (2b)$$

式中  $i = 1, 2$ ,  $\mathbf{k}$  为波矢,  $\Omega = (2n + 1)\pi T$  为费米频

\* 四川省教育厅自然科学基金(批准号:08ZA038)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: yanjun5@sina.com

率,  $p = (k, \Omega)$ ,  $\beta = 1/T$  是绝对温度,  $L$  为一维空间上物质的分布长度, 哈密顿量(1)式对应的泛函作用量为

$$S = \int_0^\beta d\tau \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx \sum_{i=1,2} \bar{\Psi}_i(x, \tau) \times \partial_\tau \psi_i(x, \tau) - \int_0^\beta d\tau H(\tau), \quad (3)$$

引入辅助玻色场

$$\varphi_i(x, \tau) = \bar{\Psi}_i(x, \tau) \psi_i(x, \tau), \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

这里  $\varphi_i(x, \tau)$  表示每种费米粒子的概率密度, 在动量空间上可展开为

$$\varphi_i(x, \tau) = (\beta L)^{-1/2} \sum_k b_i(k) e^{ikx}, \quad (5)$$

通过辅助玻色场可将费米场作用项展开, 我们考虑  $\varphi_i(x, \tau) = \varphi$  为常数的情况, 动量空间上  $b(0) = (\beta L)^{1/2} \varphi$ , 这里  $\varphi$  表示凝聚密度. 当温度  $T \ll 1$  时, 通过傅里叶变换(2a), (2b) 和(5)式可将泛函作用量  $S$  表示为

$$S = S_0 + S_1, \quad (6)$$

式中自由作用量  $S_0$  为

$$S_0 = - \sum_k A^*(k) G_0^{-1}(k, g) A(k), \quad (7)$$

其中传播子为  $G_0(k, g) = G_0(g) G_0(k)$ ,  $G_0^{-1}(g) = \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} dx/L$  是传播子的引力修正项,  $G_0(k) = -1/(k\sigma_3 + m\sigma_1)$  是平直时空下自由传播子, 费米场作用项为

$$\begin{aligned} S_1 = & -\mu \sum_k A^*(k) G_0^{-1}(g) A(k) \\ & -v_0 \sum_k A^*(k) f(g, x_0) \sigma_1 A(k) \\ & -u_0 \sum_k A^*(k) f(g, x_0) A(k) \\ & -\frac{\omega\varphi}{2} \sum_k A^*(k) G_0^{-1}(g) A(k) \\ & -\omega\beta L \varphi^2 G_0^{-1}(g), \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$f(g, x_0) = \int_{x_c+\varepsilon}^{L+x_c+\varepsilon} \sqrt{-g} e^{-i(k-k')x} \times \delta(x - x_0) dx/L$$

为弯曲时空下的背景粒子函数,  $A^*(k) = (a_1^*(k), a_2^*(k))$ ,  $A(k)$  为复共轭矩阵,  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  为泡利矩阵. 在一般耦合情况下泛函行列式无法进行微扰展开, 所以不能直接应用泛函积分方法推导模型的有效势, 这时需要将泛函积分和变分累积展开两种方法相结合, 通过自由能导出变分参量, 并进一步推导出模型的有效势. 在配分函数中引入试探作用量  $S_J$ , 这时配分函数可表示为<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{Z}{Z_0}\right) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S_1 - S_J)^n \rangle_c \\ & + \text{Indet}(I + S_J S_0^{-1}), \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $S_0$  是自由作用量,  $S_1$  是耦合作用量.

$$\langle e^{\xi(S_1 - S_J)} \rangle_{0,J} = \frac{\int \prod_{i=1,2} da_i^*(k) da_i(k) \exp[\xi(S_1 - S_J)] \exp[S_0 + S_J]}{\int \prod_{i=1,2} da_i^*(k) da_i(k) \exp[S_0 + S_J]}, \quad (10)$$

这里  $\xi$  是一般参量, 由(9), (10)式可以得到有效势

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = & \ln\left(\frac{Z}{Z_0}\right) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr}[(S_1 - S_J)(S_0 + S_J)^{-1}]^n \\ & + \ln[\det(I + S_J S_0^{-1})], \end{aligned} \quad (11)$$

根据 Thirring 模型的作用量(7), (8)式, 并且令  $S_J = JS_0$ , 在长波近似  $k = k' = 0$  下可得  $J = v_0 f(g, x_0) G_0(g)/m$ , 于是耦合情况下的有限温度有效势为

$$S_{\text{eff}} = -\omega\beta\varphi^2 L G_0^{-1}(g) + 2\ln\left(1 + \frac{v_0 f(g, x_0)}{m G_0^{-1}(g)}\right)$$

$$\begin{aligned} & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} \\ & \times \left[ \frac{\mu G_0^{-1}(g) + u_0 f(g, x_0) + \frac{\omega\varphi}{2} G_0^{-1}(g)}{m G_0^{-1}(g) + v_0 f(g, x_0)} \right]^{2n}, \end{aligned} \quad (12)$$

有效势保持收敛的条件为

$$\frac{\mu G_0^{-1}(g) + u_0 f(g, x_0) + (\omega\varphi/2) G_0^{-1}(g)}{m G_0^{-1}(g) + v_0 f(g, x_0)} \ll 1, \quad (13)$$

当  $n = 1$  时, 利用条件  $\partial S_{\text{eff}}/\partial\varphi = 0$  可以得到凝聚密度

$$\varphi = \frac{-2(\mu G_0^{-1}(g) + u_0 f(g, x_0))}{\omega G_0^{-1}(g) + 4\beta L(m G_0^{-1}(g) + v_0 f(g, x_0))^2}. \quad (14)$$

### 3. 黑洞背景下的能量密度涨落

引力背景下物质的能量密度为<sup>[10]</sup>

$$\rho(\beta, g) = -\frac{1}{L} \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \beta}. \quad (15)$$

由(12), (14)和(15)式可得

$$\rho(\beta, h) = \frac{4\omega G_0^{-1}(g)L(\mu G_0^{-1}(g) + u_0 f(g, x_0))^2}{[\omega G_0^{-1}(g) + 4\beta L(m G_0^{-1}(g) + v_0 f(g, x_0))^2]^2}, \quad (16)$$

上式表示存在度规扰动  $h$  时费米物质的能量密度<sup>[12,13]</sup>, 当  $h=0$  得到

$$\rho(\beta, 0) = \frac{4\omega L\left(\mu + \frac{u_0}{L}\right)^2}{\left[\omega + 4\beta L\left(m + \frac{v_0}{L}\right)^2\right]^2}, \quad (17)$$

表示度规没有扰动时的物质的能量密度. 所以费米物质的能量密度涨落为

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho(\beta, h) - \rho(\beta, 0)}{\rho(\beta, 0)}. \quad (18)$$

#### 3.1. 点物质黑洞外费米物质的能量密度涨落

考虑二维静态时空度规

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha(x) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(x) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

这里  $\alpha(x)$  为度规因子, 点物质的密度和压强分别为

$$\rho = \frac{M}{2\pi G} \delta(x), \quad p = 0, \quad (20)$$

$M$  是密度参量, 通过场方程可得到点物质度规因子为<sup>[14]</sup>

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2}\Lambda x^2 + 2M|x| - c, \quad (21)$$

上式中  $c$  是常数. 下面对宇宙常数  $\Lambda=0$  时的情况进行了讨论, 将(21)式代入(19)式中得到二维度规

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2M|x| + c + h & 0 \\ 0 & (2M|x| - c)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中  $h$  表示时空度规上一个微小扰动.

通过对度规(22)式分析可知, 在  $|x|_c = c/2M \neq 0$  处, 二维时空曲率不发散, 而  $x=0$  处的奇异性是时空本身的内禀属性, 所以这一度规描写点物质黑洞.

由于  $h$  为微小扰动, 通过(22)式得到传播子修正部分

$$G_0^{-1}(g) \approx 1 - \frac{h}{4ML} \ln\left[\frac{L+\varepsilon}{\varepsilon}\right], \quad (23)$$

背景粒子函数变为

$$f(g, x_0) \approx \frac{1}{L} \left(1 - \frac{h}{2Mx_0 - c}\right). \quad (24)$$

为了对耦合模型进行定量计算并满足收敛条件(13)式的要求, 各物理量取为  $\varepsilon=1/100, L=50, u_0=2, v_0=3, \omega=\pm 2, m=10, \beta=1/3, \mu=2, c=1, x_0=25$ , 黑洞密度参量范围为  $M=[100, 200]$ , 度规涨落取在  $h=[10^{-1}, 10^{-2}]$  范围内. 数值计算给出能量密度涨落  $\delta\rho/\rho$  与黑洞密度参量  $M$  和度规扰动  $h$  的关系, 如图1所示.

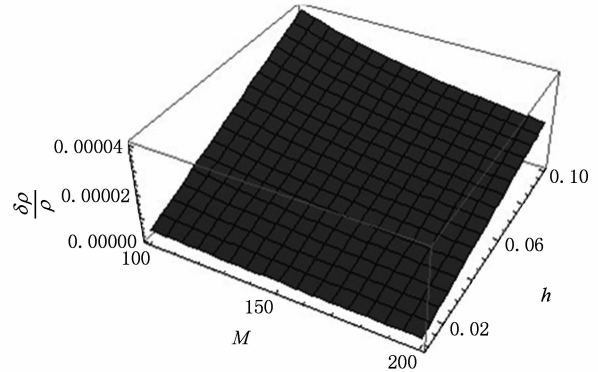


图1 点物质黑洞外费米物质的能量密度涨落

通过图形发现  $\delta\rho/\rho \approx 10^{-5}$  当黑洞密度参量越小, 度规涨落越大时, 费米物质的能量密度涨落越明显, 当黑洞密度参量很大时, 相对密度涨落趋近于0.

#### 3.2. dilaton 黑洞外费米物质的能量密度涨落

二维 dilaton 引力模型的作用量为<sup>[15]</sup>

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} \left\{ \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + \psi R + 2b(\nabla\phi)^2 - 8\pi G \left[ -f(\phi)\Lambda + \frac{1}{4}h(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \right\}. \quad (25)$$

这里  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  是电磁场张量,  $\psi$  是辅助场,  $\phi$  是 dilaton 场,  $h$  和  $f$  是  $\phi$  的势函数,  $G$  是牛顿

常数,  $b$  和  $\Lambda$  为耦合常数.

现在考虑这样一种情况, 当 dilaton 黑洞电荷  $Q = 0$ , 即无电磁场作用时, 取势函数为  $f = e^{-2a\varphi} b/a^2 = 1/3$ , 通过 dilaton 场方程可以得到度规因子为

$$\alpha(x) = x - \frac{M^2}{x}, \quad (26)$$

式中  $M^2 = 2M_0$ ,  $M_0$  为黑洞的 ADM 质量. 由 (19) 式得到扰动度规

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -x + \frac{M^2}{x} + h & 0 \\ 0 & (x - \frac{M^2}{x})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

通过分析可知 dilaton 黑洞的视界位于  $x_c = M$  处,  $x = 0$  处为黑洞的奇点. 由 (27) 式可得 dilaton 黑洞下传播子的引力修正

$$G_0^{-1}(g) \approx 1 - \frac{h}{4L} \ln \left[ \frac{M^2 - (L + M + \varepsilon)^2}{M^2 - (M + \varepsilon)^2} \right]. \quad (28)$$

背景粒子函数  $f(g, x_0)$  为

$$f(g, x_0) \approx \frac{1}{L} \left( 1 - \frac{x_0 h}{2(x_0^2 - M^2)} \right). \quad (29)$$

为了对两种黑洞进行比较并满足收敛条件 (13) 式, 取  $\varepsilon = 1/100$ ,  $L = 50$ ,  $u_0 = 2$ ,  $v_0 = 3$ ,  $\omega = \pm 2$ ,  $m = 10$ ,  $\beta = 1/3$ ,  $\mu = 2$ ,  $c = 1$ ,  $x_0 = 125$  黑洞质量范围为  $M_0 = [100, 200]$ , 度规扰动取  $h = [10^{-1}, 10^{-2}]$  范围内. 数值计算给出能量密度涨落  $\delta\rho/\rho$  与黑洞质量  $M_0$  和度规扰动  $h$  的关系, 如图 2 所示.

通过图形发现  $\delta\rho/\rho \approx 10^{-3}$ , 这一数值远大于点物质黑洞外费米物质能量密度涨落, 密度涨落随 dilaton 黑洞质量和度规的变化规律与点物质黑洞情况类似, 黑洞质量越小度规扰动越大, 费米物质的能量密度涨落越明显. 不同的是当黑洞质量很大时, dilaton 黑洞外费米物质的相对密度涨落趋近于一个定值.

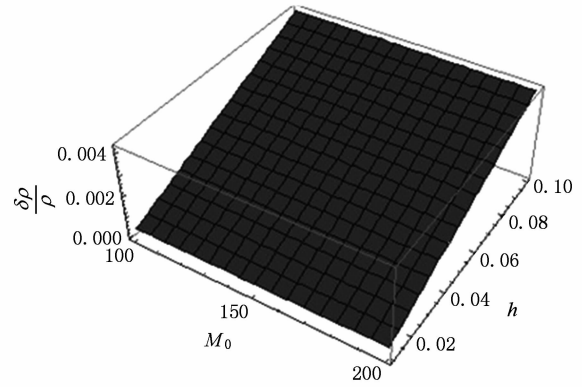


图2 dilaton 黑洞外费米物质的能量密度涨落

#### 4. 结论与讨论

通过能量密度涨落  $\delta\rho/\rho$  的图形可以看出, 二维 dilaton 黑洞外物质涨落大于在相同物理条件下的点物质黑洞涨落. 当 dilaton 黑洞的质量达到一定时, 费米物质的密度涨落不再随黑洞质量发生变化, 而点物质黑洞外费米物质的密度涨落与黑洞密度参量变化成反比形式并趋于无限小, 因此 dilaton 场对黑洞视界外物质的涨落有比较大的影响. 由于泛函积分方法可推广到四维黑洞模型, 本文的研究结果具有一定的示范作用, 可以为四维 Schwarzschild 黑洞与暗能量黑洞外物质涨落效应的研究提供理论基础. 在前面的工作中曾研究了非对易几何效应对宇宙和黑洞物质能量密度涨落的影响. 这些密度涨落可能具有一些观测效应<sup>[16,17]</sup>. Vasiliev 和 Zelnikov 等人分析了黑洞周围暗物质湮灭现象, 认为辐射能谱可作为观测暗物质和黑洞的新实验手段<sup>[18-20]</sup>. 希望本文的研究方法和结果能为深入理解黑洞与物质相互作用机理提供一种新的思路.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333  
 [2] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2752  
 [3] t' Hooft G 1985 *Nucl. Phys. B* **256** 727  
 [4] Zhao Z, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1558 (in Chinese)  
 [赵 峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]  
 [5] Luo Z J, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395 (in Chinese)  
 [罗智坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]  
 [6] Shen Y G, Chen D M 1999 *Acta Astron. Sin.* **40** 38 (in Chinese) [沈有根、陈大明 1999 天文学报 **40** 38]

[7] Popov V N 1983 *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Dordrecht: Reidel Publishing Company) p1  
 [8] Popov V N 1987 *Functional Integrals and Collective Excitations* (Cambridge: Cambridge University Press) p3  
 [9] Yan J 2008 *Commun. Theor. Phys.* **50** 893  
 [10] Yan J 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 653  
 [11] He T M, Fan J H, Wang Y J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2321  
 [12] Tian G H, Wang S K, Zhao Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1430

- [13] Mi L Q, Li Z H 2006 *Chin. Phys.* **15** 1184
- [14] Mann R, Shiekh A, Tarasov L 1990 *Nucl. Phys. B* **341** 134
- [15] Mann R 1993 *Phys. Rev. D* **47** 4438
- [16] Kersting N, Yan J 2008 *Mod. Phys. Lett. A* **23** 3341
- [17] Yan J 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 445
- [18] Zelnikov M I, Vasiliev E A 2005 *Int. J. Mod. Phys. A* **20** 4217
- [19] Vasiliev E A 2007 *Phys. Rev. D* **76** 103532
- [20] Liu L, Pei S Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4980 (in Chinese) [刘辽、裴寿镛 2006 物理学报 **55** 4980]

## Calculation of energy density fluctuations for Fermi matter on black hole background\*

Zou Bo-Xia Yan Jun<sup>†</sup> Li Ji-Gen

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

(Received 18 September 2009; revised manuscript received 2 March 2010)

### Abstract

In this paper, the propagator and the effective potential in quantum Thirring model are derived by using the functional integral method, and the energy density fluctuations for coupled Fermi matter are calculated in two-dimensional point matter black hole and dilaton black hole models separately. We find that energy density fluctuation outside dilaton black hole is stronger under the same physical conditions.

**Keywords:** functional integrals, Thirring model, black hole, energy density fluctuations

**PACC:** 0460, 0470

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Sichuan Education Committee, China (Grant No. 08ZA038).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yanjun5@sina.com