

分段线性混沌电路的非光滑分岔分析*

季 颖 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2010 年 2 月 22 日收到; 2010 年 3 月 17 日收到修改稿)

讨论了分段线性的电容混沌电路的动力学行为. 由数值模拟得到了对称的周期解和混沌吸引子. 通过引入广义 Jacobian 矩阵, 以周期解为例, 从理论上分析了系统由电容电量的分段线性而引起的非光滑分岔, 并合理解释了系统动力学行为产生的机理及其演化规律, 其结论与数值计算的结果大致符合.

关键词: 分段线性混沌电路, 非光滑分岔, 加周期分岔

PACC: 0545

1. 引 言

混沌电路由于在实验上比较容易构建, 同时也可以作为分析混沌同步、混沌控制等的测试平台, 其动力学行为一直是国内外研究的热点课题之一^[1,2]. 另外, 混沌电路相对容易建立相应的数学模型, 从而可以开展相关的理论分析和数值仿真, 并进一步和实验结果比较, 所以近年来取得了大量的研究成果^[3-5]. 作为具有代表性的混沌电路, 蔡氏电路形式简单, 通过一个三维的向量场, 其模型中的各种复杂现象已经被深刻地揭示出来, 并得到实验的证实^[6,7]. 在此基础上, 人们通过改变其中的部分结构, 得到了许多形式更为广泛的混沌电路, 有在非线性的拓展^[8], 也有在维数上的扩大^[9], 这些改变后的电路不仅包含更为丰富的非线

性特性, 同时也具有更为广泛的应用背景. 各国学者从理论和实验等多个方面对各种形式的广义蔡氏电路进行了大量的研究工作, 揭示了许多诸如超混沌、混沌同步、混沌危机以及多涡卷混沌吸引子等复杂特性. 在实际电路系统中往往存在开关、阈值、脉冲控制、数字控制等大量非光滑因素, 但是针对其非光滑性, 如分段线性的分岔分析较为少见. 而非光滑系统会带来许多新的研究特点, 例如向量场的不可微性或间断性导致的强非线性和奇异性等^[10,11]. Gao 等曾讨论了一类非线性电容双涡卷混沌电路的 Hopf 分岔^[12], 其电路如图 1(a) 所示, 该电路由一个电感 L , 一个线性电阻 G , 一个线性负电阻 G_0 , 一个线性电容 C_2 和一个非线性电容 C_1 组成. Wang 等则将该电路系统中非线性因素由原来的立方特性改为分段线性, 即 C_1 上 $q-v$ 关系曲线如图 1(b) 所示^[13].

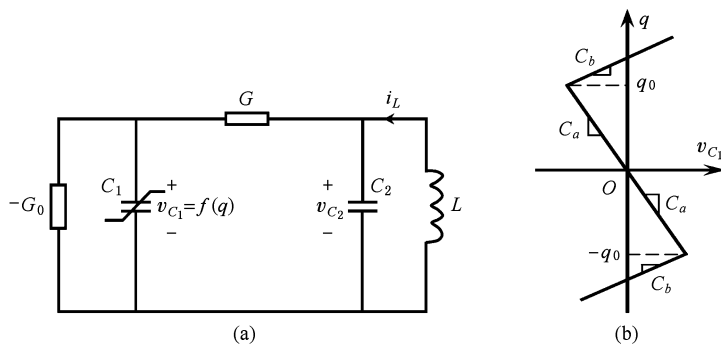


图 1 (a) 三阶自治电路模型; (b) 电容 C_1 的 $q-v$ 关系曲线

* 国家自然科学基金(批准号: 10972091, 10872080)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

根据电路理论,该电路的动力学行为可由如下数学模型刻画^[13]:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= (G_0 - G)v_{c_1} + Gv_{c_2}, \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= Gv_{c_1} - Gv_{c_2} + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 q 为电容 C_1 上的电量, i_L 通过电感 L 的电流, v_{c_1} 和 v_{c_2} 则为分别为 C_1, C_2 两端的电压, 并且 $v_{c_1} = f(q) = \frac{1}{C_b}q + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_b} - \frac{1}{C_a}\right)(|q - q_0| - |q + q_0|)$. 引入归一化因子 C 和 q_0 , 并作如下变换: $x = q/q_0, y = v_{c_2}/(q_0/C), z = i_L/(q_0G/C), \tau = t/(C_2/G), \alpha = C_2/C, \beta = C_2/LG^2, \gamma = G_0/G$, (1) 式可表示为下式所示的无量纲化形式^[13]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[(\gamma - 1) \cdot g(x) + y], \\ \dot{y} &= g(x) - y + z, \end{aligned}$$

$$\dot{z} = -\beta y, \tag{2}$$

其中 $g(x) = bx + \frac{1}{2}(b - a)(|x - 1| - |x + 1|)$, 且 $a = C/C_a, b = C/C_b$.

式中 α, β, γ 及 a, b 均为无量纲参数, 其数值的变化综合反映了电路中实际元件参数的变化.

由于 $g(x)$ 是一个分段线性的非光滑函数, 控制向量场的方程会在分段点发生质的变化, 正是这一变化导致了整个振荡的复杂性. 基于这样的背景, 本文着重讨论系统(2)的非光滑分岔.

2. 对称的周期解和混沌吸引子

为了揭示系统动力学行为演化的规律和机理, 我们取定参数 $a = -1.5, b = 0.2, \alpha = 20.0, \gamma = 0.05$, 并将 β 作为分岔参数, 即以 β 的数值变化反映电路中实际元件参数的变化. 图 2 分别给出了 $\beta = 0.200$ 及 $\beta = 0.305$ 时系统(2)的相图.

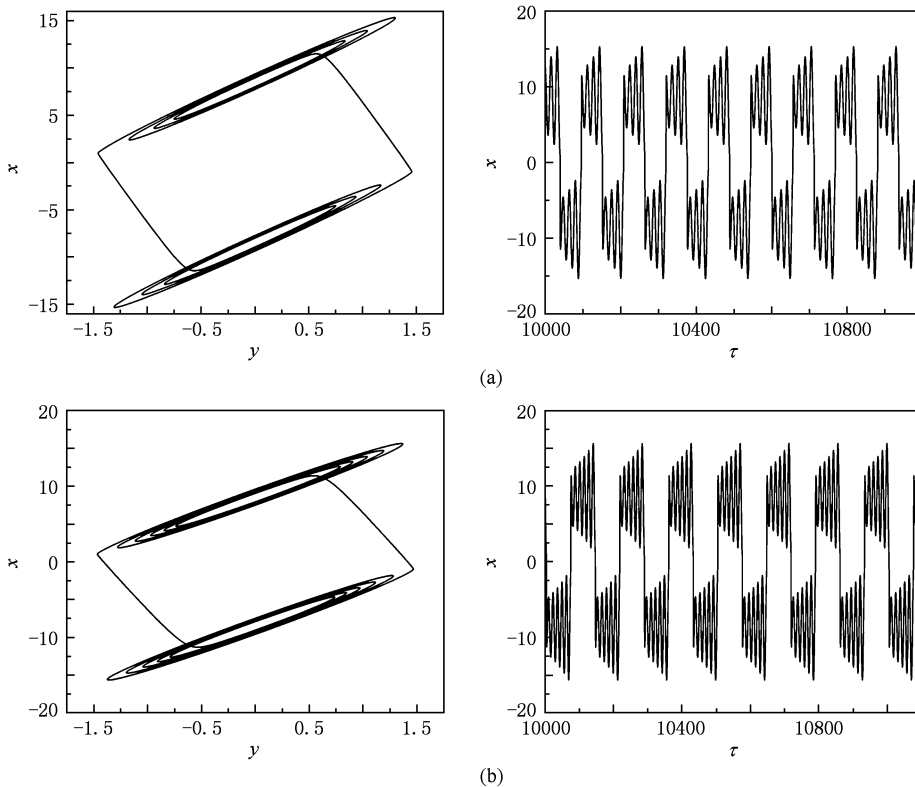


图 2 β 取不同值时系统(2)的相图 (a) $\beta = 0.200$; (b) $\beta = 0.305$

从图上我们看到, $\beta = 0.200$ 时, 系统作周期振荡, 相轨迹关于原点对称. 当 β 增大至 0.305 时, 系统仍围绕两个对称的吸引子做周期振荡. 结合相应

的时间历程可知, 在这两个不同的参数条件下, 系统均作周期运动. 但是随着 β 的增大, 系统在对称吸引子附近的振荡加快 ($\beta = 0.200$ 时, $\omega \approx 0.366; \beta$

$= 0.305$ 时, $\omega \approx 0.483$), 且次数增多.

随着分岔参数的增大, 系统在对称的吸引子附近作周期振荡的角频率和次数进一步增加 ($\beta = 0.448$ 时, $\omega \approx 0.569$), 并在 $\beta = 0.450$ 时通过周期窗口走向混沌 (如图 3). 值得注意的是, 无论是周期运动还是混沌运动, 系统的相轨迹都保持较好的对

称性, 且均在 $x = \pm 1.0$ 处发生转折. 这是因为系统 (2) 在变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ 下, 形式保持不变, 即向量场关于原点对称. 同时由于 $g(x)$ 的分段线性, 系统的动力学行为在分段点发生了突变, 而使得相轨迹在此发生转折. 下面我们着重分析系统的非光滑分岔及其对动力学行为产生的影响.

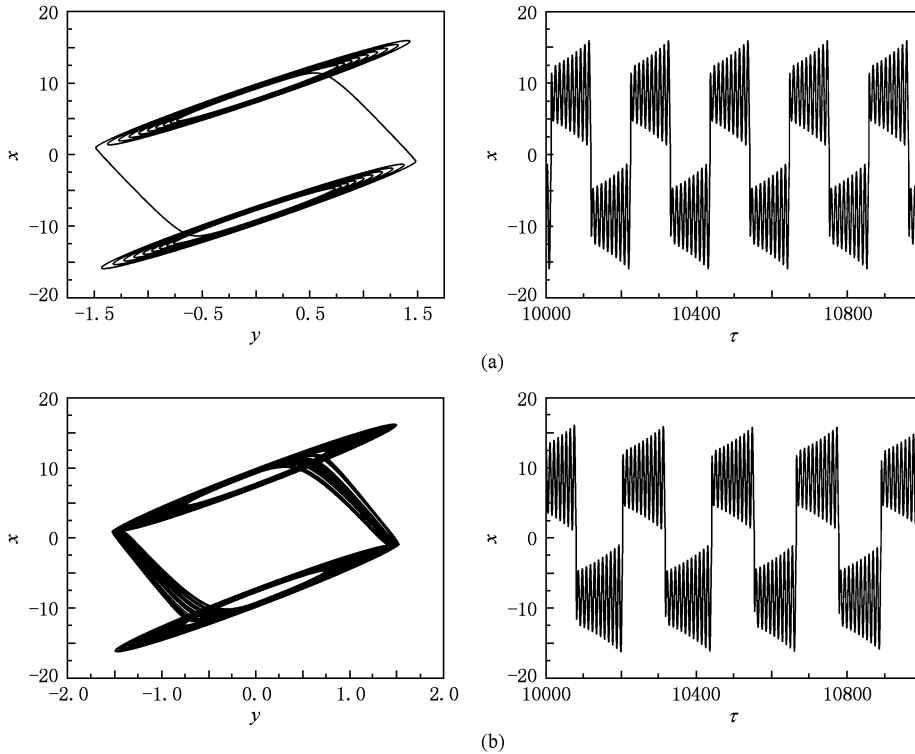


图 3 β 增大时系统(2)的相图 (a) $\beta = 0.448$; (b) $\beta = 0.450$

3. 非光滑分岔分析

我们先分析一下系统平衡点的稳定性. 由于 $g(x)$ 的分段线性, 系统(2)的向量场存在两条临界线 $\Sigma_{1,2} = \{x = \pm 1.0\}$, 因而在不同的区域, 平衡点的表达形式有所不同, 具体为

$$-1.0 < x < 1.0 \text{ 时, } E_0 = (0, 0, 0),$$

$$x > 1.0 \text{ 时, } E_+ = \left(\frac{b-a}{b}, 0, 0 \right),$$

$$x < -1.0 \text{ 时, } E_- = \left(-\frac{b-a}{b}, 0, 0 \right).$$

E_0 及 E_{\pm} 的性质则由各自的 Jacobian 矩阵 J_0, J_{\pm} 所对应的特征值决定, 其中

$$J_0 = \begin{vmatrix} \alpha(\gamma-1)a & \alpha & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{vmatrix},$$

$$J_{\pm} = \begin{vmatrix} \alpha(\gamma-1)b & \alpha & 0 \\ b & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{vmatrix}.$$

以图 2 (a) 所示的参数条件为例分析平衡点的稳定性. 此时

$$J_0 = \begin{vmatrix} 28.5 & 20.0 & 0 \\ -1.5 & -1 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1^0 = 27.4456,$$

$$\lambda_{2,3}^0 = 0.0272 \pm 0.4549i,$$

$$J_{\pm} = \begin{vmatrix} -3.8 & 20.0 & 0 \\ 0.2 & -1 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1^{\pm} = -4.8325,$$

$$\lambda_{2,3}^{\pm} = 0.0163 \pm 0.3962i.$$

由以上特征值可知, 这三个平衡点都是不稳定

的焦点. 下面着重讨论系统在临界线处的非光滑分岔, 并由此分析周期解的产生机理.

系统(2)的向量场虽然非光滑, 但依然保持连续性, 所以利用广义 Clarke 导数得到一个广义 Jacobian 矩阵, 表示为 $J(\pm 1) = \{qJ_0 + (1-q)J_{\pm}, \forall q \in [0, 1]\}^{[14]}$. 以 q 为参数, 可以得到 $J(\pm 1)$ 的特征值随 q 变化的曲线. 当 $\beta = 0.200$ 时, 该曲线如图 4 所示.

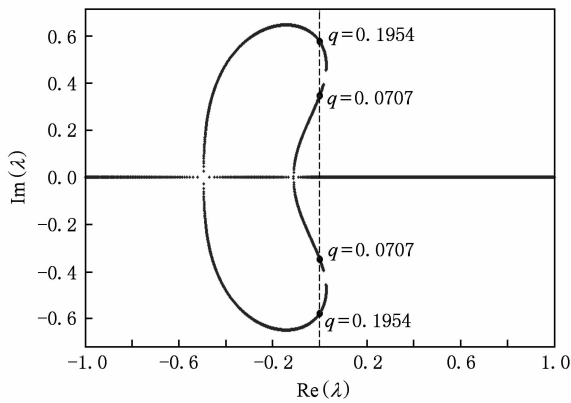


图 4 $\beta = 0.200$ 时广义 Jacobian 矩阵的特征值曲线

从图上可以看到特征值曲线多次穿越虚轴. 这种非光滑分岔被称为多次穿越分岔 (multiple crossing bifurcation), 亦即 Hopf 分岔和转点分岔 (turning point bifurcation) 的复合^[14]. 这里对于系统(2), 由 Hopf 分岔起主要作用, 即系统在临界线 $\Sigma_{1,2} = \{x = \pm 1.0\}$ 处发生 Hopf 分岔, 由不稳定的焦点分岔得到稳定的极限环, 其角频率约为 $\omega_1 = 0.348$ ($q = 0.0707$ 时, $\lambda = \pm 0.348i$) 或 $\omega_2 = 0.576$ ($q = 0.1954$ 时, $\lambda = \pm 0.576i$). 结合图 2 所示的数值模拟的结果, 系统在 E_{\pm} 附近振荡, 其角频率约为 $\omega = 2\pi/T \approx 0.366$, 意味着由非光滑分岔产生的极限环的角频率应取 $\omega_1 = 0.348$. 下面我们就以 $\beta = 0.200$ 时得到的周期解 (见图 5) 为例分析其动力学行为产生的机理.

设相轨迹由 A 点出发, 且 A 点位于临界线 Σ_1 上. 这时在 Σ_1 的上方附近, 平衡点是一个不稳定的焦点, 而其下方则是一个由不稳定焦点经非光滑分岔产生的稳定的极限环. 所以相轨迹被稳定的极限环吸引, 由 A 点下行 (如箭头所示), 并围绕该极限环运动, 角频率为 $\omega = 0.348$. 当轨迹运行至 B 点 (B 点位于临界线 Σ_1 上) 时, 系统发生非光滑分岔, Σ_1 下方的稳定极限环消失, 相轨迹不再围绕其运动,

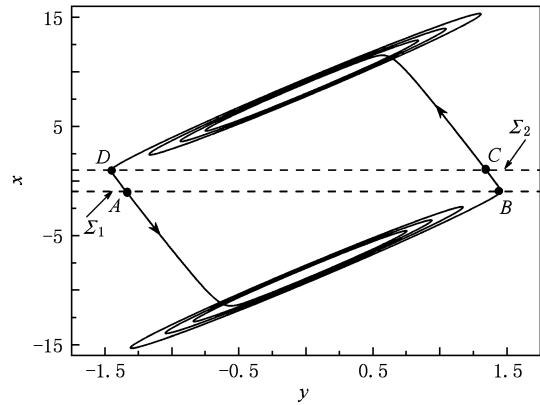


图 5 $\beta = 0.200$ 时的周期吸引子 (箭头表示轨迹绕行方向, 虚线为临界线)

并且由于 $-1.0 < x < 1.0$ 时, 相应的平衡点是一个不稳定焦点, 轨迹发散出去. 但很快当其运行到 C 点, 遇到临界线 Σ_2 时, 系统又发生非光滑分岔, 由不稳定焦点分岔得到稳定的极限环. 从而相轨迹被 Σ_2 上方的极限环吸引, 以角频率 $\omega = 0.348$ 环绕其振荡. 由于系统的对称性, 其在 Σ_2 上方的动力学行为与在 Σ_1 下方类似. 即系统围绕极限环振荡, 及至相轨迹运行至位于临界线 Σ_2 上的 D 点, 再次发生非光滑分岔, Σ_2 上方的稳定极限环消失, 轨迹运动至 A 点, 从而完成一个周期的振荡.

下面, 仍通过非光滑分岔来分析系统在对称吸引子附近的振荡随着 β 的增大而加快并且次数增多的现象.

以相同的方法得到了不同参数时的广义 Jacobian 矩阵及其特征值曲线 (曲线与图 4 相似, 在此从略). 分析曲线可知, 其非光滑分岔仍为多次穿越分岔. 但是随着参数 β 的变化, 该复合分岔中的 Hopf 分岔产生的频率是不同的 (详见表 1).

表 1 β 取不同值时非光滑分岔得到的极限环频率

$\beta = 0.200$	$\beta = 0.305$	$\beta = 0.448$
$q_1 = 0.0707,$ $\omega_1 = \pm 0.348i$	$q_1 = 0.0569,$ $\omega_1 = \pm 0.450i$	$q_1 = 0.0442,$ $\omega_1 = \pm 0.545i$
$q_2 = 0.1954,$ $\omega_2 = \pm 0.576i$	$q_2 = 0.2092,$ $\omega_2 = \pm 0.673i$	$q_2 = 0.2219,$ $\omega_2 = \pm 0.766i$

同上分析可知, 当 $\beta = 0.305$ 和 0.448 时, 系统(2)在临界线处由非光滑分岔产生的稳定极限环的

角频率应分别取为 $\omega = 0.450$ 和 $\omega = 0.545$. 该结果表明 β 增大时, 系统(2) 环绕极限环振荡的角频率将随之增加, 即系统在对称的吸引子附近振荡加快, 且其角频率大小与上节数值计算的结果基本符合.

另外, 可以运用等效线性化方法^[15] 得到非线性系统(2) 的等效线性系统, 并由此可知系统的固有频率会随分岔参数 β 的增大而减小, 意味着系统作周期振荡的一个完整周期的长度将随 β 的增大而增加, 亦即整个周期运动变慢. 而与之相反的是, 系统在两个对称吸引子附近的分振荡会随 β 的增大而加快. 所以, 随着分岔参数 β 的增大, 系统的动力学行为发生加周期分岔, 从而导致上节数值模拟中所出现的分振动次数增加的现象.

4. 结 论

基于非线性电容混沌电路, 着重讨论系统动力学行为的非光滑分岔. 由于电路本身的对称性, 其向量场及动力学行为也是对称的. 而电路元件的特性存在分段线性, 使得整个非线性电路的动力学行为在分段点发生质的变化, 并且其分岔机理不同于光滑动力系统. 通过引入广义 Jacobian 矩阵, 从理论上分析了系统在临界线处发生的非光滑分岔, 确定了其分岔类型, 即多次穿越分岔, 由此解释了系统周期解产生的机理及其动力学行为随参数变化而产生的诸如振荡加快和加周期分岔等现象, 并与数值模拟的结果基本符合.

-
- [1] Bartissol P, Chua L O 1988 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **35** 1512
 - [2] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in chinese) [于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
 - [3] Bai E W, Lonngren K E, J C 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 1515
 - [4] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
 - [5] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
 - [6] Matsumoto T 1984 *IEEE Trans. Circ. Syst.* CAS-31 1055
 - [7] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. Circuits Syst.* CAS-33 073
 - [8] Chua L O, Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37** 885
 - [9] Stouboulos I N, Miliou A N, Valaristos A P, Kyprianidis I M, Anagnostopoulos A N 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **33** 1256
 - [10] Nordmark A 1997 *Physical Review E* **55** 62
 - [11] Lu Q S, Zhang S J, Jin L 2004 *Dynamica of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms* **11A** 171
 - [12] Gao J F, Ma X K, Luo X J 2001 *Transactions of China Electrotechnical Society* **16** 75 (in Chinese) [高金峰、马西奎、罗先觉 2001 电工技术学报 **16** 75]
 - [13] Xuemei Wang, Bo Zhang 2007 *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics Jinan, China August* 2462
 - [14] Leine R I, Campen D H 2006 *European Journal of Mechanics A/ Solids* **25** 595
 - [15] Chen Y S, Leung A Y T, *Bifurcation and Chaos in Engineering* Springer, London, 1998

Non-smooth bifurcation analysis of a piecewise linear chaotic circuit *

Ji Ying Bi Qin-Sheng[†]

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

(Received 22 February 2010; revised manuscript received 17 March 2010)

Abstract

The dynamics of a nonlinear capacitor circuit is investigated in this paper. The symmetric periodic solution and the chaotic attractor can be observed in numerical simulations. Furthermore, the generalized Jacobian matrix at the non-smooth boundaries is introduced to explore the non-smooth bifurcation mechanism for the periodic solutions. Discontinuous bifurcation in the combination of the Hopf bifurcation and the turning point bifurcation occurs at the non-smooth boundaries. Here, the Hopf bifurcation may result in a new frequency, which leads to periodic oscillation. With the variation of the parameter, the periodic symmetric solution oscillates more quickly, which can also be explained through non-smooth bifurcation, and the conclusion accord well with the numerical results.

Keywords: piecewise linear chaotic circuit, non-smooth bifurcation, period-adding bifurcation

PACC: 0545

* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 10972091, 10872080).

[†] Corresponding author. E-mail: qbi@ujs.edu.cn