第 59 卷 第 11 期 2010 年 11 月
1000-3290/2010/59(11)/7618-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 11, November, 2010

异构二维延迟系统的广义混沌同步*

桑金玉 王 娇 岳立娟†

(东北师范大学物理学院,长春 130024)

(2010 年 2 月 3 日收到;2010 年 3 月 4 日收到修改稿)

基于泛函微分方程稳定性理论,利用广义混沌同步辅助分析方法,对两个异构二维延迟系统实现了广义混沌同步. 与其他广义同步方法相比较,我们所使用的方法更为简便,理论分析和数值模拟证明了设计方案的有效性.

关键词: 二维延迟系统, 广义混沌同步, 辅助分析法
PACC: 0545

1. 引 言

混沌同步在工程技术上具有重要价值和较广阔的应用前景,它一直是非线性科学领域的研究热点之一. 自 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出混沌同步,并在电路实验中实现了耦合混沌系统的自同步以来[1,2],混沌同步的方法不断涌现,如主动-被动同步方法[3]、变量反馈同步方法[4]、自适应同步法[5,6]以及脉冲同步法[7,8]等,这些方法都属于混沌完全同步的范畴,此外还有广义同步法[9—14]. 广义混沌同步是指响应系统的状态变量与驱动系统的状态变量的函数之间的同步,是完全同步的一种推广,完全同步是广义同步的一个特例. 以上方法均是在研究非延迟系统的同步问题提出来的,由于延迟系统较非延迟系统的动力学特性更为复杂,也就较难实现同步. 自 Mackey 和 Glass 在延迟系统中发现混沌现象[15]到现在,研究延迟系统的同步文献[16—20]相对较少,而且关于延迟系统混沌同步的研究大部分是针对一维延迟系统进行的. 对于有限维系统,经常把条件 Lyapunov 指数小于零作为混沌同步的一个判据. 然而对于延迟系统,目前还没有定义条件 Lyapunov 指数,因此不能轻易使用它来判断延迟系统是否同步. 但是,由于我们研究的延时系统的完全同步均可化为相应误差系统在零点的渐进稳定性来考虑,于是泛函微分方程的稳定性理论就可以作为完全同步的判定基础. 本文基于泛函微分方程的稳定性理论,利用广义混沌同步的辅助分析法,实现了两个异构二维延迟系统的广义混沌同步. 通过数值模拟,进一步验证了方案的有效性. 该方法易于实现,具有很高的实用价值.

2. 延迟系统的广义混沌同步方案

2.1. 广义混沌同步问题描述及稳定性判定

定义 考虑如下驱动系统 $X(t)$ 和响应系统 $Y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = F(X(t)), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} = G(Y(t), L, X(t)), \tag{2}$$

其中 $x \in R^n, y \in R^m$, 若存在变换 $\varphi: R^n \to R^m$, 流形 $M = \{(x, y): y = \varphi(x)\}$, 子集 $B = B_x \times B_y \subset R^n \times R^m$, 且 $M \subset B$, 使得对于初始条件在 B 中的响应系统(2)的轨道当 $t \to +\infty$ 时都趋于 M, 则称系统(1)和(2)通过变换 $y = \varphi(x)$ 达到广义同步. 当 $L = 0$ 时, 响应系统 $G(Y(t), 0, X(t))$ 与驱动变量 $X(t)$ 无关, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 将独立的在空间内演化.

定理[21] 如果存在常值系数矩阵 $K, K_i \in R^{p\times n}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ 及正定矩阵 P, M_1, M_2, M_m, M 使得

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1m+1} \\ u_{12} & -M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{13} & 0 & -M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1m+1} & 0 & 0 & \cdots & -M_m \end{pmatrix} < 0, \tag{3}$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10847110)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ljyue@ nenu. edu. cn

其中 $u_{11} = (A - BK)^T P + P(A + BK) + \sum_{i=1}^{m} M_i, u_{1i+1} = \dfrac{P(B_i - BK_i) + (B_i - BK_i)^T P}{2}$, $i = 1,2,\cdots m$. 则 $e(t) = 0$ 是

$$\dot{e} = (A - BK)e(t) + \sum_{i=1}^{m}(B_i - BK_i)e(t - \tau_i) \tag{4}$$

的全局指数渐进稳定平衡点. 其中常系数矩阵 $A, B_i \in R^n \times R^n$, $B \in R^n \times R^p$, $i = 1,2,\cdots m$.

2.2. 广义混沌同步的原理

建立一个辅助响应系统 $Z(t)$[22],

$$\frac{dZ(t)}{dt} = G(Z(t), L, X(t)), \tag{5}$$

它与响应系统(2)完全相同但初值不同,用同样的信号 $X(t)$ 驱动.

设 $\xi_y = Y(t) - \varphi(X(t))$, $\xi_z = Z(t) - \varphi(X(t))$ 则

$$\frac{d\xi_y}{dt} = DG(\varphi(X(t), K, X(t)) \cdot \xi_y(t), \tag{6}$$

$$\frac{d\xi_z}{dt} = DG(\varphi(X(t), K, X(t)) \cdot \xi_z(t), \tag{7}$$

其中

$$DG(w, K, X(t)) = \frac{\partial G(w, K, X(t))}{\partial w}. \tag{8}$$

因为 ξ_y, ξ_z 的线性方程具有相同的形式,所以线性方程 $\xi_z - \xi_y = Z(t) - Y(t)$ 与其拥有相同的雅可比矩阵. 因此,如果 $Z(t) - Y(t)$ 在空间内是渐进稳定的,$\xi_y = Y(t) - \varphi(X(t))$ 在空间内也是线性稳定的,反之亦然. 即如果响应系统 $Y(t)$ 与辅助响应 $Z(t)$ 达到完全同步,驱动 $X(t)$ 和响应 $Y(t)$ 就达到了广义同步.

3. 二维异构延迟系统的广义混沌同步

异构二维延迟系统,其动力学方程如下式所示[23]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 + bx_2^2 - c, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 - dx_2(t - \tau_1), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -ey_2, \\ \dot{y}_2 &= ey_1 + y_2^2 - fy_2(t - \tau_2), \end{aligned} \tag{10}$$

其中 a, b, c, d, e 和 f 为系统控制参数. 当 $a = 2.5, b = 4, c = 3.9, d = 0.71, e = 1.8, f = 0.43$ 和 $\tau_1 = 2, \tau_2 = 1$ 时,系统(9)和系统(10)处于混沌状态,其吸引子如图 1 和图 2 所示.

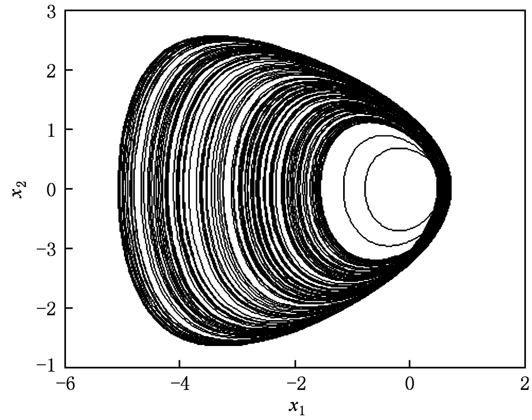

图 1　系统(9)在空间(x_1, x_2)上的混沌吸引子

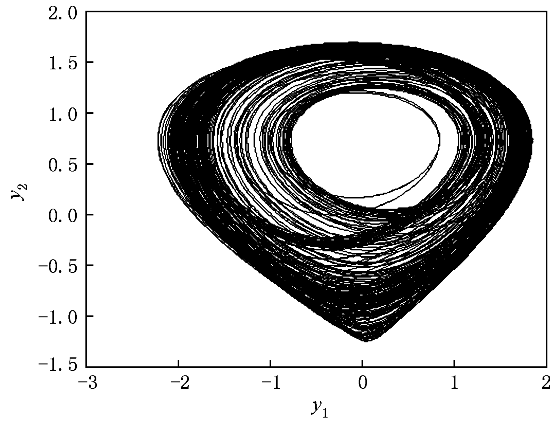

图 2　系统(10)在空间(y_1, y_2)上的混沌吸引子

以系统(9)为驱动系统,系统(10)为响应系统,对这两个系统进行耦合,并将驱动系统改写为

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + B_1X(t - \tau) \\ &\quad + BF(X(t)) + C, \end{aligned} \tag{11}$$

$\dot{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ -2.5 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.71 \end{bmatrix},$

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3.9 \\ 0 \end{bmatrix},$

$F(X) = x_2^2,$

响应系统改写为

$$\dot{Y}(t) = \tilde{A}Y(t) + \tilde{B}_1Y(t - \tau) + \tilde{B}\tilde{F}(Y(t)) + U_1, \tag{12}$$

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1.8 \\ 1.8 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.43 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad U_1 = \begin{bmatrix} -k(y_1 - x_1) \\ x_2^2 - y_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}(Y) = y_2^2 .$$

驱动系统和响应系统通过 x_1, x_2 进行耦合，$-k(y_1 - x_1)$ 和 $x_2^2 - y_2^2$ 为驱动项，其中 k 为耦合强度．当 $k = 15$ 时，在这个耦合系统中，这两个系统不能达到完全同步，我们对这两个系统做广义同步，建立一个辅助响应系统

$$\dot{Z}(t) = \tilde{A} Z(t) + \tilde{B}_1 Z(t-\tau) + \tilde{B} \tilde{F}(Z(t)) + U_2, \tag{13}$$

$$\tilde{F}(Z) = z_2^2, U_2 = \begin{bmatrix} -k(z_1 - x_1) \\ x_2^2 - z_2^2 \end{bmatrix}.$$

做响应系统（12）与辅助响应系统（13）的误差系统得

$$\dot{e}(t) = \tilde{A}_1 e(t) + \tilde{B}_1 e(t-\tau), \tag{14}$$

其中

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A} + \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_i(t) = y_i(t) - z_i(t), (i = 1,2),$$

根据上述定理，如果存在正定矩阵 P, M_1 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1^T P + P\tilde{A}_1 + M_1 & \dfrac{P\tilde{B}_1 + \tilde{B}_1^T P}{2} \\ \dfrac{P\tilde{B}_1 + \tilde{B}_1^T P}{2} & -M_1 \end{bmatrix} < 0 . \tag{15}$$

$e_i(t) = y_i(t) - z_i(t) = 0 (i = 1,2)$ 是（14）式的全局渐进稳定平衡点．通过选取不同的 k 值来改变系数矩阵 $\tilde{A}_1$，使之满足定理的条件．当 $k = 15$ 时，用 Matlab 中的 LMI 工具箱解（15）式得

$$P = \begin{bmatrix} 0.3001 & 0.5612 \\ 0.5612 & 4.4412 \end{bmatrix} > 0,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3.1071 & 0.3654 \\ 0.3654 & 0.9264 \end{bmatrix} > 0,$$

满足定理的成立条件，从而响应系统（12）和辅助响应系统（13）完全同步，即驱动系统（11）和响应系统（12）达到了广义同步．

4. 数值仿真

用 Matlab7.0 对响应系统（12）和辅助响应系统（13）进行同步计算仿真，初始值分别选取为 $y_1(0) = 0.2, y_2(0) = 0.15, z_1(0) = 0.1$ 和 $z_2(0) = 0.3$．响应系统（12）和辅助响应系统（13）同步结果如图 3 所示．误差系统的初始值为 $e_1(0) = 0.1, e_2(0) = -0.15$，两个系统的变量误差为 $e_i(t) = y_i(t) - z_i(t), (i = 1,2), e_i(t)$ 随时间 t 变化情况如 4 所示．可以看到当时间 t 分别接近 3s 和 5s 时，误差 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 已分别稳定在零点，即响应系统（12）和辅助响应系统（13）达到了完全同步．

驱动系统（11）和响应系统（12）的初始值分别选取 $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.2, y_2(0) = 0.15$，在空间$(x_1, y_1)$内的轨迹如图 5 所示．由图 5 可以看出驱动系统（11）和响应系统（12）在空间内的轨迹并不是完全一致的，但是却有一定的规律性，因此系统（11）和系统（12）达到了广义混沌同步．

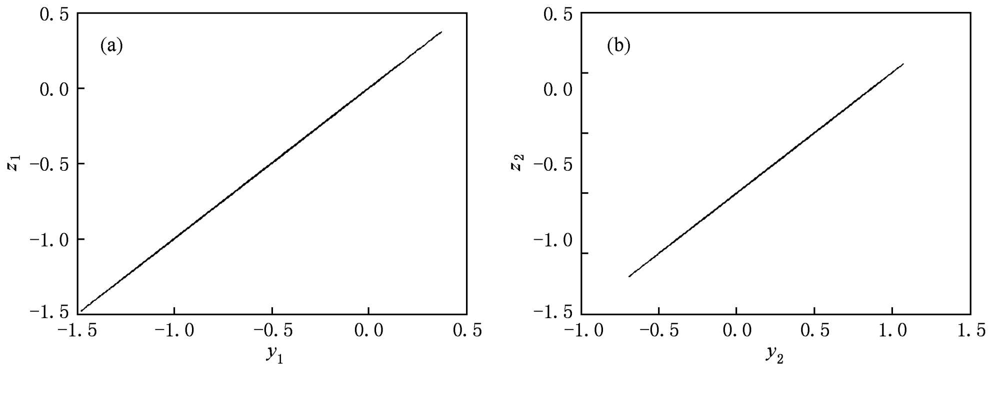

图 3 系统（12）和系统（13）完全同步相图 （a）y_1-z_1 相图；（b）y_2-z_2 相图

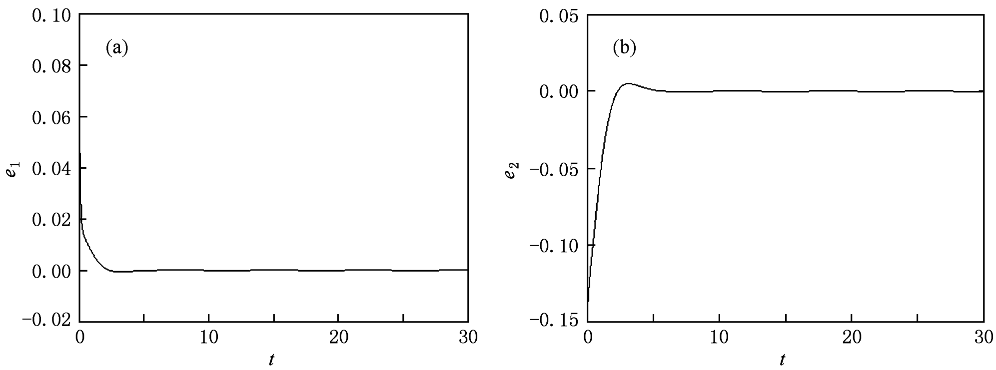

图 4　系统(12)和系统(13)同步误差变化图　(a) e_1-t；(b) e_2-t

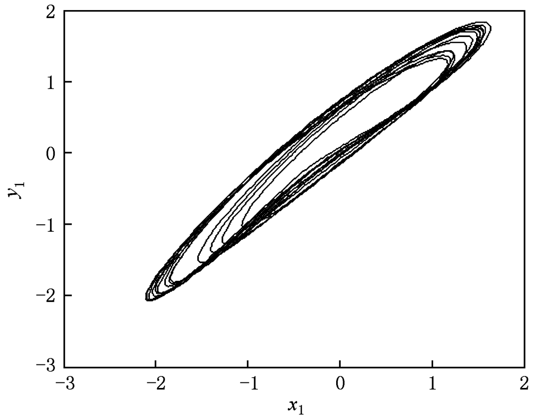

图 5　系统(11)和系统(12)在空间(x_1,y_1)上的吸引子图

5. 总　　结

对于延迟系统,在没有定义条件 Lyapunov 指数的情况下,泛函微分方程的稳定性理论可以作为延迟系统完全同步的判定基础. 由于延迟系统的混沌动力学特性比一般混沌系统更为复杂,也就较难实现延迟系统的同步. 基于泛函微分方程稳定性理论,对两个异构二维延迟混沌系统,利用广义混沌同步的辅助分析法,较好地实现了广义同步. 通过选取不同的系统初值进行数值仿真,进一步证明了所提出的方法不仅是可行的而且是有效的.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
[2] Carroll T L, Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circuit Syst.* **38** 453
[3] Kocarev L, Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5208
[4] Pyragas K. 1993 *Phys. Lett.* A **181** 203
[5] Zhang R X, Yang S P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 20510
[6] Hu J, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 503
[7] Yue L J, Chen Y Y, Peng J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2097 (in Chinese) [岳丽娟、陈艳艳、彭建华 2001 物理学报 **50** 2097]
[8] Yang L B, Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 33 (in Chinese) [杨林保、杨　涛 2000 物理学报 **49** 33]
[9] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
[10] Rulkov N F, Sushchik M M , Tsimring L S , Abarbanel H D I 1995 *Phys. Rev.* E **51** 980
[11] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
[12] Wu Z Q, Kuang Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6823 (in Chinese) [吴忠强、邝　钰 2009 物理学报 **58** 6823]
[13] Guo L X, Xu Z Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6823 (in Chinese) [过榴晓、徐振源 2008 物理学报 **57** 6823]
[14] Hu A H, Xu Z Y, Guo L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6030 (in Chinese) [胡爱花、徐振源、过榴晓 2009 物理学报 **58** 6030]
[15] Mackey M, Glass L 1977 *Science* **197** 287
[16] Anindita T, Poria S, Chatterjee P 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **41** 190
[17] Ghose D, Saha P, Chowdhury A R 2010 *Commom Nonlinear Sci Number Simulat* **15** 1640
[18] Ge Z M, Wong Y T, Li S Y 2008 *Journal of Sound and Vibration* **318** 267
[19] Zhang H G, Ma D Z, Wang Z S, Feng J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 147 (in Chinese) [张化光、马大中、王占山、冯　建 2010 物理学报 **59** 147]
[20] Qi W, Wang Y H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1404
[21] Shu Y L 2004 *Ph. D. Dissertation* (Chongqing: Chongqing University) (in Chinese) [舒永录 2004 博士论文 (重庆: 重庆大学)]
[22] Abarbanel H D I, Rulkow N F, Sushchik M M 1996 *Phys. Rev.* E **53** 4528
[23] Zhang X M 2004 *MS Thesis* (Changchun: Northeast Normal University) (in Chinese) [张晓明 2004 硕士学位论文 (长春: 东北师范大学)]

Synchronization of chaos for two-dimensional time-delayed chaotic systems with different structures*

Sang Jin-Yu Wang Jiao Yue Li-Juan†

(*College of Physics*, *Northeast Normal University*, *Changchun* 130024, *China*)

(Received 3 February 2010; revised manuscript received 4 March 2010)

Abstract

Generalized synchronization of chaos is studied for two-dimensional time-delayed chaotic systems with different structurs. The auxiliary system method and the stability theory of functional differential equations are used. Compared with the conventional generalized synchronization approaches, the proposed method is convenient to realize generalized synchronization of chaos. Simulation results illustrate the validity of the method.

Keywords: two-dimensional time-delayed chaotic systems, generalized synchronization of chaos, auxiliary system method

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10847110).

† Corresponding author. E-mail: ljyue@nenu.edu.cn