

# 基于信息熵优化相空间重构参数的 混沌时间序列预测\*

张春涛<sup>1)2)†</sup> 马千里<sup>1)</sup> 彭 宏<sup>1)</sup>

1)(华南理工大学计算机科学与工程学院, 广州 510006)

2)(重庆三峡学院数学与计算机科学学院, 重庆 404000)

(2010 年 1 月 28 日收到; 2010 年 2 月 23 日收到修改稿)

提出一种混沌时间序列相空间重构参数的信息熵优化方法(IEOP), 该方法首先使用条件熵表示信息量, 建立时间延迟和嵌入维数在相空间中的信息熵优化模型, 然后利用遗传算法同时求解两个重构参数, 使重构坐标间既保持了良好的独立性又保留了原系统的动力学特征. 通过在 Lorenz 和 Mackey-Glass 系统上的数值实验, 该方法不仅能够确定合适的嵌入维数和时间延迟, 而且能在优化的相空间中获得更多的信息, 提高了混沌时间序列的预测精度.

**关键词:** 信息熵, 优化, 混沌时间序列, 预测

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

混沌是非线性动力系统所特有的一种运动形式, 随着人们对混沌理论研究的不断深入, 混沌时间序列的分析与预测得到广泛研究<sup>[1-10]</sup>. 混沌时间序列的判定、分析与预测都是在重构相空间中进行的, 因此相空间重构是分析混沌动力学系统的第一步, 目前主要采用 Takens<sup>[11]</sup> 的嵌入定理进行相空间重构, 该重构过程的关键是确定两个参数: 嵌入维数  $m$  和时间延迟  $\tau$ . 目前对两参数的选取主要有两种方法, 1) 把时间延迟和嵌入维数分别单独求解, 如采用自相关法<sup>[12]</sup>、互信息法<sup>[13-15]</sup> 等来确定延迟时间, 然后采用 G-P 方法<sup>[16,17]</sup>、伪最近邻域法<sup>[15]</sup> 等来确定嵌入维数. 然而自相关法仅能提取时间序列间的线性相关性; 互信息虽能反映出系统的多种整体性关系, 但这些关系也只是高维相空间在二维空间中的投影, 其只反映出重构相空间中相邻两重构坐标的独立性, 而不能保证所有重构坐标间的整体独立性. 且在大多数的方法中, 为了确定最佳的时间延迟, 需要先确定嵌入维数, 而为了确定嵌入维数又需事先固定延迟时间, 这必将造成矛盾. 2) 把

时间延迟和嵌入维数统一求解. Broomhead 和 King 提出了时间窗口法<sup>[18]</sup>, Kim, Eykholt 和 Salas 的 C-C 法<sup>[19]</sup>, 这些方法明确  $\tau$  和  $m$  有整体的乘积关系. Ataei 等在文献[20]列举了一些典型混沌系统在不同延迟时间和嵌入维数选择下各不相同的预测误差, 这进一步说明两个重构参数是整体相关的, 但其不满足乘积关系. 因此这些传统方法确定的相空间并不一定最佳, 并不能很好的保持原动力系统整体的特性.

信息熵是系统整体性的一种度量, 在混沌时间序列的分析中起着重要作用, Tian 在文献[21]系统地论述在不变测度意义下, 将混沌系统视为一类特殊的随机系统加以处理, 并在文献[22]中成功应用条件熵解决了混沌时间序列的时滞判定. Xiao 等在文献[14]用条件熵求解嵌入维数. 但他们只是孤立讨论了各个参数与信息熵的关系, 没能把两个重构参数用信息熵有机地统一.

本文提出一种基于信息熵模型的相空间重构方法, 通过信息熵优化重构参数, 使相空间中的重构坐标最大限度独立的同时又保持其动力学关系. 该方法首先建立了  $\tau$  和  $m$  在高维相空间中信息熵优化模型, 其次给出该模型的遗传算法求解方法同

\* 广东省自然科学基金(批准号: 9451064101003233), 华南理工大学中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: 2009ZM0125, 2009ZM0255)资助的课题.

† E-mail: ljzctao@yahoo.com.cn

时确定两个重构参数,有效克服了独立求解重构参数的不足,扩充了两个重构参数所具有的整体性关系,为混沌时间序列相空间重构中的参数选择提供了更加普适性的理论依据和计算方法.最后数值仿真实验表明,在该方法确定的重构相空间上进行神经网络预测,因其能获得更多的信息量,预测精度有较大幅度的提高,说明了该方法的有效性.

## 2. $\tau$ 和 $m$ 的信息熵模型

设两个随机变量  $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  和  $Y \in \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , 其先验概率分别为  $\{p(x_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$  和  $\{p(y_j)\}_{j=1,2,\dots,k}$ . 信息熵可定义为

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i), \quad (1)$$

它描述了随机变量  $X$  的不定性,即为消除  $X$  的不定性所需要的平均信息量.类似地可以定义联合熵

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j), \quad (2)$$

其中  $p(x_i, y_j)$  为联合概率.

根据条件概率  $p(x_i | y_j)$  定义条件熵

$$H(X | Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p(x_i, y_j) \log p(x_i | y_j). \quad (3)$$

它描述了已知  $Y$  后  $X$  “残留”的不定性. 一般有  $H(X) \geq H(X | Y)$ , 即已知  $Y$  后有利于消除  $X$  的不定性,特别地  $H(X | Y) = 0$  表示  $Y$  已知后  $X$  的不定性完全消除,即  $Y$  能够完全确定  $X$ . 由(1), (2), (3)式可以推出

$$H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y). \quad (4)$$

### 2.1. 混沌时间序列相空间重构参数模型的建立

设混沌系统产生的时间序列为  $x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$ , 根据嵌入定理,总存在合适的维数  $m$ , 时间延迟  $\tau$  的相空间  $X(n) = (x(n), x(n + \tau), \dots, x(n + (m - 1)\tau)) \in R^m, (n = 1, 2, \dots)$ , 使得重构相空间中的“轨线”与原混沌系统在微分同胚意义下是等价的. 即存在一个光滑映射  $F: R^m \rightarrow R^m$  能复原出原混沌系统的“运动过程”, 相空间点的轨迹表达式

$$X(n + \tau) = F(X(n)), n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

其中  $X(n + \tau) = (x(n + \tau), x(n + 2\tau), \dots, x(n + m\tau))$ .

把(5)式表示为分量形式有

$$\begin{aligned} & (x(n + \tau), \dots, x(n + m\tau)) \\ & = F(x(n), \dots, x(n + (m - 1)\tau)), \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

(6)式可进一步化简为时间序列形式

$$\begin{aligned} & x(n + m\tau) = f(x(n), x(n + \tau), \dots, \\ & \quad x(n + (m - 1)\tau)), \\ & n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式表明,在合适的维数  $m$  和时间延迟  $\tau$  选择下,  $f$  能反映原系统的“运动形式”. 由于混沌系统的复杂性,要具体明确  $f$  的解析形式是困难的,下面先讨论  $f$  中  $m$  和  $\tau$  所具有的一般熵关系,最后再利用神经网络来逼近  $f$ .

由于混沌系统的高度非线性,所观测的时间序列具有确定的随机性<sup>[21]</sup>,即未来某时刻的值具有不定性.(7)式说明,在知道  $x(n), x(n + \tau), \dots, x(n + (m - 1)\tau)$  后可以恰好确定  $x(n + m\tau)$ ,即在知道特定的  $m$  个时刻的值  $x(n), x(n + \tau), \dots, x(n + (m - 1)\tau)$  后未来某时刻  $x(n + m\tau)$  的不定性完全消除,而在知道其它  $m$  个时刻的值或少于  $m$  个时刻的值都不能完全消除  $x(n + m\tau)$  的不定性. 因此为了消除未来某时刻值的不定性,嵌入维数  $m$  和延迟时间  $\tau$  是紧密联系的. 不定性可以使用信息熵来刻画,所以可以建立  $m$  和  $\tau$  的熵关系. 我们不妨记

$$X_1 = x(n), X_2 = x(n + \tau), \dots,$$

$$X_m = x(n + (m - 1)\tau), X_{m+1} = x(n + m\tau),$$

记  $H(X_{m+1})$  表示  $x(n + m\tau)$  的不定性,根据条件熵的定义,有  $H(X_{m+1} | X_m)$  表示已知  $X_m$  后  $X_{m+1}$  仍“残留”的不定性,因为只知  $x(n + (m - 1)\tau)$  的信息不足以确定  $x(n + m\tau)$ ,显然有  $H(X_{m+1} | X_m) > 0$ . 以此类推,根据(7)式有  $H(X_{m+1} | X_1, X_2, \dots, X_m) = 0$ .

由上讨论,得到求  $m$  和  $\tau$  的优化模型:

目标函数

$$\min H(m, \tau) = H(X_{m+1} | X_1, X_2, \dots, X_m). \quad (8)$$

约束条件:  $m$  和  $\tau$  为非负整数.

根据(4)式把条件熵转化为联合熵

$$\begin{aligned} \min H(m, \tau) & = H(X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}) \\ & \quad - H(X_1, \dots, X_m). \end{aligned} \quad (8a)$$

### 2.2. 相空间重构参数信息熵模型的求解

(8)式表面上看是个多元函数极值问题,可以采用传统优化算法来求解,但由于其目标函数中的熵函数是  $m$  和  $\tau$  的一个很复杂的表达式,目标函数仅可计算,所以用传统优化算法操作性不强. 正因为目标函数的可计算性,可以采用非数值全局优化算法——遗传算法求解.

遗传算法 (GA) 是一种宏观意义下的仿生算法。它是一种非数值优化算法,具有智能性搜索、并行式计算和全局优化等优点,使用它求解优化问题只需目标函数可计算,而没有传统的建立在梯度计算基础上优化算法的缺点。

遗传算法求解该问题的算法描述如下:

1) 编码:参数  $m$  和  $\tau$  为非负整数,采用二进制编码。

2) 初始群体的确定:根据实际问题群体规模  $N \in [30, 80]$ ,采用随机方法产生。

3) 确定适应值函数  $fit(x)$ :直接计算在给定  $m$  和  $\tau$  的条件下  $|H(X_1, X_2, \dots, X_{m+1}) - H(X_1, X_2, \dots, X_m)|$  的值作为个体  $x$  的适应度。采用矩阵标识法<sup>[14]</sup>来计算联合熵  $H(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 。

4) 选择算子:采用比例选择算子。即个体在下一代群体中的个数由该个体的适应值在种群总的适应值中的比例来决定。

5) 交叉算子:采用两点交叉算子。交叉概率  $p_c$  为  $0.7 < p_c < 0.95$ 。

6) 变异算子:采用基本位变异算子。变异概率  $p_m$  为  $0.01 < p_m < 0.2$ 。

7) 终止条件:取最大迭代次数  $T < 100$ 。

### 3. 仿真实验

为了检验通过模型求解的  $m$  和  $\tau$  的有效性,使用 Elman 网络<sup>[23]</sup>对混沌时间序列进行预测研究,为了评价预测效果引入如下评判标准:

均方误差

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^S [\hat{y}(t) - y(t)]^2}{S}, \quad (9)$$

均方根误差

$$RMSE = \sqrt{MSE}, \quad (10)$$

绝对误差

$$e(t) = \hat{y}(t) - y(t). \quad (11)$$

其中  $y(t)$ ,  $\hat{y}(t)$  和  $S$  分别表示真实值、预测值和样本大小。

#### 3.1. 洛伦兹方程

$$\begin{cases} x' = -\sigma(x - y), \\ y' = -xz + rx - y, \\ z' = xy - bz, \\ \sigma = 10, r = 28, b = 8/3. \end{cases} \quad (12)$$

用四阶 Runge-Kutta 方法求解方程(12),取积分步长  $h = 0.02$ ,得到  $x$  的 7500 个点的数据集,去除暂态过程的前面 5000 个点,最后得变量  $x$  的一个 2500 个点的时间序列,并将其归一化到  $[0, 1]$  区间。最后把变量  $x$  的前 2000 个点作为原始数据,使用遗传算法求解第(8)式,得最优的嵌入参数:  $m = 9, \tau = 4$ 。画出原系统和重构的吸引子如图 1。从图 1 可以看出重构的吸引子能反映出原系统的动力学特征。

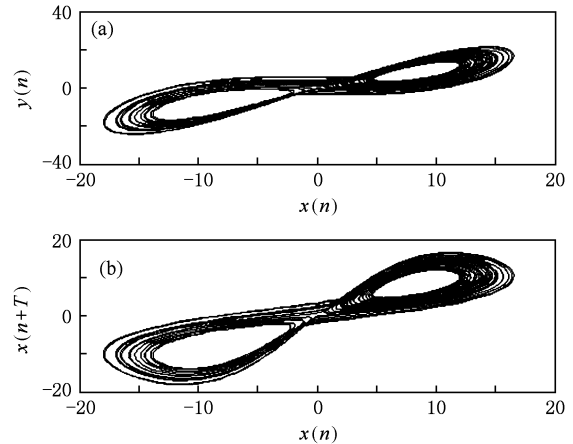


图 1 Lorenz 系统图 (a) 吸引子在  $xy$  平面投影; (b) 重构吸引子

使用 Elman 网络对洛伦兹系统的前 2000 个数据进行训练,后 500 个数据进行检验,单步预测实验预测结果与 FBMNN<sup>[2]</sup>, IC-E<sup>[4]</sup>, IOC-GB<sup>[4]</sup>, FT1<sup>[24]</sup>, FT2<sup>[24]</sup> 和 ANFIS<sup>[25]</sup> 的 RMSE 比较如表 1 所示。

表 1 Lorenz 系统单步预测

方法	RMSE
IC-E	$1.23 \times 10^{-2}$
IOC-GB	$8.5 \times 10^{-3}$
FT1	$7 \times 10^{-4}$
FT2	$3 \times 10^{-4}$
ANFIS	$5 \times 10^{-4}$
FBMNN	$2.046 \times 10^{-5}$
IEOP	$1.0537 \times 10^{-5}$

从表 1 可以看出,IEOP 对 Lorenz 系统的预测结果明显好于传统方法重构相空间上的预测。预测效果和绝对误差如图 2 和图 3 所示。

从图 3 可以看出,IEOP 的绝对误差比文献[26]中的  $10^{-2}$  提高 3 个数量级,最大绝对误差也比文献[2]的小。

同时也做了多步预测实验,为了便于比较取步

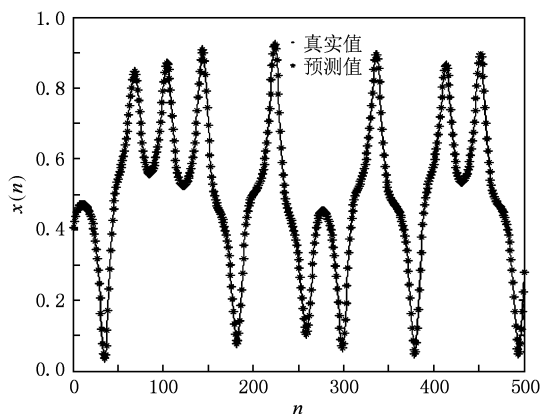


图2 Lorenz 单步预测效果

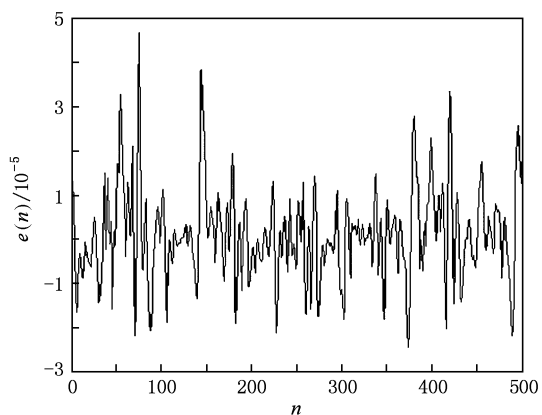


图3 Lorenz 单步预测误差

长分别为 6 和 8. 其中 6 步预测与相关方法比较如表 2 所示.

表2 6步预测

方法	RMSE
Local DCT domain Vloterra <sup>[27]</sup>	$2.04 \times 10^{-3}$
FBMNN	$3.7 \times 10^{-4}$
CERNN <sup>[3]</sup>	$1.2518 \times 10^{-4}$
IEOP	$1.7953 \times 10^{-4}$

表 2 中 CERNN 的结果是通过计算 MSE 而成. 虽然结果比 CERNN 稍差, 但所花代价远小于 CERNN, 因为使用 CERNN 方法时每变化一次预测步长都要使用遗传算法重新确定重构参数, 而 IEOP 只需确定一次重构参数, 大大提高了 IEOP 的实际可操作性.

8 步预测结果如表 3 所示.

由表 2 和表 3 可以看出, IEOP 进行的多步预测精度也优于传统方法.

表3 8步预测

方法	RMSE
FT1	0.05
FT2	0.029
ANFIS	0.045
FBMNN	0.00048
IEOP	$3.9392 \times 10^{-4}$

从表 1 至 3 可以看出, 与现有方法相比, IEOP 的单步和多步预测精度都是很好的, 这进一步说明 IEOP 方法确定的重构参数对 Lorenz 系统是有效性.

### 3.2. Mackey-Glass 时滞系统

Mackey-Glass 时滞系统方程为

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{x(t-\tau)}{1+x^c(t-\tau)} - bx(t),$$

$$\tau = 17, a = 0.2, b = 0.1, c = 10. \quad (13)$$

通过 Matlab 的 DDE23 函数解得 2500 个点的时间序列  $x(t)$ , 把前 2000 个点作为原始数据集, 使用遗传算法求解第 (8) 式, 得重构参数:  $m = 10, \tau = 6$ , 即 Mackey-Glass 时滞系统重构相空间嵌入维数  $m = 10$ , 时间延迟  $\tau = 6$ . 对时间序列的前 2000 个点进行训练, 后 500 个点作检验, 单步预测与广义 RBF<sup>[8]</sup>, IC-E, IOC-GB, FBMNN, 及 FRA<sup>[25]</sup> 的 RMSE 指标比较如表 4.

表4 Mackey-Glass 的单步预测

方法	RMSE
广义 RBF	$6.41 \times 10^{-3}$
IC-E	$1.07 \times 10^{-2}$
IOC-GB	$6.5 \times 10^{-3}$
FRA	$9.74 \times 10^{-2}$
FBMNN	$3.02 \times 10^{-4}$
IEOP	$1.941 \times 10^{-5}$

从表 4 可以看出, 对 Mackey-Glass 数据进行的单步预测, IEOP 取得了比其他方法更好的预测效果. 单步预测效果和误差如图 4 和图 5 所示.

从图 5 可以看出 IEOP 的单步预测误差比 FBMNN 和文献 [9] 中的绝对误差小一到两个数量级.

同时, 我们也做了多步预测实验, 分别取预测步长为 4, 6, 8 和 12, RMSE 标准与 LS-SVM<sup>[28]</sup> 和 CERNN 比较如表 5 所示, 6 步预测结果如表 6 所示.

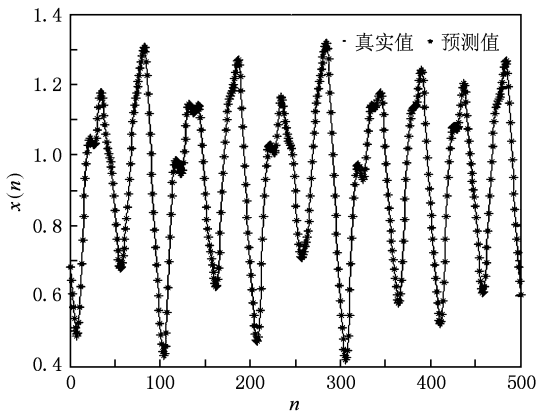


图4 单步预测效果

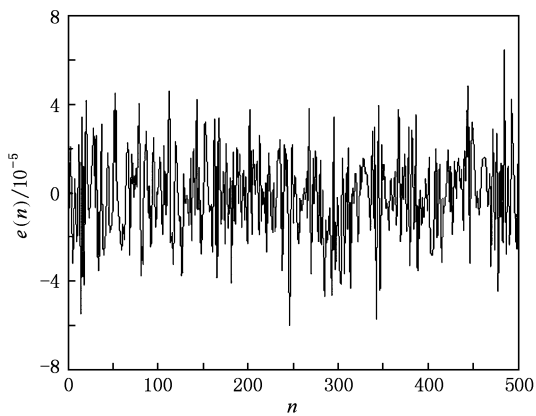


图5 单步预测误差

从表5表6可看出,IEOP进行的多步预测远好于传统重构相空间上的预测,还可看出传统算法随预测步长的增加而降低了预测精度,IEOP预测精度对步长的依赖性较小.

表5 多步预测的RMSE比较

步长	LS-SVM	CERNN.	IEOP
4	0.0113	0.00039	$2.2721 \times 10^{-5}$
8	0.0245	0.00208	$5.7873 \times 10^{-5}$
12	0.0496	0.00379	$4.742 \times 10^{-5}$

表6 6步预测结果

方法	RMSE
FT1	0.0029
FT2	0.0011
MLMVN <sup>[29]</sup>	0.0056
ANFIS	0.0017
FBMNN	$8.79 \times 10^{-4}$
IEOP	$3.3691 \times 10^{-5}$

从表1至6中可以看出,IEOP和FBMNN、CERNN都使用递归神经网络对混沌系统进行预测,区别在于使用不同方法确定混沌系统的重构参数. IEOP使用了在高维相空间同时优化参数的方法,后两种方法通过经验和神经网络寻优确定重构参数. IEOP所得的单步或多步预测精度都是最优的,且对多步预测的稳定性更好,这说明IEOP方法确定的重构参数是有效的.

### 3.3. Mackey-Glass 系统信息熵模型检验

设重构相空间结构有如下形式:  $\{x(n), x(n+\tau), \dots, x(n+(m-1)\tau)\}$ , 则进行预测的结构为  $\{x(n), x(n+\tau), \dots, x(n+(m-1)\tau); x(n+(m-1)\tau+k)\}$ , 其中  $m$  为嵌入维数,  $\tau$  为时间延迟,  $k$  为预测步长. 不妨记  $X_1 = x(n), \dots, X_m = x(n+(m-1)\tau), X_{m+1} = x(n+(m-1)\tau+k)$ . 预测精度的好坏很大程度上取决于将来值  $X_{m+1}$  能够从已发生值  $X_1, X_2, \dots, X_m$  上所获得的信息量, 信息量的计算由互信息的定义有

$$I(X_1, X_2, \dots, X_m; X_{m+1}) = H(X_{m+1}) - H(X_{m+1} | X_1 \dots X_m), \quad (14)$$

对3.2中的Mackey-Glass系统,把IEOP的重构相空间的预测结构中参数取值  $m=10, \tau=6, k=1, 2, \dots, 12$  和  $n=2001, 2002, \dots, 2500$  和FBMNN的相空间结构中参数取值  $m=4, \tau=6, k=1, 2, \dots, 12$  和  $n=2001, 2002, \dots, 2500$  分别按(14)式计算互信息比较如图6所示.

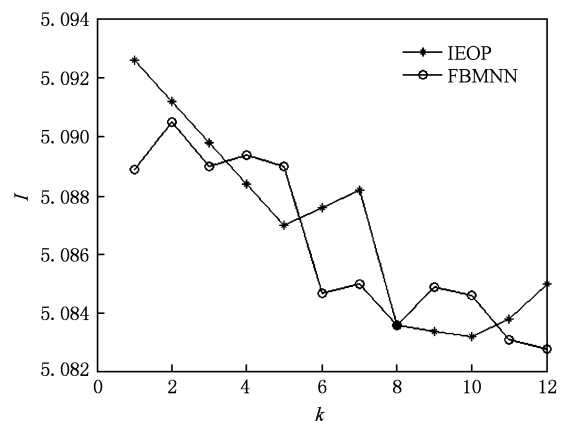


图6 预测步长与互信息关系图

从图6可以看出随着预测步长的增加,  $X_{m+1}$  所获得信息量逐渐减少, 所以预测精度逐渐降低. IEOP的12步预测获得了比8步预测更多的信息

量,其验证了表 5 中的 12 步预测好于 8 步预测. IEOP 在大多数情况下能获得比 FBMNN 更多的信息量,所以能较大幅度提高预测精度.

#### 4. 结 论

本文提出了一种基于信息熵的相空间重构方法,该方法通过在高维相空间中建立时间延迟  $\tau$  和

嵌入维数  $m$  的信息熵优化模型求解混沌系统的复杂结构,使建立在重构相空间上预测模型能获得更多的信息量,从而使得系统内部“运动规律”更容易显现. 通过对 Lorenz 系统和 Mackey-Glass 时滞系统的仿真实验,该方法不仅能够重构原系统的吸引子,而且在使用递归神经网络对系统进行的单步和多步预测中都取得了更高的预测精度,表明了该方法的有效性.

- 
- [1] Yan H, Wei P, Xiao X C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3287
- [2] Ma Q L, Zheng Q L, Peng H, Qin J W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1410 (in Chinese) [马千里、郑启伦、彭宏、覃姜维 2009 物理学报 **58** 1410]
- [3] Ma Q L, Zheng Q L, Peng H, Zhong T W, Qin J W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 536
- [4] Zhang J F, Hu S S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 713 (in Chinese) [张军峰、胡寿松 2007 物理学报 **56** 713]
- [5] Wang Y S, Sun J, Wang C J, Fan H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6120 (in Chinese) [王永生、孙瑾、王昌金、范洪达 2008 物理学报 **57** 6120]
- [6] Peng S G, Yu S M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3758
- [7] Wang D F, Han P 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3603
- [8] Hu Y X, Gao J F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5034 (in Chinese) [胡玉霞、高金峰 2005 物理学报 **54** 5034]
- [9] Liu F C, Zhang Y L, Chen C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2784 (in Chinese) [刘福才、张彦柳、陈超 2008 物理学报 **57** 2784]
- [10] Han M, Shi Z W, Guo W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 43 (in Chinese) [韩敏、史志伟、郭伟 2007 物理学报 **56** 43]
- [11] Takens F 1981 *Dynamical Systems and Turbulence* (Berlin: SpringerVerlag) 366
- [12] Albano A M 1988 *Phys. Rev. A* **38** 3017
- [13] Fraser A M 1989 *IEEE Trans. on Information Theory* **35** 245
- [14] Xiao F H, Yan G R, Han Y H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 550 (in Chinese) [肖方红、阎桂荣、韩宇航 2005 物理学报 **54** 550]
- [15] Yang S Q, Jia C Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2452 (in Chinese) [杨绍清、贾传炎 2002 物理学报 **51** 2452]
- [16] Grassberg P, Procaccia I 1984 *Physica* **13** 34
- [17] Lu W, Wang H Y, Yao Z A, Li L 2009 *Computer Science* **36** 187 (in Chinese) [吕威、王和勇、姚正安、李磊 2009 计算机科学 **36** 187]
- [18] Kugiumtzis D 1996 *Physica D* **95** 13
- [19] Kim H S, Eykholt R, Salas J D 1999 *Physica D* **127** 48
- [20] Ataei M, Lohmann B, Khaki-Sedigh A, Lucas C 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **19** 1131
- [21] Tian Y C, Fu X T, Lu Y Z 1993 *Control and Decision* **8** 345 (in Chinese) [田玉楚、符雪桐、吕勇哉 1993 控制与决策 **8** 345]
- [22] Tian Y C 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 442 (in Chinese) [田玉楚 1997 物理学报 **46** 442]
- [23] Elman J L 1990 *Cognitive Science* **14** 179
- [24] Mao J Q, Yao J, Ding H S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2220 (in Chinese) [毛剑琴、姚健、丁海山 2009 物理学报 **58** 2220]
- [25] Jang J S R 1993 *IEEE Trans. Syst. Man.* **23** 665
- [26] He T, Zhou Z O 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 693 (in Chinese) [贺涛、周正欧 2007 物理学报 **56** 693]
- [27] Zhang J S, Li H C, Xiao X C 2005 *Chin. Phys.* **14** 49
- [28] Ye M Y, Wang X D 2004 *Chin. Phys.* **13** 454
- [29] Aizenberg I, Moraga C 2007 *Soft Comput.* **11** 169

# Chaotic time series prediction based on information entropy optimized parameters of phase space reconstruction

Zhang Chun-Tao<sup>1)2)†</sup> Ma Qian-Li<sup>1)</sup> Peng Hong<sup>1)</sup>

1) (South China University of Technology, Guangzhou 51006, China)

2) (Chongqing Three Gorges University, Chongqing Wanzhou 40400, China)

(Received 28 January 2010; revised manuscript received 23 February 2010)

## Abstract

This paper proposes a method of information entropy optimized parameters (IEOP) of phase space reconstruction. First, it establishes an information entropy optimum model in phase space for embedding dimension and delay time by using conditional entropy. It then solves these two parameters with genetic algorithm (GA) simultaneously. IEOP constructs an optimum phase space, which maintains independence of reconstruction coordinate and retains the dynamic characteristics of the original system. In the numerical simulations, results of the Lorenz system and Mackey-Glass system show that it not only determines two parameters at the same time, but also can obtain more information in the optimized phase space, thereby improving the performance of chaotic time series prediction.

**Keywords:** information entropy, optimized parameters, chaotic time series, prediction

**PACC:** 0545

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 9451064101003233), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, SCUT, China (Grant Nos. 2009ZM0125, 2009ZM0255).

† E-mail: ljzctao@yahoo.com.cn