第59卷 第11期 2010年11月
1000-3290/2010/59(11)/7630-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 11, November, 2010

精确配置离散动力系统的所有 Lyapunov 指数*

陈 旭† 丘水生

(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)

(2010年1月28日收到;2010年2月24日收到修改稿)

针对给定的确定性离散时间动力学系统, 提出一种可以精确配置受控系统所有 Lyapunov 指数的混沌控制与反控制新方法. 本文不限制给定系统的具体形式,仅利用取模运算和预设的一组 Lyapunov 指数,设计出一种新的状态反馈控制器. 在控制器的作用下,受控系统的 Lyapunov 指数与预设的 Lyapunov 指数一致. 控制器的形式简单,可以用于解决混沌控制和混沌反控制两种问题. 给出了数学证明和两个实例, 仿真结果显示了算法的有效性.

关键词: 离散时间系统, 混沌反控制, 混沌控制, Lyapunov 指数配置

PACC: 0545

1. 引 言

"混沌"这一术语首次被提出以来,就吸引了众多领域学者们的注意. 混沌化即混沌反控制是一个全新的控制问题, 有助于我们加深对混沌理论的认识, 而且在高新技术的应用中有广阔的前景. 另一方面,有时候混沌可能是有害的,我们就要想办法消除它. 陈关荣等人在离散系统反馈混沌化领域做了开创性和奠基性的工作, 首先给出了一般性方法和严格的数学理论.

目前学术界接受用 Lyapunov 指数判定混沌的观点: 如果离散时间系统的轨线全局有界并且 Lyapunov 指数全不为零, 其中至少一个为正, 那么系统就是混沌的;如果有两个以上 Lyapunov 指数为正, 那么系统就是超混沌的. 因此, 离散系统反馈混沌化的一种理论就是如何配置正的 Lyapunov 指数,设计相应的配置 Lyapunov 指数的控制算法具有重要意义. 既然 Lyapunov 指数是判定混沌的一个重要量化指标,那么更深的问题就不再是如何得到一个或者两个正的 Lyapunov 指数,而是如何才能得到预先指定的若干个 Lyapunov 指数. 因此在某种程度上,混沌反控制和混沌控制可以统一成一个问题来考虑:如何精确配置系统的 Lyapunov 指数.

Chen 和 Lai 于 1996 年提出了 Chen-Lai 算法[1—3], 该算法能够使受控系统的 Lyapunov 指数[4]全部大于给定的正常数 c, 并且可以产生 Devaney 意义下的混沌[5]以及 Li-Yorke 意义下的混沌[6]. 随后, Wang 和 Chen 又提出了 Wang-Chen 算法[7,8], 该算法利用线性状态反馈和对控制器进行取模运算, 使得受控系统的 Lyapunov 指数全部大于给定的正常数 c, 同时利用小的控制幅值获得显著的控制效果. Chen-Lai 算法和 Wang-Chen 算法的思想都是通过引人反馈, 改变受控系统的雅可比矩阵, 从而配置受控系统的全部 Lyapunov 指数为正. Chen-Lai 算法和 Wang-Chen 算法关于配置 Lyapunov 指数的理论是一致的. 另外,根据文献[9—11], 控制器采用锯齿函数、正弦函数或者对整个系统进行锯齿、正弦运算,都可以使得受控系统 Lyapunov 指数全大于某个正数,达到混沌反控制的目标.

文献[9]介绍了一种可以任意配置 n 维离散时间系统的 $n-1$ 个 Lyapunov 指数的方法. 由于该方法的控制器包含系统的导数,因而假定系统是二次可微的. 该方法对给定系统的形式做了一定限制, 可以精确配置 $n-1$ 个 Lyapunov 指数,其余一个 Lyapunov 指数大于预先给定的正的常数,于是受控系统是混沌的. 文献[12]介绍了一种混沌系统的自适应预测函数控制算法,先用时变遗忘因子的递推最小二乘方法辨识混沌系统,然后在广义预测控制的基础上引入了预测函数控制,可以控制 Henon 映

* 华南理工大学自然科学基金(批准号:E5090790),华南理工大学中央高校基本科研业务费专项资金(批准号:D2103410)资助的课题.

† E-mail: bestchenxu@126.com

射混沌系统，但是不能配置 Lyapunov 指数. 文献[13]研究了带不确定参数的离散时间模糊系统的反控制，但不能配置 Lyapunov 指数. 文献[14]研究了基于直接延迟反馈的连续系统混沌反控制，该方法产生的混沌运动理论上具有无穷维，应用于保密通信将有更好的保密效果，也不能配置 Lyapunov 指数.

本文研究的问题是：不限制受控离散时间系统的形式，设计出更简单、有效的反馈控制器；不满足于只精确配置 $n-1$ 个 Lyapunov 指数，而希望所有 Lyapunov 指数都可以精确配置，并且可以配置为负值. 在 Chen－Lai 算法和文献[9]的启发下，作者找到了一种新的可以精确配置所有 Lyapunov 指数的方法.

本文提出的算法适用于可微、可控、可观测的离散系统，主要体现在以下几个方面：1）可以将受控系统的所有 Lyapunov 指数精确配置为任意给定的一组常数. 2）控制器的形式简单，容易实现. 文献[9]设计的控制器使用了系统的导数，要求系统至少是二次可微的. 本文仅使用模运算，降低了系统可微性的要求. 3）不限制系统的形式. 文献[9]对给定系统的形式做了一些额外的限制. 4）适用范围与 Chen-Lai 算法一致. 由于 Chen-Lai 算法采取了对整个系统取模的办法，因而 Chen-Lai 算法可用于很大一类离散时间系统. 而 Wang-Chen 算法只对控制器取模，因此为了保证受控系统轨道有界，只适用于本身渐近稳定、有界输入有界输出稳定的系统. 而本文提出的算法，当系统本身是稳定的，实际上就是改进了的 Wang-Chen 算法，不需要再进行取模运算；当系统是不稳定的，就要对整个系统再进行一次取模运算，以保证轨道的全局有界性. 因此本文的算法适用范围与 Chen-Lai 算法一致.

2. 设计反馈控制器

考虑 n 维非线性离散时间系统

$$x_{k+1} = f_k(x_k), \tag{1}$$

式中 $x_k \in R^n$ 为系统的状态，f_k 为 n 维连续可微映射. 考虑如下的控制问题：设计控制器 u_k 使得受控系统是混沌的，即受控系统为全局有界且具有给定的一组 Lyapunov 指数.

考虑简单的反馈控制器

$$u_k = B_k x_k \mathrm{mod}(\varepsilon) - f_k(x_k)\mathrm{mod}(\varepsilon), \tag{2}$$

其中 ε 为一正实数，则显然 $u_k \leqslant \varepsilon$. $B_k \in R^{n\times n}$ 为对角阵，σ_{ki} 为预设的一组 Lyapunov 指数，

$$B_k = \begin{bmatrix} e^{\sigma_{k0}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sigma n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

则受控系统为

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + u_k. \tag{4}$$

考虑到具体实现，还要求控制增益矩阵一致有界，即

$$\sup_{0\leqslant k<\infty} \| u_k \| \leqslant M < \infty, \tag{5}$$

其中 M 为一常数，$\|\cdot\|$为谱范数，即矩阵最大奇异值. 由于 $u_k \leqslant \varepsilon$，显然满足这样的条件. 在实际应用中，也可以将 ε 设置的很小，从而达到微扰控制的效果.

下面证明在控制器 u_k 的作用下，受控系统的 Lyapunov 指数恰好等于预设的一组常数 σ_{ki}. 受控系统(4)的 Jacobi 矩阵为

$$J_j(z) = B_j, \tag{6}$$

记

$$\begin{aligned} T_j &= T_j(x_0, \ldots, x_j) \\ &= J_j(x_j) J_{j-1}(x_{j-1}) \cdots J_1(x_1) J_0(x_0), \end{aligned} \tag{7}$$

并记

$$s_i^j = \mu_i[T_j^{\mathrm{T}} T_j] \tag{8}$$

为第 j 个乘积矩阵 $T_j^T T_j$ 的第 i 个特征值，亦即矩阵 T_j 的第 i 个奇异值的平方.

根据 Lyapunov 指数的定义[4]，系统(4)的第 i 个 Lyapunov 指数为

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} \ln | s_i^j |, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{9}$$

即$\{T_k\}$的奇异值序列的极限.

将(3)，(6)，(7)，(8)式代入(9)式，计算(9)式，立即得到了受控系统的 Lyapunov 指数恰好等于预先给定的一组常数 σ_{ki}，即

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} \ln | s_i^j | = \sigma_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

于是我们证明了

命题 1　通过引入反馈控制器并且严格指定反馈控制器的形式(2)，可以将 n 维非线性离散时间系统(1)的 Lyapunov 指数配置为一组任意给定的常数.

3. 系统轨道的全局有界性

目前主要有两种方法可以使得系统轨道全局

有界. 第一种方法, 按照参考文献[1]和[9]给出的 Chen-Lai 算法,对整个控制系统采用如下的模运算:

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + u_k(\mathrm{mod}1).$$

将上式用于系统(1),由上一节知,受控系统(4)的 Lyapunov 指数系统为指定的常数,于是受控系统的轨道会依赖于相应的 Lyapunov 指数在某些方向上扩张或者收缩. 模运算使得整个系统轨道全局有界. 利用文献[10]的结果, 文献[9]和[11]证明了,在 Lyapunov 指数为正、系统轨道有界的情况下,系统轨道会在有界区域内产生混沌行为, 并且是 Devaney 意义下的混沌以及 Li-Yorke 意义下的混沌.

第二种方法, 根据参考文献[7],[8]给出的 Wang-Chen 算法, 对于稳定的离散时间系统, 仅对控制器取模, 即可以使得系统是轨道全局有界. 考虑(2)式,如果系统(1)是稳定的,并且 ε 很小的话,则受控系统(4)的轨道必然是全局有界的.

4. 例子与仿真结果

例 1 考虑二阶线性系统 $x_{k+1} = Ax_k$, $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$, 给定初值 $x_0 = [0.01, 0.01]$. 系统是渐近稳定的, 并且系统的两个状态变量是可解耦的. 现用本文的算法, 使得受控系统是混沌的, 并且要求系统的两个 Lyapunov 指数等于 1.5 和 -1.5. 受控系统为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + u_k \\ &= Ax_k + B_k x_k \mathrm{mod}(1) - A(x_k)\mathrm{mod}(1), \\ B_k &= \begin{bmatrix} e^{1.5} & \\ & e^{-1.5} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

可以验证受控系统的 Lyapunov 指数等于 1.5 和 -1.5. x_{1k}的时域混沌波形如图 1 所示.

例 2 考虑考虑二阶 Henon 映射 $\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = 0.3x_k \end{cases}$, 给定初值 $x_0 = [0.3, 0.5]$. 显然两个状态变量是不能解耦的. 系统的不动点为 $x_{1,2} = \dfrac{-0.7 \pm \sqrt{0.49 + 4a}}{2a}$,当 $0 < a < 0.35$ 不动点是渐近稳定的,这里取 $a = 0.2$. 若使用 Chen-Lai 算法、Wang-Chen 算法对该映射进行混沌反控制,可以验证,由于两个状态变量不能解耦,所获得的两个 Lyapunov 指数要么同时为正,要么同时为负.

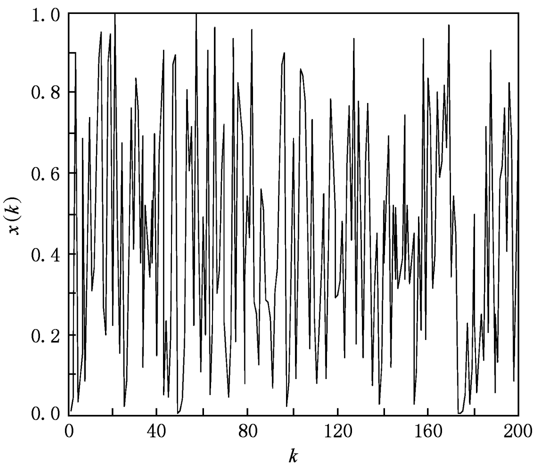

图 1 (11)式的受控的时域波形

现用本文的算法,将上述二阶 Henon 映射的两个 Lyapunov 指数配置成 1.5 和 -1.5. 受控系统为

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k + e^{1.5}x_k\mathrm{mod}(1) \\ \qquad - (1 - ax_k^2 + y_k)\mathrm{mod}(1), \\ y_{k+1} = 0.3x_k + e^{-1.5}y_k\mathrm{mod}(1) - (0.3x_k)\mathrm{mod}(1), \end{cases} \tag{12}$$

(12)式可以验证 Lyapunov 指数等于 1.5 和-1.5. $x(k)$时域混沌波形如图 2 所示.

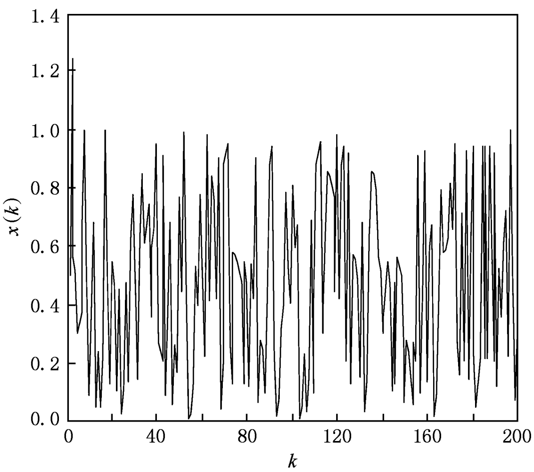

图 2 (12)式的受控的时域波形

可以看出,即使系统的变量不能解耦,本文的算法也可以将两个 Lyapunov 指数配置成任意值.

算法使用状态反馈来改变系统的雅可比矩阵,因此系统可微、状态可控、可观测的条件是本算法可实现的必要前提. 由于可以将 Lyapunov 指数配置成任意值,显然该算法也可以用于解决混沌控制

问题，只要将系统的全部 Lyapunov 指数配置为非正，即可消除混沌.

5. 结 论

本文通过引人反馈和取模运算，改变受控系统的雅可比矩阵，从而将系统的 Lyapunov 指数精确配置为给定的一组常数，得到了离散时间动力系统混沌控制与反控制的一个新方法. 可以看到，新方法的控制器简单，容易实现. 另外，即使系统的状态变量不能解耦，也可以将系统的所有 Lyapunov 指数配置成任意值. 由于算法可以将系统的全部 Lyapunov 指数配置为非正，因而可以用于解决混沌控制问题.

[1] Chen G, Lai D 1996 *Int. J. of Bifur. Chaos* **6** 1341
[2] Chen G, Lai D 1997 *Proceedings of the* 1997 *IEEE Conf. Decision and control*, SanDiego, CA, Dec 10—12, 367
[3] Chen G, Lai D 1998 *Int. J. of Bifur. Chaos* **8** 1585
[4] Oseledec V I 1968 *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** 197
[5] Devaney R L 1987 *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (New York: Addison-Wesley) 10—15
[6] Li T Y, Yorke J A 1975 *Amer. Math. Monthly* **82** 481
[7] Wang X F, Chen G 2000 *IEEE Trans. on Cir. Sys.* I **47** 410
[8] Wang X F, Chen G 2000 *J. Control Theory Appl.* **17** 336
[9] Chen G R, Wang X F 2006 *Chaotification of Dynamical Systems—Theory, Method and applications* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) p18—21 (in Chinese) [陈关荣、汪小帆 2006 动力系统的混沌化——理论、方法与应用(上海：上海交通大学出版社) 第 18—21 页]
[10] Touhey P 1997 *Amer. Math. Monthly* **5** 411
[11] Chen G R, Wang X F 2006 *Chaotification of Dynamical Systems—Theory, Method and applications* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) p11—13 (in Chinese) [陈关荣、汪小帆 2006 动力系统的混沌化——理论、方法与应用(上海：上海交通大学出版社) 第 11—13 页]
[12] Wen S H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5209 (in chinese) [温淑焕 2008 物理学报 **57** 5209]
[13] Zhao Y, Zhang H G, Zheng C D 2008 *Chin. Phys.* B **17** 529
[14] Ren H P, Liu D, Han C Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2694 (in chinese) [任海鹏、刘 丁、韩崇昭 2006 物理学报 **55** 2694]

Precise planement of all Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems*

Chen Xu† Qiu Shui-Sheng

(*School of Electronic and Information Engineering*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510640, *China*)

(Received 28 January 2010; revised manuscript received 24 February 2010)

Abstract

In this paper, a new algorithm for all Lyapunov Exponents precisely configuraling a discrete-time dynamical system is proposed. A given deterministic discrete-time dynamical system can be chaotified by the algorithm. A new feed-back controller is designed via moduling operation. All Lyapunov Exponents of the controlled system are equal to a given set of ones. The new controller is simple and can be used to control or anti-control a chaotic system . The corresponding proof as well as two illustrative examples are presented. The simulation results show the effectiveness of the algorithm.

Keywords: discrete-time dynamical system, anticontrol of chaos, control of chaos, Lyapunov exponents placement

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation for the Youth SCUT, China (Grant No. E5090790), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, SCUT, China (Grant No. D2103410).

† E-mail: bestchenxu@126.com