

耦合动力系统的预测投影响应

王姣姣[†] 闫 华 魏 平

(电子科技大学电子工程学院, 成都 611731)

(2010 年 1 月 18 日收到; 2010 年 3 月 16 日收到修改稿)

提出了耦合动力系统的预测投影响应, 通过选择不同的函数以及改变比例因子可以构建一系列不同的驱动响应系统. 详细研究了该系统的一种特殊情况——加速预测投影响应. 在该系统中, 响应系统与驱动系统的输出轨迹在幅度上成比例关系, 并且具有更快的演化速度. 同时, 还进一步证明了该系统在驱动信号和驱动项有微小扰动以及参数失配的情况下具有鲁棒性.

关键词: 预测投影响应, 加速预测投影响应, 耦合动力系统, 鲁棒性

PACC: 0545

1. 引 言

自 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出混沌同步^[1]以来, 混沌同步在化学、生物和通信等各个领域引起了广泛的关注. 此后, 人们对混沌同步做了大量的研究, 发现了不同类型的混沌同步, 如完全同步^[2,3]、广义同步^[4-6]、相位同步^[7,8]等. 1999 年, Mainieri 等^[9]在三维混沌系统中观察到了一种新的同步——投影同步现象, 即在一定条件下耦合的响应系统和驱动系统的输出振幅也按某种比例关系演化. 此后, 投影同步引起了人们的关注^[10-12], 如 Chee 等^[13]将投影同步技术应用到混沌保密通信中; Feng 等^[14]研究了随机网络中时延混沌系统之间的投影同步; Ghosh^[15]提出了时延系统中的广义投影同步. 在保密通信中, 投影同步可以将二进制数扩展为 M 进制以实现更快的传输. 在文献^[13]中, Chee 等提出了基于混沌投影同步的 M 进制数字通信技术, 该技术通过改变投影同步中的比例因子并用不同的比例因子表示相应的 M 进制符号, 实现 M 进制传输. 到目前为止, 该技术是第一个也是唯一一个相对于传统技术具有更好的误码率性能的混沌数字通信技术. 同时, 该技术将二进制数扩展为 M 进制具有更快的传输速度, 但不用增加系统的复杂度, 实现简单. 由此可见, 对投影同步的研究具有重要的理论意义和广阔的应用前景. 2000 年,

Voss^[16]提出了预测同步, 即响应系统轨迹的演化超前于驱动系统, 或者说响应系统当前的状态与驱动系统未来的状态一致: $y(t) = x(t + \tau)$ ($\tau > 0$), 其中 $x(t)$ 为驱动系统的输出, $y(t)$ 为响应系统的输出. 2002 年, Shahverdiev 等^[17]研究了反向预测同步现象, 即 $y(t) = -x(t + \tau)$ ($\tau > 0$). 2009 年, Yan 等^[18]在预测同步的基础上构建了一般预测响应系统, 使得预测响应更具有一般性. 本文则在此基础上进一步推广一般预测响应系统为预测投影响应系统, 并详细讨论它的一种特殊情况——加速预测投影响应. 这种系统不仅具有加速预测响应系统的性质 (响应系统与驱动系统按照相同的轨迹演化, 但是响应系统的演化速度更快), 还具有投影同步系统的性质 (响应系统与驱动系统的输出状态的振幅成一定的比例关系, 并可根据需要改变其比例因子). 本文中还将讨论在驱动信号和驱动项有微小扰动以及参数失配的情况下加速预测投影响应系统的鲁棒性. 在保密通信中, 本文提出的系统可结合文献^[13]中提出的方法可实现将二进制到 M 进制的扩展, 使得信息传输速度更快.

本文的结构如下: 首先, 简单介绍预测投影响应系统, 并以 Mackey-Glass 方程为例进行数值仿真实验. 其次, 介绍加速预测投影响应系统, 并给出一些情况下的数值仿真结果. 再次, 从四个方面分析加速预测投影响应系统的鲁棒性. 最后, 对理论分析和仿真结果进行总结.

[†] E-mail: wangjiaoj823@sohu.com

2. 预测投影响应系统

本文提出的预测投影响应系统如下:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f(x(g(t))), \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha \dot{g}^{-1}(t)y(t) + \lambda \dot{g}^{-1}(t)f(x(t)), \quad (2)$$

其中(1)式表示的是驱动系统,(2)式表示的是响应系统. 函数 f 有界可导并且其导数也是有界的, 常数 $\alpha > 0$, 函数 g 满足四个条件

- 1) 当 $t > 0$ 时, $g(t) < t$,
- 2) $g(t)$ 可逆, 即 $g^{-1}(t)$ 存在,
- 3) $g^{-1}(t)$ 可导, 其导数为 $\dot{g}^{-1}(t)$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} g^{-1}(t) = \infty$.

对于驱动响应系统(1)和(2), 经过一段过渡时间的演化, $y(t)$ 将与 $\lambda x(g^{-1}(t))$ 相等, 即 $y(t) = \lambda x(g^{-1}(t))$. 为了证明该式成立, 令 $\Delta(t) = y(t) - \lambda x(g^{-1}(t))$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= \dot{y}(t) - \lambda \dot{g}^{-1}(t)\dot{x}(g^{-1}(t)) \\ &= -\alpha \dot{g}^{-1}(t)y(t) + \lambda \dot{g}^{-1}(t)f(x(t)) \\ &\quad - \lambda \dot{g}^{-1}(t)[- \alpha x(g^{-1}(t)) + f(x(t))] \\ &= -\alpha \dot{g}^{-1}(t)y(t) + \alpha \lambda \dot{g}^{-1}(t)x(g^{-1}(t)) \\ &= -\alpha \dot{g}^{-1}(t)\Delta(t), \end{aligned} \quad (3)$$

求解(3)式可得 $\Delta(t) = C \exp(-\alpha g^{-1}(t))$, 其中 C 为常数.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = C \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\alpha g^{-1}(t)) = 0$, 由此可知 $y(t)$ 的轨迹逐渐趋于 $\lambda x(g^{-1}(t))$ 的轨迹, 即经过一段过渡时间, $|y(t) - \lambda x(g^{-1}(t))| \rightarrow 0$. 通过改变系统中参数 λ 的值可以实现: 响应系统输出 $y(t)$ 是驱动系统输出 $x(t)$ 在幅度轴上的放大 ($\lambda > 1$)、缩小 ($0 < \lambda < 1$) 或者反向变化 ($\lambda < 0$). 对于混沌系统, 这些伸缩变化同样可以在吸引子的尺度上表现出来. 为了验证上述结果, 我们进行数值仿真并将驱动系统取为 Mackey-Glass 方程^[19], 构造的耦合系统如下:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \frac{\beta x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)}, \quad (4)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \frac{\lambda \beta x(t)}{1+x^{10}(t)}, \quad (5)$$

其中 $\alpha = 0.1, \beta = 0.2, \tau$ 是可变参数, 在这里我们取 $\tau = 17$, 此时, 系统(4)处于混沌状态. λ 为比例因子, 在此选取 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = -1$ 分别进行数值仿真, 以便展示 λ 对响应系统的输出 $y(t)$ 的影响. 可以看出, 该系统是预测投影响应系统中 $g(t) = t - \tau, f(x(\cdot)) = \frac{\beta x(\cdot)}{1+x^{10}(\cdot)}$ 时的特例. 采用 Runge-Kutta

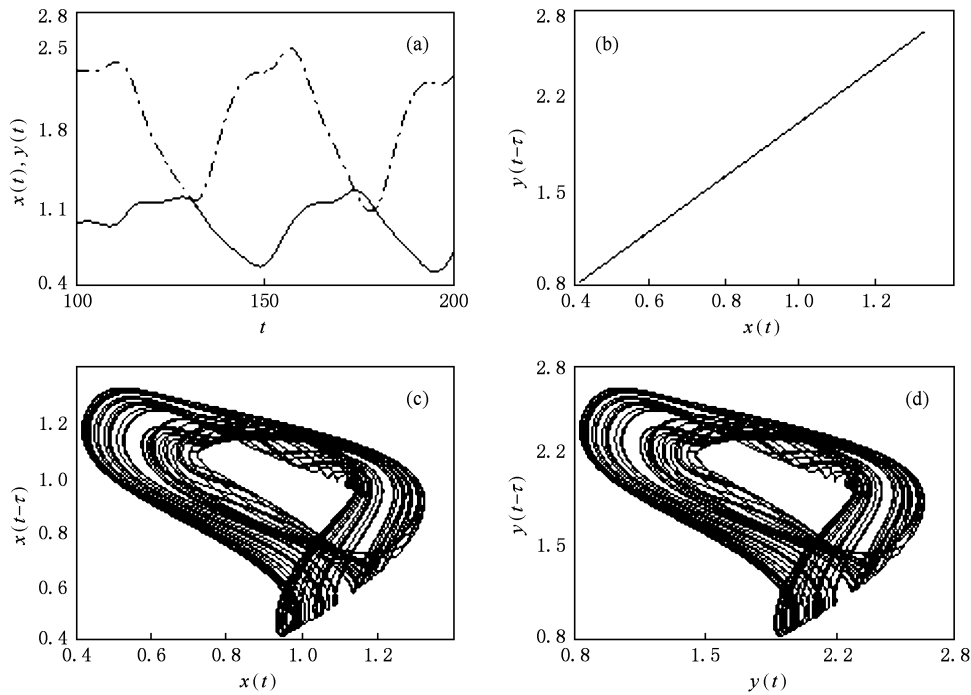


图1 $\alpha=0.2, \beta=0.1, \tau=17, \lambda=2$ 时, 系统的仿真结果 (a) 为驱动系统的输出 $x(t)$ (实线) 和响应系统的输出 $y(t)$ (虚线); (b) 为 $y(t-\tau)$ 与 $x(t)$ 的对比关系图; (c) 和 (d) 分别表示驱动系统的输出 $x(t)$ 和响应系统的输出 $y(t)$ 的吸引子 ($t \in [100, 2000]$)

方法对方程(4)和(5)进行求解,其中积分步长 $\Delta t = 0.0025$,积分区间为 $[0,2000]$. 仿真结果如图 1、图 2 所示. 图 1(a) 表示驱动系统的输出 $x(t)$ (实线)和响应系统的输出 $y(t)$ (虚线),图 1(b) 为 $y(t-\tau)$ 与 $x(t)$ 的对比关系图,从图中斜线的斜率清晰地看出 λ 的值,图 1(c) 和图 1(d) 分别表示驱动系统的输出 $x(t)$ 和响应系统的输出 $y(t)$ 的吸引

子. 画图时均不考虑过渡过程的影响,仅截取 $t \in [100,2000]$ 的部分,图 2 中各部分所表示的含义与图 1 相同. 从两图可以看出,响应系统的输出 $y(t)$ 的轨迹超前于驱动系统的输出 $x(t)$,且在幅度上成比例关系. 同时, $y(t)$ 与 $x(t)$ 的吸引子的尺度也随着比例因子 λ 的改变呈不同的缩放关系. 该仿真实验验证了我们所构造的预测投影响应系统的正确性.

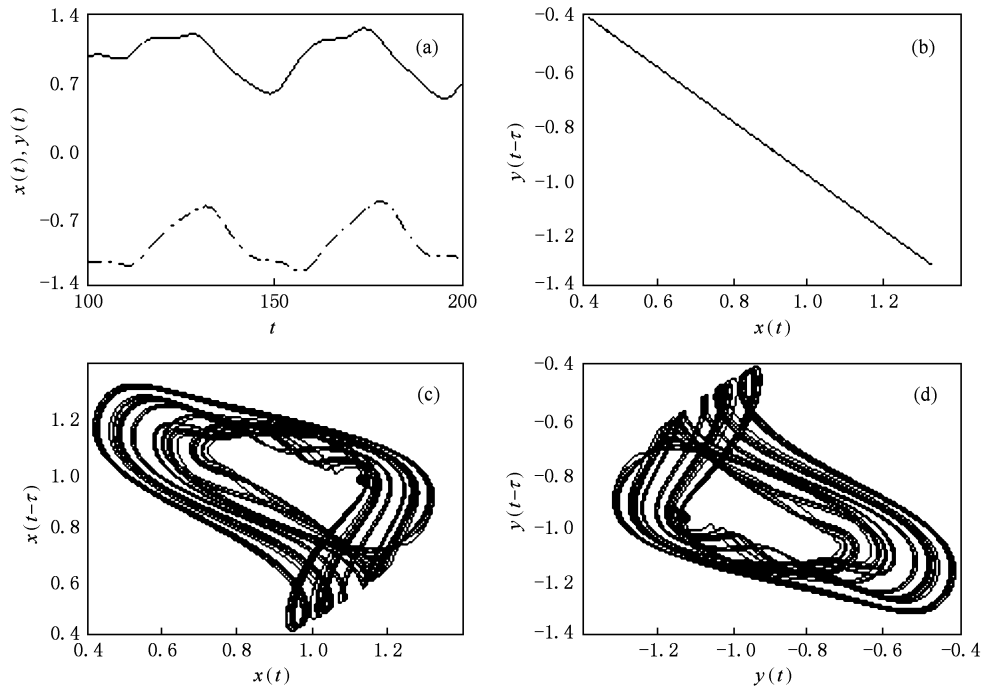


图 2 $\alpha=0.2, \beta=0.1, \tau=17, \lambda=-1$ 时,系统的仿真结果 (a) 为驱动系统的输出 $x(t)$ (实线)和响应系统的输出 $y(t)$ (虚线); (b) 为 $y(t-\tau)$ 与 $x(t)$ 的对比关系图; (c) 和 (d) 分别表示驱动系统的输出 $x(t)$ 和响应系统的输出 $y(t)$ 的吸引子 ($t \in [100,2000]$)

3. 加速预测投影响应系统

通过改变预测投影响应系统中函数 g 的形式和比例因子 λ 的值,可以构造不同的预测响应系统.

下面,将针对 $g_1(t) = \frac{t}{k} (k > 1)$ 的情况进行详细分析,显然 $g_1(t)$ 满足 g 的四个条件,将这个系统称为加速预测投影响应系统,该系统是文献[18]中的加速预测投影响应系统的推广,其系统方程如下:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f\left(x\left(\frac{t}{k}\right)\right), \quad (6)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha ky(t) + \lambda kf(x(t)), \quad (7)$$

其中(7)式中 $x(t)$ 为驱动信号, $\lambda kf(x(t))$ 为驱动

项. 根据第 2 节的分析,(7)式的输出 $y(t)$ 的轨迹渐近的趋于 $\lambda x(kt)$ 的轨迹,其中 $k > 1$,从该式可以看出,响应系统输出 $y(t)$ 的轨迹的演化速度是驱动系统输出 $x(t)$ 的 k 倍,并且 $y(t)$ 的幅度是 $x(t)$ 的 λ 倍.

在用数值仿真演示该系统时,采用修正后的 Ikeda 方程作为驱动系统^[18],其中 $f(\cdot) = -\beta \sin(\cdot)$,系统(6)和(7)就变为

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - \beta \sin\left(x\left(\frac{t}{k}\right)\right), \quad (8)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha ky(t) - \lambda k \beta \sin(x(t)), \quad (9)$$

其中 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2$. 为了展示 λ 对响应系统输出 $y(t)$ 的影响,选取 $\lambda = -1, \lambda = 1/2$ 以及 $\lambda = 2$ 分别做数值仿真. 采用 Runge-Kutta 对方程(8)和(9)进行求解,其中积分步长 $\Delta t = 0.0025$,积分区

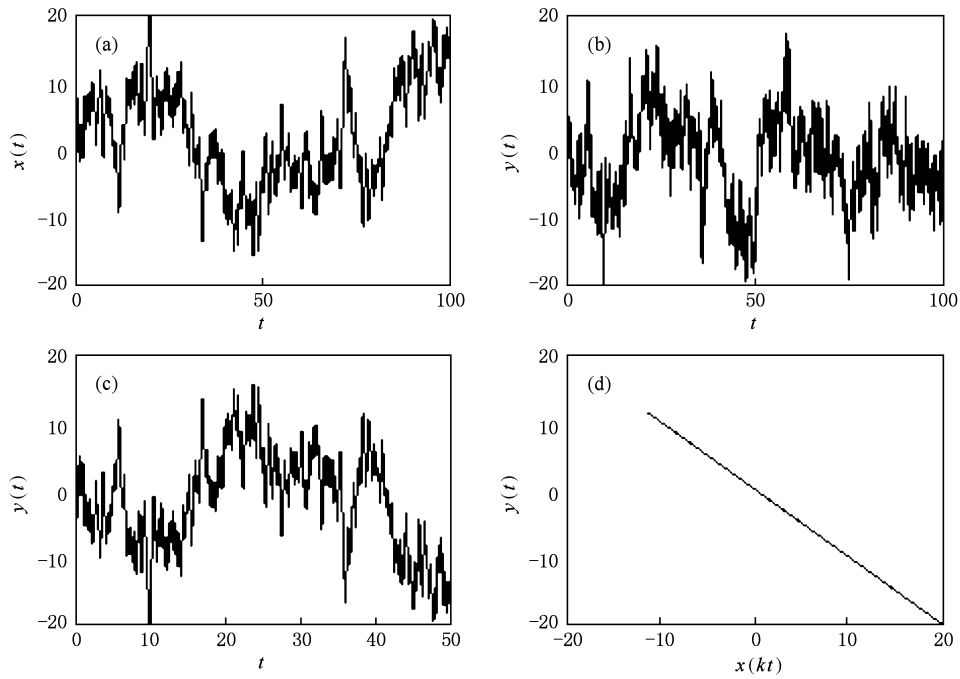


图3 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=-1$ 时系统的仿真结果 (a)为驱动系统的输出 $x(t)$ ($t=0, 2\Delta t, 4\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 100]$); (b)为响应系统的输出 $y(t)$ ($t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 100]$); (c)为响应系统的输出 $y(t)$ ($t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 50]$); (d)为 $y(t)$ 与 $x(kt)$ 的对应关系图

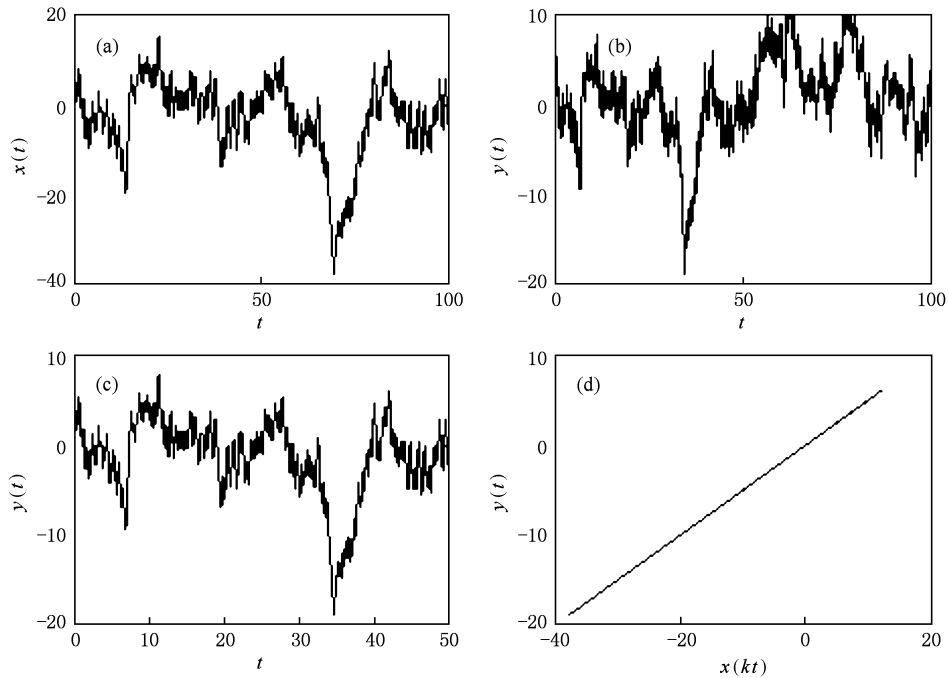


图4 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=1/2$ 时系统的仿真结果 (a)为驱动系统的输出 $x(t)$ ($t=0, 2\Delta t, 4\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 100]$); (b)为响应系统的输出 $y(t)$ ($t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 100]$); (c)为响应系统的输出 $y(t)$ ($t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 50]$); (d)为 $y(t)$ 与 $x(kt)$ 的对应关系图

间为 $[0,100]$. 仿真的结果如图 3、图 4 和图 5 所示. 图 3(a) 和 3(b) 分别表示驱动系统的输出 $x(t)$ 和响应系统的输出 $y(t)$. 为了验证 $y(t) = \lambda x(2t)$, 图 3(a) 中的时间点取为 $t=0, 2\Delta t, 4\Delta t, \dots$, 图 3(b) 中的时间点取值为 $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$. 图 3(c) 仅截取 $y(t)$ 在 $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 50]$ 的轨迹, 以便与图 3(a) 进行比较, 比较可以发现 (c) 中图形的幅度与

(a) 互为相反数. 图 3(d) 为 $y(t)$ 与 $x(kt)$ 的对比关系图, 为了不考虑过渡过程的影响, 画图时仅选取 $t \in [25, 50]$ 的部分, 从图中斜线的斜率清晰地看出 λ 的值. 图 4 和图 5 中各部分所表示的含义与图 3 相同. 为了能清晰的表示响应系统的输出 $y(t)$ 与驱动系统的输出 $x(t)$ 在幅度上的比例和 λ 之间的关系, 三图中的纵坐标随着 λ 的变化进行调整.

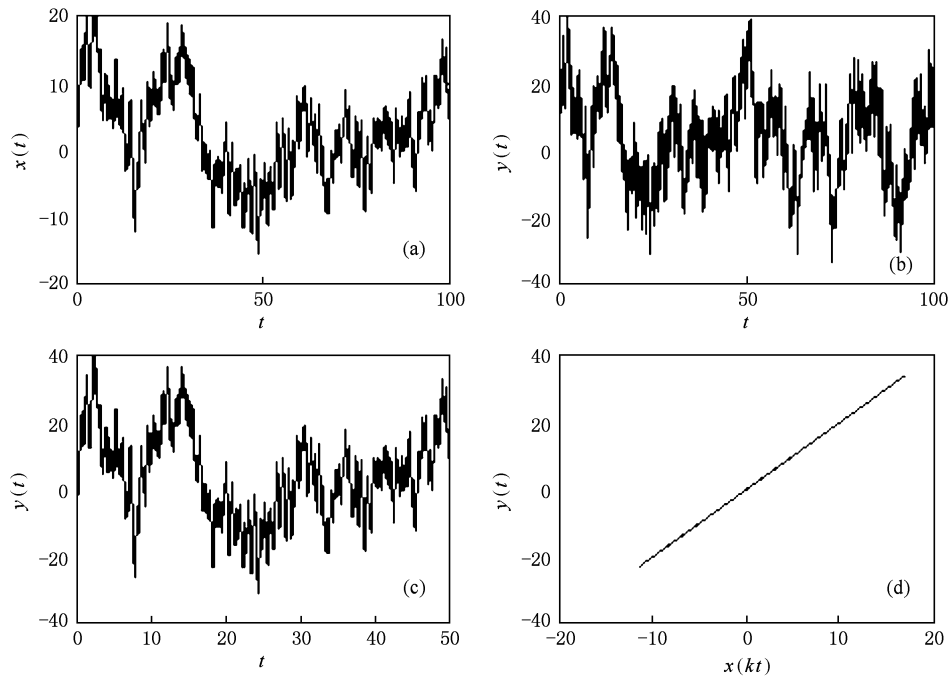


图 5 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=2$ 时系统的仿真结果 (a) 为驱动系统的输出 $x(t)$ ($t=0, 2\Delta t, 4\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 100]$); (b) 为响应系统的输出 $y(t)$ ($t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 100]$); (c) 为响应系统的输出 $y(t)$ ($t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 且 $t \in [0, 50]$); (d) 为 $y(t)$ 与 $x(kt)$ 的对应关系图

由图 3, 图 4 和图 5 可知: 随着 λ 的改变, 响应系统的输出 $y(t)$ 是驱动系统 $x(t)$ 在时间轴的 k 倍压缩以及在幅度轴的放大 ($\lambda > 1$)、缩小 ($0 < \lambda < 1$) 或者反向变化 ($\lambda < 0$). 由三幅图的 (a) 和 (c) 的对比可以清晰的看出 $y(t)$ 与 $x(kt)$ 幅度按照比例因子 λ 进行演化, 由 (d) 可知经过一段过渡时间的演化, 响应系统输出 $y(t)$ 与驱动系统输出 $\lambda x(kt)$ 是相等的. 为了定量评价 $y(t)$ 与 $\lambda x(kt)$ 的误差, 考查 $\Delta(t)$ 的绝对值的平均, 用 $|\Delta(t)|$ 表示. 在该数值仿真中, 采用 $t \in [50, 100]$ 时 $x(t)$ 的值和 $t \in [25, 50]$ 时 $y(t)$ 的值来计算 $|\Delta(t)|$. 当 $\lambda = -1$ 时, $|\Delta(t)|$ 为 0.0029; 当 $\lambda = 1/2$ 时, $|\Delta(t)|$ 为 0.0026; 当 $\lambda = 2$ 时, $|\Delta(t)|$ 为 0.0057. 由此可以看出: 经过一段时间的演化, $y(t)$ 与 $\lambda x(kt)$ 的误差很小, 即 $y(t)$ 与

$\lambda x(kt)$ 几乎是相等的.

4. 加速预测投影响应系统的鲁棒性分析

在实际的驱动响应系统中, 驱动信号和驱动项有微小扰动以及参数失配是不可避免的, 因此考察加速预测投影响应系统的鲁棒性是很必要的. 下面我们将针对以下四种情况进行分析: 响应系统中驱动项 $\lambda kf(x(t))$ 有微小的加性干扰, 该干扰信号是关于 $x(t)$ 的连续有界函数; 响应系统中驱动信号 $x(t)$ 有一个有界随机的干扰; 驱动系统与响应系统的参数 α 失配; 驱动系统与响应系统的参数 k 失配.

4.1. 响应系统中驱动项有微小的加性干扰时系统的鲁棒性

当 $kf(x(t))$ 存在微小加性干扰时, 响应系统方程由(7)式变为如下

$$\dot{y}(t) = -\alpha ky(t) + \lambda kf(x(t)) + \gamma \varepsilon(x(t)), \quad (10)$$

这里 γ 是一个小的正数, ε 为连续有界函数, 并定义其绝对值的上确界为 $\sup |\varepsilon|$. 令 $\Delta(t) = y(t) - \lambda x(kt)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= \dot{y}(t) - \lambda k \dot{x}(kt) \\ &= -\alpha k \Delta(t) + \gamma \varepsilon(x(t)), \end{aligned} \quad (11)$$

对(11)式求解并令 $\Delta_0 = y(0) - \lambda x(0)$ 得到

$$\Delta(t) = e^{-\alpha kt} \Delta_0 + \gamma \int_0^t e^{\alpha k(v-t)} \varepsilon(x(v)) dv. \quad (12)$$

计算 $|\Delta(t)|$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时的值, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-\alpha kt} \Delta_0 + \gamma \int_0^t e^{\alpha k(v-t)} \varepsilon(x(v)) dv| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-\alpha kt} \Delta_0| \\ &\quad + \gamma \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^t e^{\alpha k(v-t)} \varepsilon(x(v)) dv \right| \\ &\leq \gamma \sup |\varepsilon| \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^t e^{\alpha k(v-t)} dv \right| \\ &= \frac{\gamma}{\alpha k} \sup |\varepsilon|. \end{aligned} \quad (13)$$

由(13)式可知, 当响应系统受到一个加性信号 $\gamma \varepsilon(t)$ 的干扰, $y(t)$ 与 $\lambda x(kt)$ 之间的误差的绝对值 $|\Delta(t)|$ 在 t 很大时存在上界 $\frac{\gamma}{\alpha k} \sup |\varepsilon|$. 可见, 只要 γ 足够小, 同步误差就很小, 这就证明了加速预测投影响应系统在驱动项有微小扰动下具有鲁棒性, 并且改变比例因子 λ , $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta(t)|$ 的上界不会发生改变, 因此该系统的鲁棒性能不依赖于比例因子 λ .

令(8)式中 $f(x(t)) = -\beta \sin(x(t))$, $\varepsilon(t) = \cos(t)$, 则受到干扰后的响应系统为

$$\dot{y}(t) = -\alpha ky(t) - \lambda k \beta \sin(x(t)) + \gamma \cos(x(t)), \quad (14)$$

选择 $\alpha = 0.1, \beta = 20, k = 2, \gamma = 1$. 为简单起见, 在这里仅选取 $\lambda = -1$ 进行数值仿真, 并且仅展示 $y(t)$ 与 $x(kt)$ 对应关系图的仿真结果, 同样在画图时不考虑过渡过程的影响, 仅选取 $t \in [25, 50]$ 的部分(后面三部分的讨论均是如此), 如图6所示. 由图6和计算得到的 $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta(t)| = 0.1271$, 可以证实理论分析的正确性.

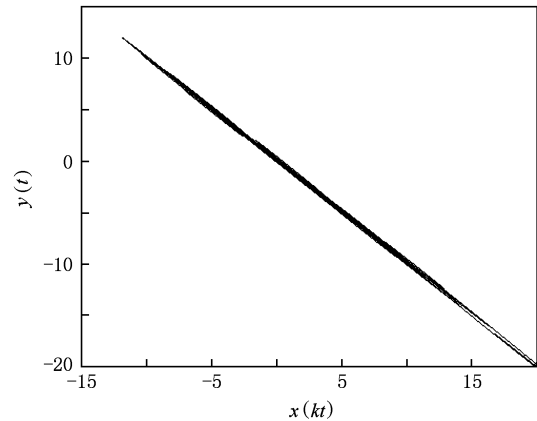


图6 $\alpha = 0.1, \beta = 20, k = 2, \lambda = -1$ 时, 受扰动后的响应系统(14)的 $y(t)$ 与驱动系统(8)的 $x(kt)$ 的对应关系图

4.2. 响应系统中的驱动信号 $x(t)$ 存在扰动时的系统鲁棒性

当(7)式中的驱动信号 $x(t)$ 受到微小信号的干扰时, 则变为下面的形式:

$$\dot{y}(t) = -\alpha ky(t) + \lambda kf(x(t) + u(t)), \quad (15)$$

其中 $u(t)$ 为有界的随机信号, 其上确界(用 $\sup |u|$ 表示)较小. 类似于 4.1. 节中的推导可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta(t)| \leq \frac{|\lambda|}{\alpha} (\sup |f(x(t) + u(t)) - f(x(t))|). \quad (16)$$

由于 $u(t)$ 的幅度很小, 将 $\sup |f(x(t) + u(t)) - f(x(t))|$ 沿 $x(t)$ 作一阶泰勒级数展开可近似为 $\frac{|\lambda|}{\alpha} (\sup |f'(x(t)) u(t)|)$, 且 $\frac{|\lambda|}{\alpha} (\sup |f'(x(t)) u(t)|) \leq \frac{|\lambda|}{\alpha} \sup |f'| \sup |u|$. 此可知, 当 t 足够大

时, $|\Delta(t)|$ 存在上界 $\frac{|\lambda|}{\alpha} \sup |f'| \sup |u|$, 又 $|u(t)|$ 有界且上确界 $\sup |u|$ 很小, 则 $y(t)$ 与 $\lambda x(kt)$ 的误差很小. 这就证明了加速预测投影响应系统在驱动信号有微小扰动时具有鲁棒性, 此外还可以看到, 当 $|\lambda|$ 较小时, 系统抗驱动信号扰动的鲁棒性相对更强.

进行仿真实验时, 选取 $f(x(t)) = -\beta \sin(x(t))$, $u(t) = \varepsilon \cos(\omega t + \theta)$, ω 和 θ 均为随机变量, ω 服从 $[1, 100]$ 上的均匀分布, θ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布. 受到干扰后的响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\alpha ky(t) - \lambda k \beta \sin(x(t)) \\ &\quad + \varepsilon \cos(\omega t + \theta). \end{aligned} \quad (17)$$

令 $\alpha = 0.1, \beta = 20, k = 2, \lambda = -1, \varepsilon = 0.1$, $y(t)$ 与

$x(kt)$ 对应关系图的仿真结果如图 5 所示. 计算的得到的 $|\Delta(t)| = 0.0255$, 这些都表明了理论分析的正确性.

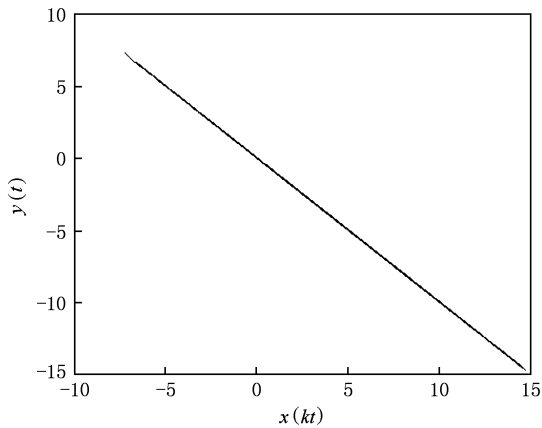


图 7 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=-1$ 时, 受扰动后响应系统(17)的 $y(t)$ 与驱动系统(8)的 $x(kt)$ 的对应关系图

4.3. 参数 α 失配时系统的鲁棒性

当(6)和(7)式中的参数 α 失配时, 保持(6)式中的 α 不变, (7)式中的 α 变为 $\alpha + \delta_\alpha$ ($|\delta_\alpha| \ll |\alpha|$), 则(7)式变为

$$\dot{y}(t) = -(\alpha + \delta_\alpha)ky(t) + \lambda kf(x(t)). \quad (18)$$

类似于 4.1. 节的推导可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta(t)| \leq \left| \frac{\delta_\alpha}{\alpha} \right| \left(|y_0| + \frac{|\lambda|}{\alpha + \delta_\alpha} \sup |f| \right). \quad (19)$$

由(19)式可知, 当 $|\delta_\alpha| \rightarrow 0$ 时, $\left| \frac{\delta_\alpha}{\alpha} \right| \left(|y_0| + \frac{|\lambda|}{\alpha + \delta_\alpha} \sup |f| \right) \rightarrow 0$. 这就说明足够小的 $|\delta_\alpha|$ 引起的同步误差也是很小的, 从而证明了加速预测投影响应系统在参数 α 失配时仍具有鲁棒性, 且当 $|\lambda|$ 较小时, 系统抗参数 α 失配的鲁棒性相对更强.

仿真实验中, 选取 $f(x(t)) = -\beta \sin(x(t))$, 则(18)式就变为

$$\dot{y}(t) = -k(\alpha + \delta_\alpha)y(t) - \beta k \lambda \sin(x(t)). \quad (20)$$

其中 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \delta_\alpha=0.01, y(t)$ 与 $x(kt)$ 对应关系图的仿真结果如图 8 所示. 计算的得到的 $|\Delta(t)| = 0.1450$, 验证了理论分析的正确性.

4.4. 参数 k 失配时系统的鲁棒性

当(6)和(7)式中的参数 k 失配时, 保持驱动系

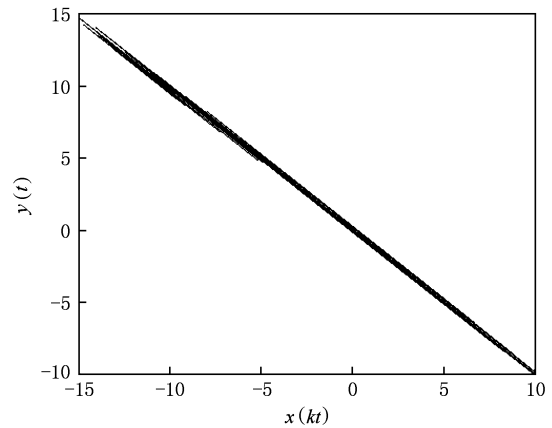


图 8 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=-1, \delta_\alpha=0.01$ 时, 参数失配时响应系统(20)的 $y(t)$ 与驱动系统(8)的 $x(kt)$ 的对应关系图

统不变, 则响应系统变为

$$\dot{y}(t) = -\alpha(k + \delta_k)y(t) + \lambda(k + \delta_k)f(x(t)), \quad (21)$$

其中 $|\delta_k| \ll k$, 类似于 4.1. 节的推导方式, 可得出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta(t)| \leq \frac{|\delta_k|}{k} \left(|y_0| + \frac{2|\lambda|}{\alpha} \sup |f| \right), \quad (22)$$

由于 $|\delta_k| \ll k, \frac{|\delta_k|}{k}$ 为很小的正数, 当 t 足够大时, $|\Delta(t)|$ 有很小的上界, 所以 $y(t)$ 仍能与 $\lambda x(kt)$ 保持一致, 且当 $|\lambda|$ 较小时, 系统抗参数 k 失配的鲁棒性相对更强.

同样, 进行仿真实验时, 选取 $f(x(t)) = -\beta \sin(x(t))$, 则(21)式就变为

$$\dot{y}(t) = -\alpha(k + \delta_k)y(t) - \beta \lambda (k + \delta_k) \sin(x(t)). \quad (23)$$

其中 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=-1, \delta_k=0.2, y(t)$ 与

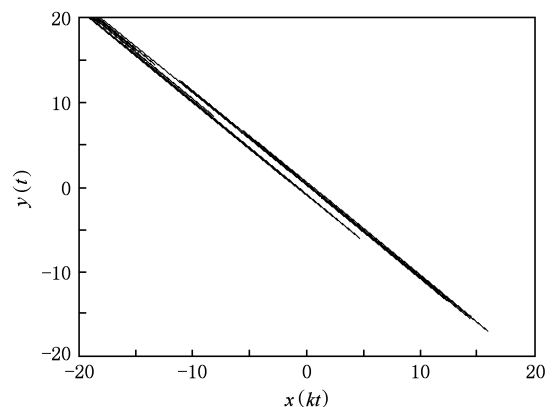


图 9 $\alpha=0.1, \beta=20, k=2, \lambda=-1, \delta_k=0.2$ 时, 参数失配时响应系统(23)的 $y(t)$ 与驱动系统(8)的 $x(kt)$ 的对应关系图

$x(kt)$ 对应关系图的仿真结果如图 9 所示. 计算得到的 $|\Delta(t)| = 0.5855$, 表明加速预测投影响应系统在 k 失配时仍具有鲁棒性.

由上面的理论分析和数值仿真说明加速预测投影响应系统在受到微小加性干扰以及参数失配的情况下, 响应系统的输出 $y(t)$ 与 $\lambda x(kt)$ 的偏差很小, 也就是说外界的微小干扰不会对该系统造成严重的影响.

5. 结 论

本文提出了一种新的预测投影响应系统, 通过改变系统中函数 g 的形式以及 λ 的值, 可以构造一系列不同形式的耦合动力系统. Voss 提出的预测同步系统^[16]是预测投影响应系统中参数 $\lambda = 1$, 函数 $g(t) = t - \tau$ 时的特殊情况; 一般预测响应系统^[18]是预测投影响应系统中参数 $\lambda = 1$ 时的特殊情况; 而

当 $\lambda = -1, g(t) = t - \tau$ 时, 预测投影响应系统演变为反向预测同步系统^[17]. 因此, 本文提出的预测投影响应系统为现有文献中某些关于预测响应的研究结果提供了一个统一的框架, 并可以由该系统导出现有文献中所没有的新的预测响应系统, 即预测投影响应现象. 同时, 我们还以 Mackey-Glass 方程为例进行数值仿真, 验证了比例因子对响应系统的输出 $y(t)$ 的吸引子尺度的影响, 并表明了所构造的预测投影方案的正确性.

在文中还详细介绍了加速预测投影响应系统, 并展示了三种不同 λ 取值下的加速预测投影响应系统仿真结果. 结果表明: 随着 λ 的改变, 响应系统的输出 $y(t)$ 是驱动系统的输出 $x(t)$ 在时间轴的 k 倍压缩以及在幅度轴的放大 ($\lambda > 1$)、缩小 ($0 < \lambda < 1$) 或者反向变化 ($\lambda < 0$). 最后结合理论分析和数值仿真验证了该系统在驱动信号和驱动项有微小扰动以及参数失配的情况下具有鲁棒性.

-
- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Cuomo K M, Oppenheim A V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 65
- [3] Hayes S, Grebog C, Ott E, Mark A 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 1781
- [4] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, Abarbanel H D I 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [5] Kocarev L, Solak U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [6] Hu A H, Xu Z Y, Guo L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6030 (in Chinese) [胡爱花、徐振源、过榴晓 2009 物理学报 **58** 6030]
- [7] Rosenblum M, Pikovsky A, Kurtz J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [8] Liu Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 749 (in Chinese) [刘 勇 2009 物理学报 **58** 749]
- [9] Maimieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3024
- [10] Hung Y C, Hwang C C, Liao T L 2006 *Chaos* **16** 033125
- [11] Wang X Y, Wang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2498 (in Chinese) [王兴元、王 勇 2007 物理学报 **56** 2498]
- [12] Cheng X R, Liu C X, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1453 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、李永勋 2008 物理学报 **57** 1453]
- [13] Chee C Y, Xu D L 2006 *IEEE Proc. Circuits Devices Syst.* **153** 357
- [14] Feng C F, Xu X J, Wang S J, Wang Y H 2008 *Chaos* **18** 023117
- [15] Ghosh D 2009 *Chaos* **19** 013102
- [16] Voss H U 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5115
- [17] Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A 2002 *Phys. Rev. E* **66** 017204
- [18] Yan H, Wei P, Xiao X C 2009 *Chaos* **19** 023122
- [19] Mackey M, Glass L 1977 *Science* **197** 287

Anticipating projective response in coupled dynamical systems

Wang Jiao-Jiao[†] Yan Hua Wei Ping

(*School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China*)

(Received 18 January 2010; revised manuscript received 16 March 2010)

Abstract

In this paper, we suggest an anticipating projective response scheme in coupled dynamical systems, from which a large class of different drive-response systems can be constructed by choosing different functions and changing the scaling factor. A specific case of the scheme, which is named the accelerative anticipating projective response scheme, is studied in detail. In this specific scheme, the amplitudes of the drive and response systems synchronize up to a scaling factor and the response system evolves with a faster speed. Further, the robustness of this scheme is proved under the existence of the small disturbance of the driving term, interference of the driving signal and parameter mismatches.

Keywords: anticipating projective response, accelerative anticipating projective response, coupled dynamical systems, robustness

PACC: 0545

[†] E-mail: wangjiaoj823@sohu.com