

利用单驱动变量实现一类分数阶混沌系统的修正投影同步*

李建芬^{1)†} 李 农²⁾ 陈长兴¹⁾

1) (空军工程大学理学院, 西安 710051)

2) (空军工程大学工程学院, 西安 710038)

(2009 年 12 月 25 日收到; 2010 年 3 月 6 日收到修改稿)

通过设计一个合适的响应系统, 提出了一种修正投影同步方案, 该方法通过传递一个驱动变量实现了一类分数阶混沌系统的修正投影同步, 由于只需在驱动系统和响应系统之间传递一个驱动变量, 具有较高的实用价值, 最后以分数阶统一混沌系统为例进行了数值仿真, 理论和数值仿真表明了该方法的有效性.

关键词: 修正投影同步, 单驱动变量, 分数阶统一混沌系统

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 分数阶混沌系统的研究引起了学者们的广泛兴趣, 通过对 Lorenz 系统^[1], Chua 电路^[2], Chen 系统^[3], 统一混沌系统^[4] 以及一些超混沌系统^[5,6] 等的研究表明, 当系统阶数为适当的分数时, 系统仍然处于混沌状态. 由于分数阶混沌系统比整数阶混沌系统更接近于工程实际, 因此研究分数阶混沌系统具有重要的实际意义. 在保密通信以及控制工程等方面分数阶混沌系统具有潜在的应用能力, 已经提出了适合不同分数阶混沌系统的同步控制方法^[7-9], 文献[7]基于自适应控制技术, 提出了使分数阶统一混沌系统获得完全同步的方法; 文献[8]实现了一类分数阶混沌系统的投影同步; 文献[9]利用 Active 控制方法, 实现了分数阶 Liu 系统与分数阶统一混沌系统之间的异结构同步.

最近, 一种称为修正投影同步(modified projective synchronization, MPS)的混沌同步方法被提出^[10], 即主从混沌系统的同步轨道保持在某一常数比例矩阵. 这一特性在混沌保密通信中, 可以把二进制数扩展到可变的 M 进制以实现更快的数字通信, 同时, 也使得修正投影同步跨越了从混沌控制到混沌同步的差距. 因此对修正投影同步的研究

具有重要的理论意义和应用前景. 文献[10-12]分别针对整数阶混沌系统提出了修正投影同步方法. 但这些方法一方面需向响应系统传递多路驱动信号, 另一方面, 由于采用了通过设计控制器消去系统的非线性项使系统的系数矩阵成为定常矩阵的方法, 其控制代价较大, 实用性不强.

本文针对一类分数阶混沌系统提出一种修正投影同步的新方法, 通过设计一个合适的响应系统, 仅传递一个驱动变量即可实现一类分数阶混沌系统的修正投影同步, 具有较高的实用价值, 在混沌保密通信等领域有很好的应用潜力.

2. 分数阶混沌系统的 MPS 方案

2.1. 分数阶微分及数值算法

在分数阶微积分理论中, 有很多种函数的分数阶微积分定义, 其中最常用的定义是

$$D^\theta x(t) = J^{m-\theta} x^{(m)}(t) \quad (\theta > 0),$$

这里 m 是不小于 θ 的最小整数, $x^{(m)}(t)$ 表示通常意义下的 m 阶导数, J^q 为 q 阶 Reimann-Liouville 积分算子, 且 $J^q y(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} y(\tau) d\tau$, $q > 0$, 这里 Γ 是 Gamma 函数, D^θ 是 θ 阶的 Caputo 微

* 陕西省电子信息系统集成重点实验室基金(批准号: 200906B)资助的课题.

† E-mail: ln2807@163.com

分算子^[13].

对于分数阶微积分运算,有多种求解方法,但常用的方法主要有波特图近似方法^[14]和预估-校正方法^[15],下面简单介绍本文利用的预估-校正方法 (predictor-corrector algorithm).

考虑如下微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x(t)}{dt^q} &= f(t, x(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x^{(k)}(0) &= x_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [q] - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

方程(1)与 Volterra 积分方程

$$\begin{aligned} a_{j,n+1} &= \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q, & j = 0, \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1}, & 1 \leq j \leq n, \\ 1, & j = n+1, \end{cases} \\ y_h^n(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[q]-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \\ b_{j,n+1} &= \frac{h^q}{q} ((n-j+1)^q - (n-j)^q). \end{aligned}$$

(2)式和(3)式的误差为 $\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p)$, 其中 $p = \min(2, 1+q)$. 本文所有的数值计算将采用预估-校正方法.

2.2. 修正投影同步 (MPS) 方案

对于分数阶混沌系统

$$\begin{aligned} \text{驱动系统} \quad \frac{d^q \mathbf{x}}{dt^q} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}), \\ \text{响应系统} \quad \frac{d^q \mathbf{y}}{dt^q} &= \mathbf{G}(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{y} \in R^n$ 为状态变量, $\mathbf{F}(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R^n, \mathbf{G}(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R^n$ 为连续向量函数.

如果存在常数比例矩阵 $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}\| = \mathbf{0}$, 则称驱动系统和响应系统为“修正投影同步”(MPS). 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为投影比例因子(均不为零), 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 各不相等时, 分别对应完全同步、投影同步和修正投影同步.

本文提出的 MPS 方案如下:

考虑如下形式的分数阶混沌系统

$$\frac{d^q \mathbf{x}}{dt^q} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{[q]-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} \\ &\quad \times f(t, y(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

等价, 取 $h = \frac{T}{N}, t_n = nh, n = 0, 1, \dots, N \in Z^+, (2)$

式可离散化为

$$\begin{aligned} y_h(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[q]-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^q}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^n(t_{n+1})) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \end{aligned} \quad (3)$$

式中

这里 $0 < q < 1$ 为分数阶的阶数, \mathbf{A} 是关于系统参数的 $n \times n$ 矩阵, $\mathbf{f}(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R^n$ 为连续向量函数, 并设其满足 Lipchitz 条件. 将系统(4)作为驱动系统, 则本文设计的响应系统为

$$\frac{d^q \mathbf{y}}{dt^q} = \alpha^{-1} [\mathbf{A} \alpha \mathbf{y} + \mathbf{f}(\alpha \mathbf{y}) + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \alpha \mathbf{y})], \quad (5)$$

其中 $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是耦合系数矩阵.

定义系统(4)和(5)的修正投影同步误差为 $\mathbf{e} = (x_1 - \alpha_1 y_1, x_2 - \alpha_2 y_2, \dots, x_n - \alpha_n y_n)^T$, 则分数阶误差系统为

$$\frac{d^q \mathbf{e}}{dt^q} = \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\alpha \mathbf{y}) - \mathbf{K} \mathbf{e}.$$

由于 $f(\cdot)$ 满足 Lipchitz 条件, 且混沌系统的状态向量是有界的, 即 $\|\mathbf{x}\| < M$, 因此可记

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\alpha \mathbf{y}) = \mathbf{M}_{xy} \mathbf{e}.$$

这样

$$\frac{d^q \mathbf{e}}{dt^q} = (\mathbf{A} + \mathbf{M}_{xy} - \mathbf{K}) \mathbf{e} = \mathbf{A}'(x, y) \mathbf{e}. \quad (6)$$

文献[16]给出了分数阶系统(6)稳定的充要条件.

引理 对系统(6), 如果系数矩阵 $\mathbf{A}'(x, y)$ 的任意特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}$, 则该系统渐进稳定.

阶次为 q 的分数阶系统, 其稳定性区域如图 1

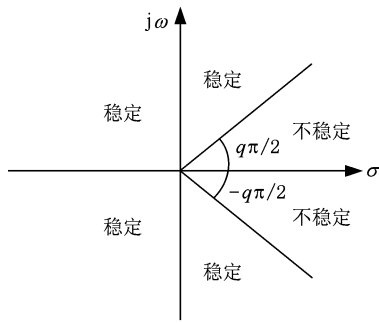


图1 分数阶系统的稳定区间

所示. 显然, 如果 $q < 1$, 只要使含有状态变量的系数矩阵 $A'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 无论状态变量为何值 (除去原点外), 其所有特征值实部都不大于零则分数阶系统(6)将稳定到原点.

对于系统(6), 可以选择适当的 \mathbf{K} , 使其满足稳定条件. 由于 $A'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 含有状态变量, 因此本文通过数值计算, 获取分数阶误差系统的特征值实部随时间的变化规律来说明系统的稳定性.

3. 数值仿真

2002年由 Lü 等提出的统一混沌系统, 其数学表达式如下:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (25a + 10)(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= (28 - 35a)x_1 - x_1x_3 + (29a - 1)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - (8 + a)x_3/3,\end{aligned}$$

式中 $a \in [0, 1]$ 为系统参数, 当 $a \in [0, 0.8]$ 时, 统一系统属于广义 Lorenz 系统; 当 $a \in [0.8, 1]$ 时, 统一系统属于广义 Chen 系统; 而当 $a = 0.8$ 时, 统一系统属于 Lü 系统. 当 a 由零逐渐增加到 1 时, 系统也由广义的 Lorenz 系统逐渐过渡到广义的 Chen 系统.

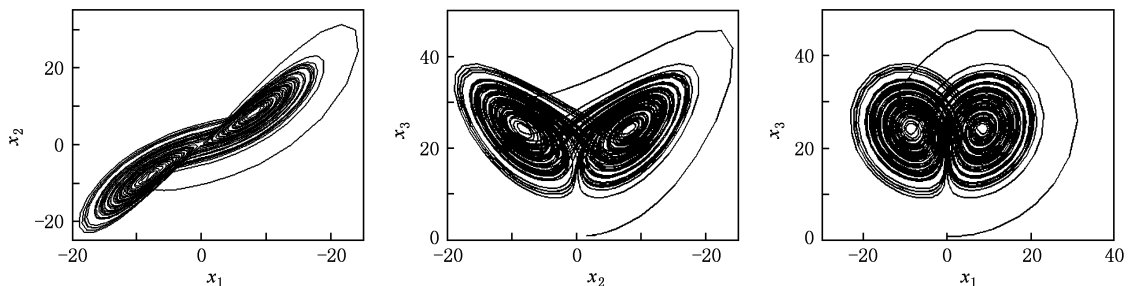


图2 分数阶统一系统混沌吸引子

相应的分数阶统一系统^[17]有如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{d^q x_1}{dt^q} &= (25a + 10)(x_2 - x_1), \\ \frac{d^q x_2}{dt^q} &= (28 - 35a)x_1 - x_1x_3 + (29a - 1)x_2, \\ \frac{d^q x_3}{dt^q} &= x_1x_2 - (8 + a)x_3/3.\end{aligned}\quad (7)$$

其中 $0 < q < 1$, 当 $q = 0.9$, $a = 0.5$ 时系统的二维相图如图 2 所示.

以分数阶统一系统为例说明本文提出的 MPS 方案, 将系统(7)作为驱动系统, 则(5)式, 响应系统为

$$\begin{aligned}\frac{d^q y_1}{dt^q} &= \frac{1}{\alpha_1} [(25a + 10)(\alpha_2 y_2 - \alpha_1 y_1) \\ &\quad + k_1(x_1 - \alpha_1 y_1)], \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} &= \frac{1}{\alpha_2} [(28 - 35a)\alpha_1 y_1 - \alpha_1 y_1 \alpha_3 y_3 \\ &\quad + (29a - 1)\alpha_2 y_2 + k_2(x_2 - \alpha_2 y_2)], \\ \frac{d^q y_3}{dt^q} &= \frac{1}{\alpha_3} [\alpha_1 y_1 \alpha_2 y_2 - (8 + a)\alpha_3 y_3/3 \\ &\quad + k_3(x_3 - \alpha_3 y_3)].\end{aligned}\quad (8)$$

系统(7)与(8)的误差系统为

$$\begin{aligned}\frac{d^q \mathbf{e}}{dt^q} &= (\mathbf{A} + \mathbf{M}_{xy} - \mathbf{K})\mathbf{e} \\ &= \begin{bmatrix} -25a - 10 - k_1 & 25a + 10 & 0 \\ 28 - 35a - x_3 & 29a - 1 - k_2 & -\alpha_1 y_1 \\ x_2 & \alpha_1 y_1 & -\frac{8+a}{3} - k_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}.\end{aligned}\quad (9)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -25a - 10 & 25a + 10 & 0 \\ 28 - 35a & 29a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8+a}{3} \end{bmatrix},$$

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 0_1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -\alpha_1 y_1 \\ x_2 & \alpha_1 y_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix},$$

通过系数矩阵 $A'(x,y)$ 的特征值可判定系统(9)是否稳定.

本文采用预估-校正法进行数值模拟,选择 $(k_1,$

$k_2, k_3) = (0, 40, 0)$, 状态变量的初值为 $x_1(0) = 3, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 1, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = -1, y_3(0) = -0.5$. 计算比例因子 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -0.5$ 和 $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0.5$ 两种情况下, $A(x,y)$ 的特征值 $\lambda_i(t)$ 的实部随时间变化的曲线如图 3 和图 4 所示. 由图可见, $A(x,y)$ 的所有特征值的实部在状态变量 x,y 的变化范围内均小于零, 即在上述两种情况下, 系统(9)是稳定的. 类似地可以求出比例矩阵 α 为其它值的情形.

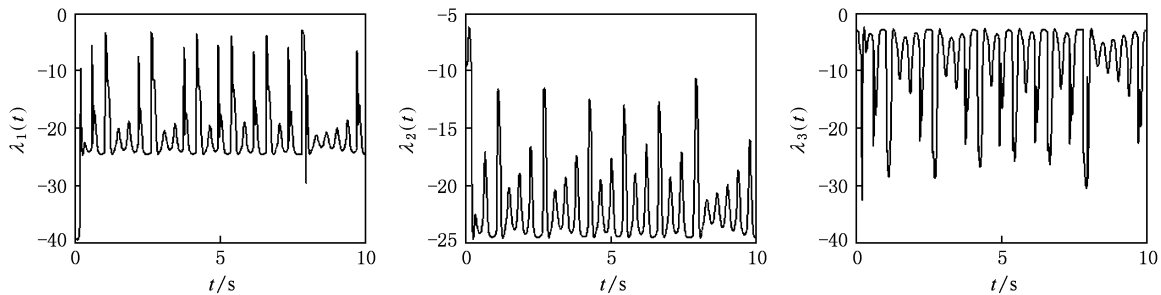


图 3 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -0.5$ 时 $A'(x,y)$ 的三个特征值的实部随时间的变化曲线

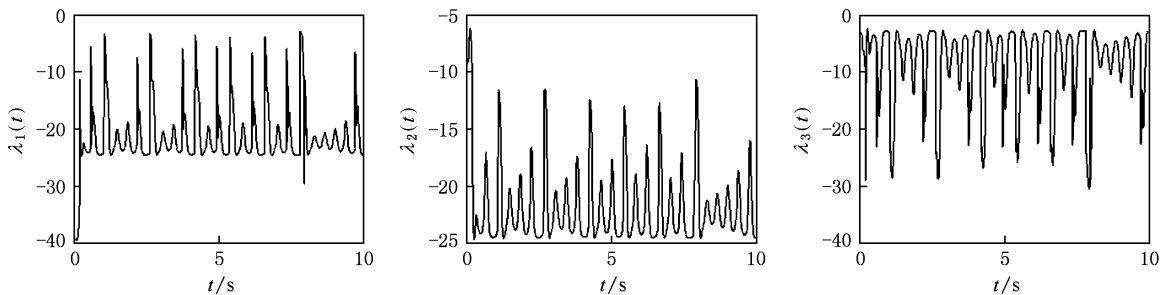


图 4 $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0.5$ 时 $A'(x,y)$ 的三个特征值的实部随时间的变化曲线

图 5—图 7 是 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -0.5$ 和 $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0.5$ 两种情况下, 系统(7)和(8)之间的投影同步的模拟结果. 由图 5 可见, 比例因子选取相同值时, 随着 t 的增加, 误差 $e_1(t), e_2(t)$ 和 $e_3(t)$

很快趋于零, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \alpha y\| = 0$, 此时表明系统(7)和系统(8)达到了投影同步. 由图 7 可见, 当比例因子选取不同值时, 随着 t 的增加, 误差 $e_1(t) = x_1 + 3y_1, e_2(t) = x_2 + y_2$ 和 $e_3(t) = x_3 -$

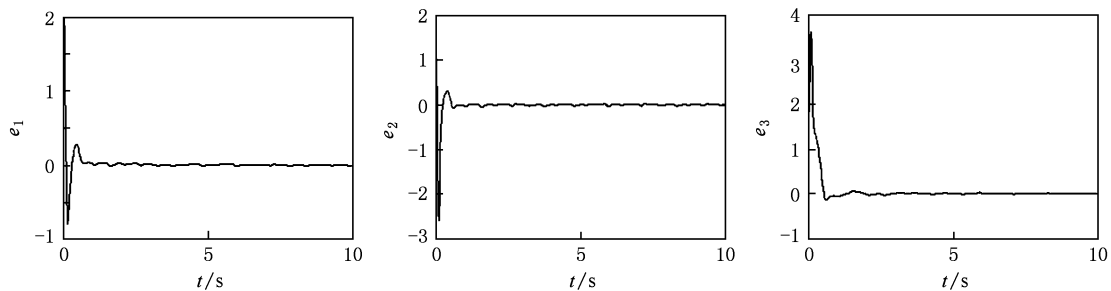


图 5 比例因子 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -0.5$ 时, 系统(7)和(8)的投影同步误差曲线 e_1, e_2, e_3

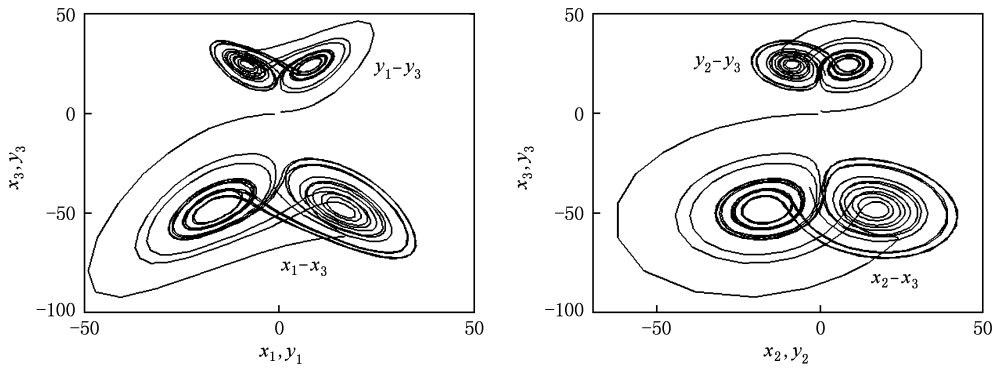


图 6 比例因子 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -0.5$ 时,系统(7)和(8)二维平面上反相位投影同步

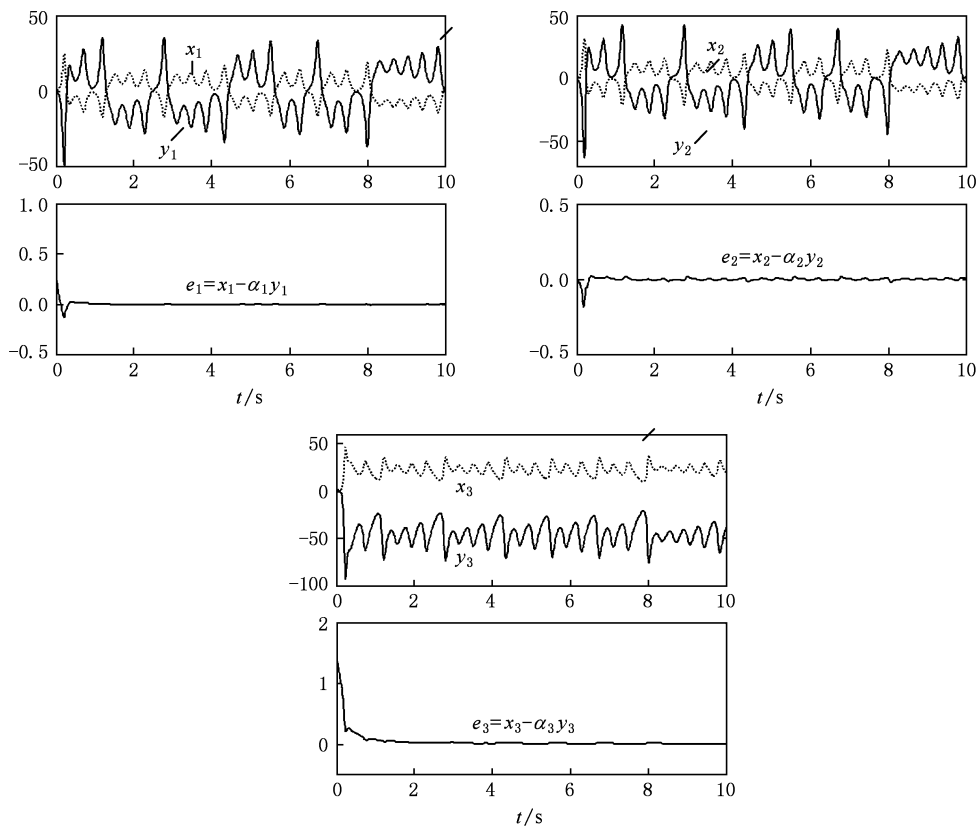


图 7 比例因子 $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0.5$ 时,系统(7)和(8)状态变量的时域波形及两系统的修正投影同步误差曲线 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$

0. $5y_3$ 很快趋于零,表明采用本文提出的方法同样可以使系统(7)和系统(8)实现修正投影同步. 由于 k_1, k_3 选择为 0,因此,只需传递一个驱动变量 x_2 即可实现系统全变量的修正投影同步.

4. 结 论

本文提出的修正投影同步方法只需传递一个

驱动变量,具有构造方法简单、适用范围广、实用性强等特点. 既可用于分数阶的混沌系统,也可扩展到整数阶,对于通过单向耦合实现完全同步的一类混沌系统均可采用本文提出的方法实现修正投影同步. 如 Chua's 电路, Lorenz 系统, Chen 系统, Lü 系统^[18]及最近由 Lü, Chen 等人提出的非线性电路里的多卷波系统^[19,20]等.

- [1] Lorenz E N, 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 131
- [2] Hartly T T, Lorenz C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [3] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [4] Lü J H, Chen G R, Cheng D, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [5] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [6] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [7] Zhang R X, Yang Y, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6039 (in Chinese) [张若洵、杨洋、杨世平 2009 物理学报 **58** 6039]
- [8] Wang X Y, He Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 485 (in Chinese) [王兴元、贺毅杰 2008 物理学报 **57** 485]
- [9] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [10] Li G H 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 1786
- [11] Park J H 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **34** 1154
- [12] Yang T, Fang J A 2008 *Physics Letters A* **372** 1816
- [13] Caputo M 1967 *The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **13** 529
- [14] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, Onaral B 1992 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **37** 9
- [15] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 443
- [16] Matignon D 1996 *IMACS-SMC Proceedings (Lille:IEEE)* 963
- [17] Wu X J, Li J, Chen G R 2008 *Journal of the Franklin Institute* **345** 392
- [18] Lü J H, Chen G R 2002 *Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [19] Lu J, Han F L, Yu X H, Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677
- [20] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **16** 775

Modification of projective synchronization for a class of fractional order chaotic system by using a single driving variable *

Li Jian-Fen^{1)†} Li Nong²⁾ Chen Chang-Xing¹⁾

1) (Institute of Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

2) (Institute of Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

(Received 25 December 2009; revised manuscript received 6 March 2010)

Abstract

Designing a suitable response system to a class of fractional order chaotic systems, we can realize the modification of projective synchronization for these systems by only transmitting a single variable. Since chaos synchronization can be achieved by transmitting the single variable from driving system to response system, this method is more practical. Numerical simulation of fractional order unified chaotic system demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Keywords: modified projective synchronization, single driving variable, fractional-order unified chaotic system

PACC: 0545

* Project supported by the Key Laboratory of Electronic Information System Integration of Shaanxi province, China (Grant No. 200906B).

† E-mail: ln2807@163.com