

时空混沌中的序图样研究

郭 晶 王 钺[†] 山秀明 任 勇

(清华大学电子工程系, 北京 100084)

(2009 年 7 月 16 日收到; 2010 年 3 月 9 日收到修改稿)

通过分段单调映射和线性耦合研究时空混沌中的序图样. 理论分析发现, 混沌映射的时不变性质导致映射曲线交点减少, 为序图样缺失的一个重要原因. 证明了线性耦合可以破坏映射的时不变性质, 并给出曲线交点增加的条件. 分析了耦合系统的映射、耦合系数和耦合次数对序图样的影响, 并以实例和仿真实验验证了上述理论结果.

关键词: 时空混沌, 序图样, 分段单调映射, 线性耦合

PACC: 0545

1. 引 言

混沌系统生成的序列伪随机性质良好, 因此混沌系统作为伪随机数发生器广泛用于信息安全、通信等多个领域^[1-6]. 然而, 由确定性系统生成的混沌序列毕竟与真实的随机序列不同, 在统计特征上会体现出一定的差别, 需要检验生成的混沌序列是否具有比较理想的随机特征, 以满足应用需求.

序图样是近年来受到关注的一种新的序列分析方法. 一个序列中的序图样数量, 与该序列的置换熵之间存在着严格的数学关系^[7]. 若置换熵为有限值, 则序列中会存在序图样缺失的现象. 一般, 混沌系统的 KS 熵是有限值. 研究发现, 分段单调映射和遍历映射的置换熵与 KS 熵相等^[8,9], 故这两种映射的置换熵是有限值, 相应的混沌序列中均存在序图样缺失^[10]. 另外, 复杂度较高的高维动力系统中也存在序图样缺失现象^[11]. 在实际应用中搜索序列中的序图样, 如果发现存在序图样缺失的现象, 则表明序列不是真实的随机序列^[12-14]. 序图样数量的计算简单直观, 能够将大量常见的混沌序列与真实随机序列区分开, 因而获得了广泛的应用^[15,16].

本文将序图样方法应用于时空混沌分析. 目前, 具有更高复杂度的时空混沌系统, 被应用于对随机性、复杂性要求较高的场合, 例如加密算法的密钥生成器^[17,18]. 但是, 由于缺乏针对性的分析手段, 迄今对时空混沌复杂性的理解还不够深入. 因

此, 探索利用序图样方法研究时空混沌系统, 具有一定的理论意义. 时空混沌在应用中一般采用单向耦合映像格子模型. 本文通过分析分段单调映射和线性耦合的时空混沌中的序图样, 发现映射的时不变性质是导致序图样缺失的重要原因, 得到序图样数量增加的条件和规律, 并结合仿真结果提出增加序图样的方法. 实验结果表明, 耦合格点输出序列中序图样数量比未耦合的混沌序列多, 说明时空混沌序列在置换熵的意义上比混沌序列更接近真实的随机序列, 从一个新的角度为探索时空混沌的复杂度高于低维混沌的科学原理提供了依据.

2. 问题的描述

本文研究的时空混沌系统, 建立在分段单调映射和线性耦合的模型之上. 在本节中, 我们首先建立基于分段单调映射的混沌系统模型, 然后定义与序图样相关的变量, 最后得到序图样种类数与映射曲线交点数的关系, 从而为序图样缺失原因的分析提供一个基础.

定义分段单调映射模型如下:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x \in I, \quad (1)$$

其中, f 是分段单调映射, 即存在 I 的一个有限划分 P , 在 P 的每个元素定义的子区间上, f 是单调的.

定义 F_n 为 f^0, \dots, f^n 这 $n+1$ 条曲线全部交点的集合, 即

$$F_n = \{x \in I \mid f^i(x) = f^j(x), \quad 0 \leq i, j \leq n\}.$$

[†] 通讯联系人. E-mail: wangyue@tsinghua.edu.cn

设 \tilde{P}_n 是 F_n 的全部元素在 I 上形成的划分, 在 \tilde{P}_n 的每个元素定义的子区间上, 只存在一种长度为 $n+1$ 的序图样.

设 $\pi = [k_1, \dots, k_n]$ 是一个长度为 n 的序图样, 即 $[1, \dots, n]$ 的一个置换. 定义 $P_\pi = \{x \in I \mid x_{k_1} < \dots < x_{k_n}\}$ 为序图样 π 成立的点集. 设 P_n^* 是所有非空 P_π 的集合. 如果 \tilde{P}_{n-1} 中若干元素定义的子区间对应相同的序图样, 则这些子区间属于 P_n^* 的一个元素, 因此 P_n^* 是 \tilde{P}_{n-1} 中若干元素的并集.

根据以上分析, 我们得到一个重要的不等式 $|P_{n+1}^*| \leq |\tilde{P}_n| = 1 + |F_n|$, 进而获知序图样种类数 $|P_{n+1}^*|$ 与映射曲线交点数 $|F_n|$ 的关系, 即 $|P_{n+1}^*|$ 一定小于 $|F_n|$. 长度为 $n+1$ 的序图样理论上 $(n+1)!$ 个, 实验结果表明式(1)定义的序列 $\{x_n\}$ 中的序图样数目 $|P_{n+1}^*| \ll (n+1)!$, 存在严重的序图样缺失现象.

3. 序图样缺失的原因

根据前文对问题的描述, 得到序图样数量 $|P_{n+1}^*|$ 与映射曲线交点数量 $|F_n|$ 的关系. 根据这一关系, 在本节中分析与序图样缺失有关的两个因素, 一个是曲线交点数远小于理论数量, 即 $|\tilde{P}_n| = 1 + |F_n| \ll n!$; 另一个是序图样种类数小于曲线交点划分的子区间数量, 即 $|P_{n+1}^*| < |\tilde{P}_n|$. 下面分别分析这两个因素的成因和影响.

3.1. $|\tilde{P}_n| = 1 + |F_n| \ll n!$

设 A_k^i 是 $f^i(x)$ 和 $f^{i+k}(x)$ 所有交点的集合, 即 $A_k^i = \{x \in I \mid f^i(x) = f^{i+k}(x)\}$, 则 F_n 可以改写成如下形式: $F_n = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=0}^{n-k} A_k^i$. 由于 $f(x)$ 具有时不变性质, 使得 $A_k^0 \subseteq f^{-1}(A_k^0)$, $A_k^i = f^{-i}(A_k^0)$, 因此 $F_n = \bigcup_{k=1}^n A_k^{n-k}$. 由于多条曲线共用一个交点, 即 $|F_n| \leq \sum_{k=1}^n |A_k^{n-k}|$, 因此 $|F_n|$ 小于 $n+1$ 条曲线交点数的上限 $n!$, 造成序图样种类减少. 实际上, $|F_n|$ 往往远小于 $n!$, 是造成序图样缺失的重要原因. 根据文献[8]中的分析, 假设 \tilde{P}_n 定义的每个子区间上 f^n 最多有 K 个不动点, 则 $|F_n| \leq Kn \cdot |P| \ll n!$.

3.2. $|P_{n+1}^*| < |\tilde{P}_n|$

\tilde{P}_n 中的元素和 P_{n+1}^* 中的元素是多对一的关系. 如果不增加 $|\tilde{P}_n|$, 即使存在某种措施消除重复的序图样, 使 \tilde{P}_n 中的元素和 P_{n+1}^* 中的元素成为一对一的关系, 最多只能出现 $|\tilde{P}_n|$ 种序图样. 当 $|\tilde{P}_n| = 1 + |F_n| \ll n!$ 时, 这种方法并不能显著地增加序图样种类. 根据文献[8]中的证明, 对于只有一个极值点的函数, \tilde{P}_n 中不存在两个以上元素定义的子区间序图样相同的情况. 设使得序图样重复的 \tilde{P}_n 元素共 m_n 对, 则 $|\tilde{P}_{n-1}| = |P_n^*| + m_n \leq 2|P_n^*|$. 这种措施最多使这类映射的序图样种类增加一倍, 序图样缺失的现象仍然很严重. 可见, $|P_{n+1}^*| < |\tilde{P}_n|$ 并不是序图样缺失的主要原因.

以上分析表明, 通过增加曲线的交点数 $|F_n|$, 才可能显著增加序图样种类数, 改善序图样缺失现象. 下面我们针对这个原因给出改进措施, 并得到耦合系统序图样种类数增加的理论解释.

4. 耦合系统增加序图样的原理

根据前文的分析, 映射的时不变性质使得曲线交点数远小于理论值, 造成序图样缺失. 线性耦合可以破坏映射的时不变性质, 达到增加序图样种类的目的. 下面分析耦合系统中的曲线交点和序图样种类数的关系.

4.1. 耦合增加曲线交点

定义耦合系统为

$$y_{n+1} = (1 - \varepsilon)g(y_n) + \varepsilon f(x_n) = \delta_n + \varepsilon f(x_n), \quad (2)$$

其中, $\delta_n = (1 - \varepsilon)g(y_n) \in [0, 1 - \varepsilon]$. 定义映射关系

$$\varphi^k(x_n) = \delta_{n+k} + \varepsilon f^k(x_n), \quad (3)$$

(2)式的耦合系统可写为 $y_{n+1} = \varphi(x_n)$, $\{y_n\}$ 相当于 $\{x_n\}$ 沿纵坐标比例变换并平移的结果. 设

$$F_n = \{x \in I \mid f^i(x) = f^j(x), \quad 0 \leq i, j \leq n\},$$

$$\Gamma_n = \{y \in I \mid \varphi^i(y) = \varphi^j(y), \quad 0 \leq i, j \leq n\}.$$

如果 Γ_n 中元素比 F_n 中元素多, 则说明耦合可以增加曲线交点数.

为了突出基本问题,分析一种典型的情况,即 $f(x)$ 经过变换成为 $\varphi(x)$ 后,每条曲线与其他 n 曲线的交点可能移动,但不会消失,且相交次序不变. 如果平移距离过大,会造成交点的消失或相交次序的改变,下面的假设排除了这个因素对后文分析的干扰.

假设 $\forall x_{ij}, x_{kl} \in F_n$, 使得 $f^i(x_{ij}) = f^j(x_{ij})$ 、 $f^k(x_{kl}) = f^l(x_{kl})$, 且 $x_{ij} < x_{kl}$, 则 $\exists y_{ij}, y_{kl} \in \Gamma_n$, 使得 $\varphi^i(y_{ij}) = \varphi^j(y_{ij})$ 、 $\varphi^k(y_{kl}) = \varphi^l(y_{kl})$, 且 $y_{ij} < y_{kl}$.

下面分析假设成立的条件. 设 C_n 是 f, f^2, \dots, f^n 极值点的集合, 设 $X_n = C_n \cup F_n = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{|X_n|}\}$, 将 X_n 中的所有元素按照升序排列. 设 $Y_n = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{|Y_n|}\}$, 若 \bar{x}_i 是 f^k 的极值点或 f^k 与其他曲线的交点, 则 $\bar{y}_i = f^k(\bar{x}_i)$. 设 d_i 为点 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) 与点 $(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})$ 、点 $(\bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ 在纵坐标方向上的最小距离, 即 $d_i = \min\{|\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}|, |\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1}|\}$. 由于 f 是分段单调映射, 有 $|C_n| < \infty$, 又因为 $|F_n| < n! < \infty$, 所以 $|X_n| < \infty$. 因此, d_i 的最小值一定是一个大于 0 的数, 即 $\min_{1 \leq i \leq |F_n|} d_i > 0$. 因为 $\delta_n = (1 - \varepsilon)g(y_n) \in [0, 1 - \varepsilon]$, 两条曲线在纵坐标方向的最大相对移动距离为 $2(1 - \varepsilon)$, 因此只要 $2(1 - \varepsilon) < \varepsilon \cdot \min_{1 \leq i \leq |F_n|} d_i$, 假设就可以成立. 综上所述, 假设成立的一个充分条件是耦合系数满足 $\varepsilon_{th} < \varepsilon < 1$, 其中 $\varepsilon_{th} = 2/(2 + \min_{1 \leq i \leq |F_n|} d_i)$.

在假设成立的前提下,可以得到如下结论:

结论 1 耦合系统可以增加曲线交点数目, 即 $|\Gamma_n| \geq |F_n|$. 当 $\delta_0 \neq \delta_1 \neq \dots \neq \delta_n$ 时, 耦合系统 $n + 1$ 条曲线的交点数目为 $|\Gamma_n| = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} |A_k^i|$.

证明 设 $B_k^i = \{x \in I \mid \varphi^i(x) = \varphi^{i+k}(x)\}$, 是 $\varphi^i(x)$ 和 $\varphi^{i+k}(x)$ 所有交点的集合, 则 Γ_n 可以改写成如下形式: $\Gamma_n = \cup_{k=1}^n \cup_{i=0}^{n-k} B_k^i$. 因为 $\varphi(x)$ 是时变的, 所以 $B_k^0 \not\subset \varphi^{-1}(B_k^0)$. 易知, 只要 $\delta_0 \neq \delta_1 \neq \dots \neq \delta_n$, 则有 $B_k^i \cap B_k^j = \emptyset, 0 \leq i, j \leq n - k, 1 \leq k \leq n$, 因此 $|\Gamma_n| = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} |B_k^i| = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} |A_k^i|$. 由于假设成立, 所以 $|B_k^{n-k}| \geq |A_k^{n-k}|$. 因此, $|\Gamma_n| \geq \sum_{k=1}^n |A_k^{n-k}| \geq |F_n|$. Γ_n 比 F_n 至少增加了 $\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k-1} |A_k^i|$ 个元素.

由 3.2 节可知, \tilde{P}_n 中的元素和 P_{n+1}^* 中的元素是多对一的关系, 即如果 \tilde{P}_n 中多个子区间对应相同的

序图样, 则这些子区间属于 P_{n+1}^* 的一个元素. 下面的分析说明, 耦合作用不但可以增加曲线交点数, 同时可以增加序图样种类数.

4.2. 序图样种类增加的条件

由于 $\varphi(x)$ 是时变的, 故当 $\delta_i, i = 0, \dots, n$ 变化时, \tilde{P}_n^r 上的序图样发生变化. 如果 $\delta_i, i = 0, \dots, n$ 和 x_0 是统计独立的, 且 $\delta_i, i = 0, \dots, n$ 可实现任何长度为 $n + 1$ 的序图样, 则 $y_i, i = 0, \dots, n$ 可实现任何长度为 $n + 1$ 的序图样. 但在本文的耦合系统中 $\delta_i = (1 - \varepsilon)g(y_i), i = 0, \dots, n$, 又因为(2)式建立起 $y_i, i = 0, \dots, n$ 和 x_0 的关系, 因此在考察 $\{y_n\}$ 中的序图样的时候, 不能忽略 $\delta_i, i = 0, \dots, n$ 和 x_0 的相关性.

下面只研究 F_n 中两条以上曲线的公共交点在 Γ_n 中分裂成多个交点引起序图样变化的情况, 由于假设成立, F_n 中其他元素与 Γ_n 中元素是一对一关系, 且交点两侧的序图样不发生变化. 设 $\hat{x} \in F_n, \alpha \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 是在 \hat{x} 相交的曲线 $f^i(x)$ 的上标集合, 即 $f^i(\hat{x}) = f^j(\hat{x}), \forall i, j \in \alpha$, 其他曲线的上标集合为 $\bar{\alpha} = \{1, 2, \dots, n\} - \alpha$. 由于假设成立, $f^i(x), i \in \alpha$ 在 \hat{x} 的一个邻域内都是单调的, 且任意两条曲线都有且仅有一个交点, 因此在这个区间内共有 $|\alpha|$ 个交点. 若希望 $f^i(x), i \in \alpha$ 满足长度为 $|\alpha|$ 的序图样 $\pi_\alpha = [\pi_1, \dots, \pi_{|\alpha|}]$, 需要确定 $|\alpha| - 1$ 个交点的位置关系, 则 $\delta_i, i \in \alpha$ 需满足 $|\alpha| - 2$ 个三元不等式.

根据文献[10]中的说明, 如果长度为 $|\alpha|$ 的序图样 π_α 不能出现, 则所有长度为 $n \geq |\alpha|$ 的序图样 $\pi_n = [*, \pi_1 + L, *, \dots, *, \pi_{|\alpha|} + L, *]$ 都不可能出现在. 但在耦合系统中这个结论不成立. 假设 π_α 不能在 $x_i, i \in \alpha$ 中出现, 也不能在 $\delta_i, i \in \alpha$ 中出现, 但在 \hat{x} 的一个邻域内, $f^i(x), i \in \bar{\alpha}$ 满足 π_n 要求的序关系, 且 $\delta_i, i \in \alpha$ 满足 π_α 所需要的 $|\alpha| - 2$ 个不等式, 则 π_n 可以出现在 $y_i, i = 1, \dots, n$ 中. 结论 2 给出在 \tilde{P}_n^r 上增加序图样的条件.

结论 2 如果 $\hat{x} \in F_n$ 在 Γ_n 中分裂为 $|\alpha|$ 个交点, 则在 \hat{x} 的一个邻域内出现一个新增序图样种类的条件是: $\delta_i, i \in \alpha$ 需满足 $|\alpha| - 2$ 个三元不等式.

由前文的分析可知, 在假设成立的前提下, 如果满足结论 1 的条件, 耦合系统的曲线交点数量增多, 如果满足结论 2 的条件, 序图样种类增多. 下面讨论新增序图样出现概率、耦合次数、映射形式、参

数对序图样数量的影响.

4.3. 延伸问题

4.3.1. 新增序图样的出现概率

设新增序图样所在区间为 (\hat{x}_1, \hat{x}_2) . 对于稳定分布是均匀分布的映射 (比如 Tent 映射), 由于假设成立, 因此 $|\hat{x}_2 - \hat{x}_1|$ 是 ε 的减函数, ε 越小, 新增序图样的出现概率越高. 由于 ε 不但影响子区间长度, 也通过影响 $\delta_i, i \in \alpha$ 而改变子区间端点位置, 因此对于稳定分布是非均匀分布的映射, 每个新增序图样出现概率与 ε 的关系比较复杂.

4.3.2. 耦合次数的影响

如果在 $\hat{x} \in F_n$ 处, 不存在 $\delta_i, i \in \alpha$ 使序图样 π_α 要求的 $|\alpha| - 2$ 个不等式同时成立, 则不论如何改变 ε , 都不能使该序图样在 \hat{x} 的邻域出现. 在这种情况下, 可以通过增加不等式组自变量数量的方法, 降低不等式组成立的难度, 达到增加序图样的目的.

定义多次耦合系统

$$\begin{aligned} y_{n+1}^m &= (1 - \varepsilon)g(y_n^m) + \varepsilon g(y_n^{m-1}) \\ &= \delta_n^m + \varepsilon g(y_n^{m-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

定义映射关系

$$\varphi_i(y_n^{m-1}) = \delta_n^m + \varepsilon g(y_n^{m-1}), \quad m \geq 2, \quad (5a)$$

$$\varphi_1^k(x_n) = \delta_n^1 + \varepsilon f^k(x_n). \quad (5b)$$

(4) 式的多次耦合系统可写为 $y_{n+m+k}^m = \varphi_m \circ \varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^k(x_n)$.

同前面的分析过程相同, 在某个 $\hat{x} \in F_n$ 处, 在 $y_i^m, i \in \alpha$ 中出现序图样 π_α 需要 $|\alpha| - 2$ 个不等式. 但前面的不等式组包含 $|\alpha|$ 个自变量 $\delta_i, i \in \alpha$, 此处的不等式组包含 $m \cdot |\alpha|$ 个自变量 $\delta_i^1, \dots, \delta_i^m, i \in \alpha$. 由于自变量更多, 自变量之间相关性的作用降低, 因此更容易满足条件, 新出现的序图样更多.

4.3.3. 映射 g 形式和参数的影响

由于 $\delta_n = (1 - \varepsilon)g(y_n)$, 映射 g 直接影响 $\delta_i, i = 0, \dots, n$, 从而影响 $\{y_n\}$ 中的序图样. 如果 $g = f$, 由混沌同步原理可知, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 在经过过渡期后实现完全同步, $y_{n+1} = (1 - \varepsilon)g(y_n) + \varepsilon f(x_n) = f(x_n)$, 耦合失去增加序图样的作用. 因此, 应选择与 f 函数形式不同或参数不同的映射 g , 才能够达到增加序图样的目的. 在实验中发现, 当 g 与 f 函数形式相同时, 参数相差越大, 同等条件下新增序图样的数量越多. 关于 g 的作用原理和规律有待于进一步的研究来揭示.

5. 仿真实验

下面用一个具体的实例验证前面的结论, 并引发一些更深入的思考. 考察如下映射:

$$T_r(x) = \begin{cases} \frac{x}{r}, & x < r \\ \frac{1-x}{1-r}, & x \geq r \end{cases}, \quad x \in [0, 1]. \quad (6)$$

取(2)式中的 $f(x)$ 为 $T_{0.5}(x)$, 计算 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中长度为 3 的序图样的改变情况.

首先计算假设成立的条件, 得到 $\varepsilon_{th} = 2/(2 + \min_{1 \leq i \leq |F_n|} d_i) = 10/11$, 因此 $10/11 < \varepsilon < 1$ 是假设成立的充分条件. 在假设成立的前提下, 当 $\delta_0 \neq \delta_1 \neq \delta_2$ 时, $|F_2| = 1 + 2 + 3 = 6$, 计算结果验证了结论 1 的论断.

在 $\hat{x} = \frac{2}{3}$ 处 $\alpha = \{1, 2, 3\}$, 即 f^0, f^1, f^2 三条曲线交于一点. F_2 中的元素 \hat{x} 在 F_2 中分裂为 3 个交点, 即 $\hat{x}_{01} = 2/3 + (\delta_1 - \delta_0)/3\varepsilon, \hat{x}_{12} = 2/3 + (\delta_1 - \delta_2)/6\varepsilon, \hat{x}_{02} = 1/3 + (\delta_0 - \delta_2)/3\varepsilon$. 当 f^0, f^1 的交点横坐标 x_{01} 小于 f^1, f^2 的交点横坐标 x_{12} 时, $\{y_n\}$ 在 (x_{01}, x_{12}) 区间出现序图样 $[2, 1, 0]$, 这是 $\{x_n\}$ 中缺失的序图样. 根据以上数据, 得到长度为 3 的序图样增加的条件为 1 个三元不等式 $\delta_n + \delta_{n+1} < 2\delta_{n-1}$, 计算结果验证了结论 2 的论断.

(x_{01}, x_{12}) 区间的长度为 $2\delta_{n-1} - \delta_n - \delta_{n+1} \leq 2(1 - \varepsilon)$, 又因为映射 f 的稳定分布是均匀分布, 因此 ε 越小, 新增的序图样 $[2, 1, 0]$ 出现概率的上限越大. 在(2)式中取 $f = T_{0.5}, g = 4x(1 - x)$, 表 1 记录了不同耦合系数 ε 下, $\{x_n\}$ 中缺失的序图样在 $\{y_n\}$ 中出现的数量, 实验数据量为 10^4 . 由表 1 可以看出, 在假设成立的前提下 ($\varepsilon = 0.91, 0.99$), 新增序图样出现的概率随着 ε 的减小而增大. 但如果不增加耦合次数或者改变映射 g , 不论 ε 如何变化, 一部分序图样总也不会出现, 比如 $[2, 1, 3, 4]$ 等.

在(4)式中取 $\varepsilon = 0.99, f = T_{0.5}, g = 4x(1 - x)$, 图 2 记录了随着耦合次数增多 ($m = 1, \dots, 10$), 在 $\{y_n^m\}$ 中出现的序图样种类数与理论值的比值, 实验数据量为 10^7 . 图中 5 条曲线分别是序图样长度为 3—7 的实验结果. 由图 1 可以看出, 随着耦合次数 m 增多, 耦合系统中出现的序图样种类数增多.

在(4)式中取 $\varepsilon = 0.99, f = T_{0.5}, m = 10$, 图 2 记录了 $g = T_r(x), r = 0.4, 0.45, 0.49, 0.5$ 时, 在

表 1 不同耦合系数 ε 下,通过耦合作用新增的
长度为 4 的序图样数目

$\{x_n\}$ 缺失 的序图样	$\{y_n\}$ 中新增序图样种类的数目		
	$\varepsilon=0.8$	$\varepsilon=0.91$	$\varepsilon=0.99$
2134	0	0	0
3214	43	5	1
1342	36	4	1
3241	1	2	0
2143	0	0	0
3421	0	0	0
2413	14	3	1
1432	44	7	1
4231	27	4	1
4132	0	0	0
4312	0	0	0
4321	0	0	0

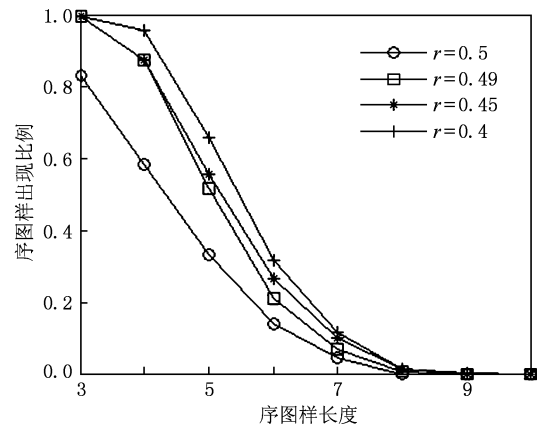


图 2 g 和 f 函数形式相同时,耦合系统中序图样种类出现比例
与 g 中参数的关系

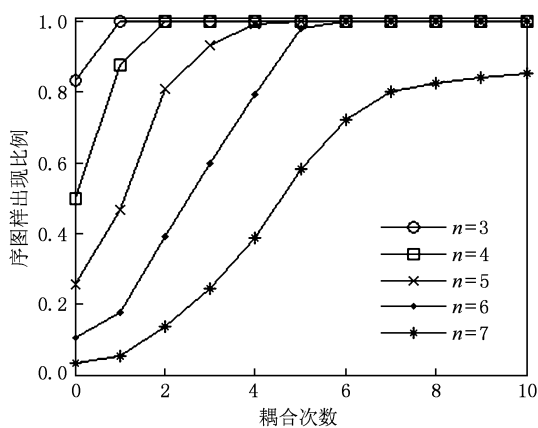


图 1 耦合系统中序图样种类出现比例与耦合次数 m 的关系

$\{y_n^{10}\}$ 中出现的序图样种类数与理论值的比
值,实验数据量为 10^7 . 其中 $r = 0.5$ 时, g 和 f 函数
形式、参数完全相同,因此相当于未耦合系统 $\{x_n\}$.
由图 2 可以看出,当 g 和 f 函数形式相同时,参数相
差越大,耦合系统中出现的序图样种类数越多.

表 1,图 1,图 2 的实验结果验证了前文的结论.
实验结果表明,即使本文假设不成立,耦合系统也

可以实现增加序图样种类数的目的. 当 $\varepsilon = 0.8$ 时,
表 1 所考察的系统不满足假设成立的条件,但从表
中数据可以看出, $\{x_n\}$ 中缺失的序图样也在 $\{y_n\}$
中出现了. 但序图样[3,2,4,1]在 $\varepsilon = 0.8$ 时的数量
比 $\varepsilon = 0.91$ 时少,这是因为不满足假设时,曲线的
交点经过耦合有可能减少. 对于这种情况下序图样
数量的变化,需要进一步的研究工作来揭示规律.

6. 结 论

本文研究建立在分段单调映射和线性耦合模
型之上的时空混沌的序图样. 首先,通过研究影响
序图样数量的因素,发现主要因素是多条映射曲线
共用一个交点使曲线交点减少,其背后的原因是由
于混沌映射的时不变性质. 其次,耦合系统中的线
性耦合破坏了映射的时不变性质,当一定假设条件
成立时,得到了曲线交点增加的条件. 另外,分析了
影响新增序图样种类数和出现概率的条件,得到耦
合系统的映射、耦合系数和耦合次数对序图样数
量的影响关系,并以实例和仿真实验验证了上述理
论结果. 本文研究表明,时空混沌可改善混沌系统
的序图样缺失现象,因此时空混沌序列在置换熵的
意义上比混沌序列更接近真实的随机序列.

[1] Xiang F, Qiu S S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6138 (in Chinese)
[向 菲、丘水生 2008 物理学报 **57** 6138]
[2] Yu Z B, Feng J C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1409 (in Chinese)
[余振标、冯久超 2008 物理学报 **57** 1409]

[3] Chen F X, Zhang W D 2007 *Chin. Phys.* **16** 937
[4] Long M, Qiu S S 2007 *Chin. Phys.* **16** 2254
[5] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Jiang Y M 2007 *Chin. Phys.* **16**
660

- [6] Li F, Shu W X, Luo H L, Ren Z Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 650 50001
- [7] Bandt C, Pompe B 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 174102 [15] Zanin M 2008 *Chaos* **18** 013119
- [8] Bandt C, Keller G, Pompe B 2002 *Nonlinearity* **15** 1595 [16] Hou W, Feng G L, Dong W J, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2663 (in Chinese) [侯 威、封国林、董文杰、李建平 2006 物理学报 **55** 2663]
- [9] Amigó J, Kennel M, Kocarev L 2005 *Physica D* **210** 77 [17] Kuang J Y, Deng K, Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
- [10] Amigó J, Kocarev L, Szczepanski J 2006 *Phys. Lett. A* **355** 27 [18] Liu S B, Sun J, Xu Z Q, Liu J S 2009 *Chin. Phys. B* **58** 6828
- [11] Amigó J, Kennel B 2008 *Physica D* **237** 2893
- [12] Bandt C 2005 *Ecological Modeling* **182** 229
- [13] Keller K, Sinn M 2005 *Physica A* **356** 114
- [14] Amigó J, Zambrano S, Sanjuán M 2007 *Europhysics Lett.* **79**

Order patterns of spatiotemporal chaos

Guo Jing Wang Yue[†] Shan Xiu-Ming Ren Yong

(Department of Electric Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 16 July 2009; revised manuscript received 9 March 2010)

Abstract

Based on piecewise monotone interval maps and linear coupling, we study order patterns of spatiotemporal chaos. The forbidden patterns are found to arise mainly from the reduction of curve intersections due to time invariance of chaotic maps. It is proved that linear couplings may destroy the time invariance, and create the conditions for increasing intersections. We analyze the effects of chaotic map, coupling strength and coupling number order patterns. Simulation results and illustrative examples all confirm the correctness of the theoretical results.

Keywords: spatiotemporal chaos, order pattern, piecewise monotone interval maps, linear coupling

PACC: 0545

[†] Corresponding author. E-mail: wangyue@tsinghua.edu.cn