

Jerk 系统耦合的分岔和混沌行为*

陈章耀[†] 毕勤胜

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2010 年 7 月 20 日收到; 2010 年 8 月 18 日收到修改稿)

通过分析耦合的 Jerk 系统的平衡点及其稳定性, 给出了参数空间中不同的分岔集, 进而将参数空间划分为对应于各种动力学行为的不同区域. 探讨了耦合系统随不同参数变化的动力学演化过程, 重点分析了系统耦合强度变化对其动力学行为的影响. 揭示了多种运动模式共存及倍周期分岔等各种非线性现象的产生机理.

关键词: Jerk 系统, 耦合, 分岔, 共存

PACC: 0545

1. 引 言

在过去近 50 年里, 混沌已经在数学、物理、通信等科学和工程领域得到了深入的研究^[1]. 国内外在这一领域的研究已经取得了许多相关的成果, 并提出了能产生混沌与超混沌吸引子的多种方法^[2,3]. Sprott 基于计算机穷举法, 提出了一类三阶自治混沌系统, 即三阶 Jerk 系统^[4], 引起了国内外研究者的关注^[5]. Jerk 系统的特点是方程形式简洁, 便于电路实现. 许多研究者根据系统的状态方程, 设计了实现 Jerk 系统的电路, 并对所设计的电路进行实验研究, 给出相应的实验结果. 还通过时间尺度变换获取所需的频谱范围, 在保密通信中获得应用. 与三阶 Jerk 系统相比, 高阶 Jerk 系统有更复杂的动力学行为^[6], 因此在混沌保密通信和混沌图像加密等应用领域有着更广泛的应用前景.

自然界大多数非线性系统是相互耦合的. 相互耦合的非线性系统具有丰富的动力学行为. 对于耦合振子, 由于存在内共振, 许多动力学现象能够看到, 如能量交换(渗透)^[7]等. 由于对混沌同步的研究^[8], 使人们了解了耦合振子的动力学特性. 尤其是两个保持混沌的振子相互弱作用产生相位同步的问题^[9]. 基于李亚普诺夫稳定性理论, Agzia 和 Matouk 导出了蔡氏电路和修正的蔡氏电路两系统混沌同步的充分条件^[10]. 在近期的论文中^[11,12], 分

析了 van der Pol 耦合振子, 发现两个倍周期分岔可以结合在一起, 获得调谐混沌. 进一步的相平面分析可得到不同方程的分岔细节^[13,14]. 虽然在相互耦合的非线性系统方面取得了大量成果, 但非线性系统相互作用的强弱即耦合参数对系统的影响还没有被深刻的揭示.

本文在文献[4]的三阶 Jerk 混沌系统的基础上, 探讨两个 Jerk 系统耦合的分岔和混沌行为. 三阶 Jerk 系统有很多类型, 在文中, 我们选取了两个比较典型的 Jerk 系统, 并在文献[4] \ddot{x} 项前改定值为可变参数 a, b . 通过耦合, 不仅增加了维数, 形成了高阶的 Jerk 耦合系统, 同时使其随参数变化的动力学行为更加复杂. 两系统的方程为

$$\ddot{x} = a\ddot{x} - \dot{x} + (|x| - 1), \quad (1)$$

$$\ddot{y} = b\ddot{y} - \dot{y} + y - y^3, \quad (2)$$

注意到方程(2)用 $-y$ 代替 y , 方程不变, 故方程(2)是与 x 轴对称的. 这里(1)式称为 Jerk 系统 1, (2)式称为 Jerk 系统 2,

设耦合系数为 ε , 这里称为耦合强度. 两 Jerk 系统的耦合方程为

$$\ddot{x} = a\ddot{x} - \dot{x} + (|x| - 1) + \varepsilon(x - y), \quad (3)$$

$$\ddot{y} = b\ddot{y} - \dot{y} + y - y^3 + \varepsilon(y - x), \quad (4)$$

这个方程也可以从两个线性化相互作用的电路中导出(见图 1, 2, 3). 这里重点研究参数以及耦合项对系统动力学行为的影响, 并分析在耦合向量场中分岔的细节和混沌的演变过程.

* 国家自然科学基金(批准号:10872080, 10972091)和江苏大学高级人才基金(批准号:10JDG062)资助的课题.

[†] E-mail: zychen@ujs.edu.cn

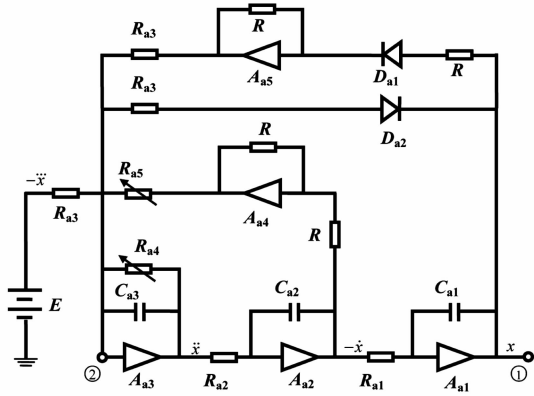


图1 Jerk 系统1 电路

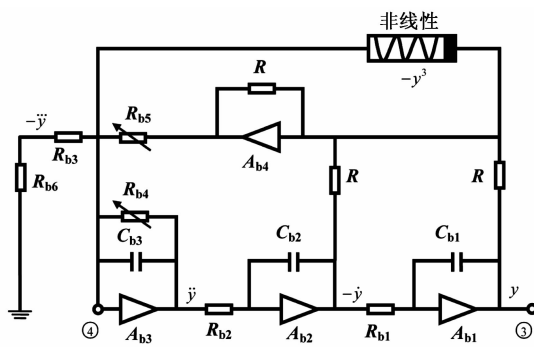


图2 Jerk 系统2 电路

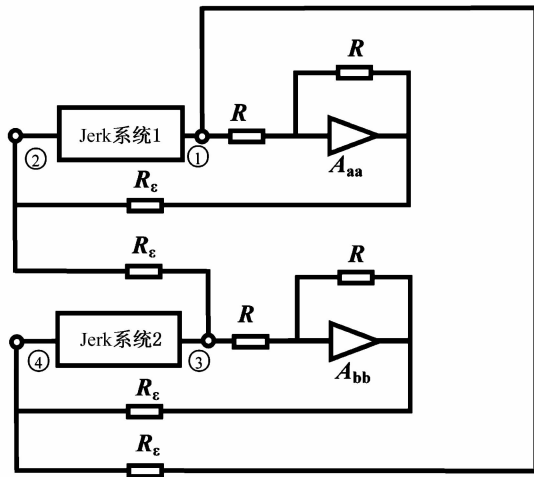


图3 两 Jerk 系统耦合电路

2. 两个 Jerk 系统的分岔与混沌

首先考虑两个系统没有耦合时的情况(即令 $\varepsilon = 0$). 对方程(1), 可写成如下状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 &= ax_3 - x_2 + (|x_1| - 1), \end{aligned} \quad (5)$$

平衡点为 $E_{11} = (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0), E_{12} = (x_1, x_2, x_3) = (+1, 0, 0)$, 由特征多项式可以确定这些平衡点的稳定性. 通过分析, 特征多项式为

$$\begin{aligned} \lambda^3 - a\lambda^2 + \lambda + 1 &= 0, \text{ for } E_{11}, \\ \lambda^3 - a\lambda^2 + \lambda - 1 &= 0, \text{ for } E_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

显然, 从特征多项式可看到: 平衡点 E_{12} 总是不稳定的. 图4画出了系统1随参数 a 变化的分岔图. 可以看到, $a = -1$ 为系统 Hopf 分岔点. 在 $a < -1$ 时系统1是稳定的, $a > -1$ 时, 稳定的平衡点分岔为周期解, 再由倍周期分岔到达混沌, 直至无解.

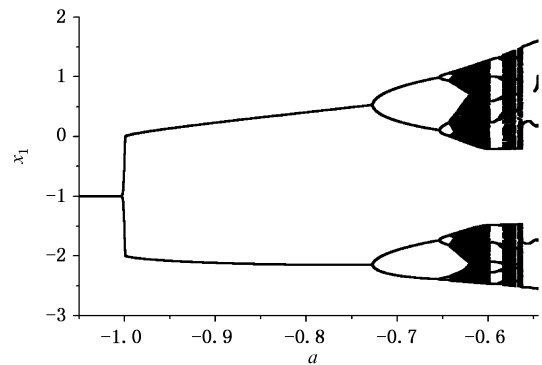


图4 系统1的分岔图

同理对方程(2), 可写成如下状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= x_5, \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 &= bx_6 - x_5 + x_4 - x_4^3, \end{aligned} \quad (7)$$

平衡点为 $E_{21} = (x_4, x_5, x_6) = (-1, 0, 0), E_{22} = (x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0), E_{23} = (x_1, x_2, x_3) = (+1, 0, 0)$. 由特征多项式可以确定这些平衡点的稳定性. 通过分析, 特征多项式为

$$\begin{aligned} \lambda^3 - b\lambda^2 + \lambda - 1 &= 0, \text{ for } E_{22}, \\ \lambda^3 - b\lambda^2 + \lambda + 2 &= 0, \text{ for } E_{21}, E_{23}. \end{aligned} \quad (8)$$

显然, 从特征多项式可看到: 平衡点 E_{22} 总是不稳定的. 图5画出了系统2两个对称的平衡点随参数 b 变化的分岔图. 可以看到, 在 $b < -2$ 时系统2是稳定的, $b > -2$ 时, 稳定的平衡点分岔为周期解, 再由倍周期分岔到达混沌, 直至无解.

3. Jerk 系统耦合的分岔和混沌

现在来研究两个系统耦合的情况, 即在 $\varepsilon \neq 0$ 的条件下, 探讨耦合强度对耦合系统动力学行为的影响. 耦合系统的方程可写为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 &= ax_3 - x_2 + (|x_1| - 1) + \varepsilon(x_1 - x_4), \end{aligned}$$

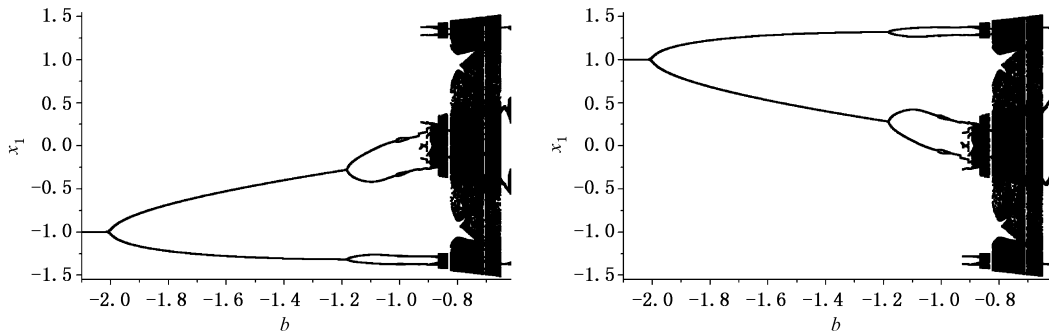


图5 系统2的分岔图

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= x_5, \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 &= bx_6 - x_5 + x_4 - x_4^3 + \varepsilon(x_4 - x_1). \end{aligned} \quad (9)$$

3.1. 平衡点的稳定性和耦合系统的分岔分析

耦合系统(9)向量场的平衡点可由下列两个代数方程确定:

$$\begin{aligned} (|x_1| - 1) + \varepsilon(x_1 - x_4) &= 0, \\ x_4 - x_4^3 + \varepsilon(x_4 - x_1) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

由平衡方程(10)分析可知有两种类型的平衡点:第一种类型是与耦合参数 ε 无关或 $\varepsilon = \pm 1.0$ 的平衡点 $E_{c11} = (-1, 0, 0, -1, 0, 0)$ 和平衡点 $E_{c12} = (+1, 0, 0, +1, 0, 0)$. 第二种是与耦合参数 ε 有关的平衡点 $E_{c21} = (x_{11}, 0, 0, x_{41}, 0, 0)$, $E_{c21} = (x_{12}, 0, 0, x_{42}, 0, 0)$, 此时

$$\begin{aligned} \text{当 } x_1 < 0, \varepsilon \neq 1, \\ x_{41} &= + \frac{\varepsilon - 1 \pm \sqrt{(1 + 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)}}{2(\varepsilon - 1)}, \\ x_{11} &= -(x_{41}^3 - x_{41} + 1); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x_1 > 0, \varepsilon \neq -1, \\ x_{42} &= - \frac{\varepsilon + 1 \pm \sqrt{(1 + 5\varepsilon)(1 + \varepsilon)}}{2(\varepsilon + 1)}, \\ x_{12} &= x_{42}^3 - x_{42} + 1. \end{aligned} \quad (12)$$

平衡点的稳定性由包含 a, b 和 ε 参数的特征多项式确定,这就意味着这些参数影响着平衡点的稳定性.

为了直观研究耦合系统的分岔行为,这里固定参数 $b = -2.5$. 若取 $a = -1.5$, 各平衡点的稳定性如图6所示. 图中实线表示稳定,虚线表示不稳定. 注意到平衡点曲线与参数 a, b 无关,但稳定性与 a, b 有关. 此时

当 $x_1 < 0$ 时 E_{c11} 稳定的平衡区域为 $\varepsilon \in (0.25, 2/3)$;

当 $x_1 > -1$ 时 E_{c21} 稳定的平衡区域为 $\varepsilon \in (-1/3, 0.091)$.

其 E_{c21} 的平衡点坐标公式为

$$\begin{aligned} x_{41} &= + \frac{\varepsilon - 1 - \sqrt{(1 + 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)}}{2(\varepsilon - 1)}, \\ x_{11} &= -(x_{41}^3 - x_{41} + 1), (\varepsilon \neq 1). \end{aligned} \quad (13)$$

在固定参数 $b = -2.5$ 下,由平衡点的稳定性条件和特征多项式可导出如下分岔集曲线公式:

$$\text{H1: } 0.5a + a\varepsilon + 0.5\varepsilon + 0.5 = 0, \quad (14)$$

$$\text{S1: } \varepsilon = \frac{2}{3}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{H2: } 3x_4^2a - 3.5a - a\varepsilon + 2.5\varepsilon \\ + 3x_4^2 - 3x_4^2\varepsilon - 3.5 = 0, \end{aligned}$$

其中

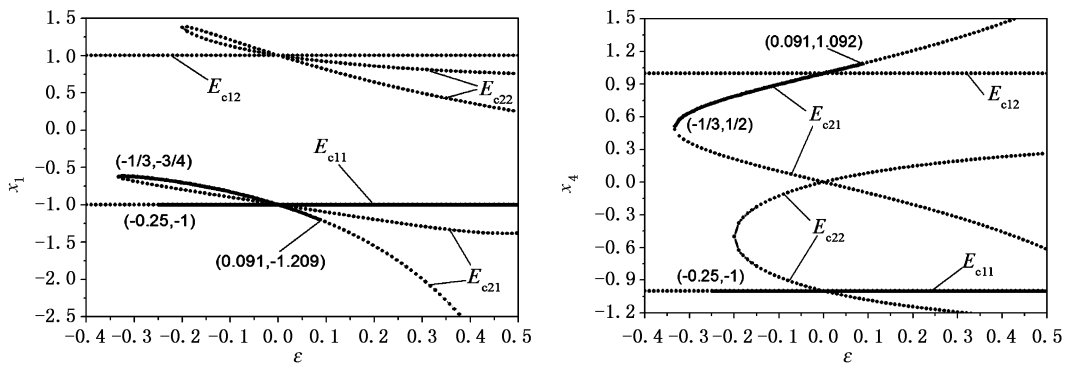
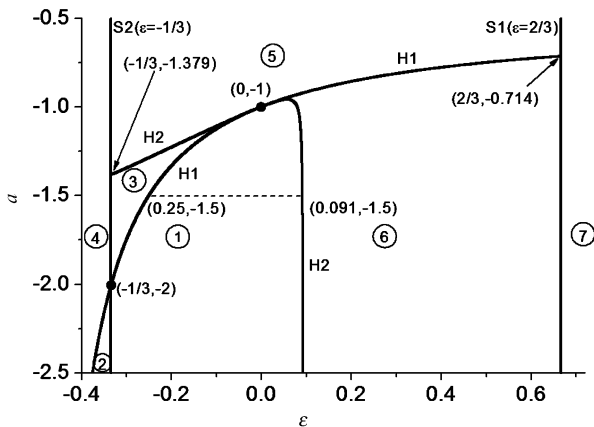
$$\begin{aligned} x_4 &= + \frac{\varepsilon - 1 - \sqrt{(1 + 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)}}{2(\varepsilon - 1)}, \\ &(\varepsilon \neq 1); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{S2: } \varepsilon = -\frac{1}{3}, \quad (17)$$

其中 H1, S1 与平衡点 E_{c11} 相关, H2, S2 与平衡点 E_{c21} 相关.

分岔集曲线如图7所示,这里简称为分岔线. 其中 H1 是与平衡点 E_{c11} 相关的 Hopf 分岔线, H2 是与平衡点 E_{c21} 相关的 Hopf 分岔线, S1 是与 E_{c11} 相关的简单分岔线, S2 是与 E_{c21} 相关的简单分岔线,注意到,当 $\varepsilon < -1/3$ 时, E_{c21} 不存在,只有 E_{c11} 存在. 四条曲线将 ε - a 平面分岔成了7个区域.

在区域①中,两个平衡点 E_{c11}, E_{c21} 是稳定的(图8(a), (b)), E_{c11} 经两种途径失去稳定性. 一种是当参数变化到分岔线 H1, 对应于平衡点 E_{c11} 的 Hopf 分岔出现,结果在③④⑤区域中出现周期运动(图8(d), (f), (g)). 另一种当参数穿越分岔线 S1, 平衡点 E_{c11} 失去稳定性,趋向无界解. 平衡点 E_{c21} 在

图6 平衡点 $a = -1.5; b = -2.5$ 图7 参数平面 (ϵ - a) 上的分岔集, $b = -2.5$

区域①③中是稳定的(图8(b),(e)).当参数穿越分岔线H2时,平衡点 E_{c21} 分岔到一个周期解(图8(h),(j)).这意味着在区域⑤和⑥获得了围绕平衡点 E_{c21} 的极限环,而当参数在区域④时只有平衡点 E_{c11} 极限环(图8(f)).

总之,参数在区域②,只有稳定的平衡点 E_{c11} (图8(c)),而在区域③发现有稳定的平衡点 E_{c21} 和来自于平衡点 E_{c11} 的 Hopf 分岔相关的极限环(图8(d),(e)).在区域⑥,稳定的平衡点 E_{c11} 与来自于平衡点 E_{c21} 的 Hopf 分岔出现的周期运动共存(图8(i),(j)).由于区域⑥较大,稳定的平衡点 E_{c11} 还可能与来自于平衡点 E_{c21} 的倍周期运动或混沌运动共存(图8(i),(k)).而在区域④分岔线H1附近时(图8(f)),有来自于 E_{c11} 的 Hopf 分岔出的周期运动.在区域⑤H1附近时,可以得到与 E_{c11} 相关的周期解(图8(g)).而与 E_{c21} 相关的周期运动在分岔线

H2 附近存在(图8(h)).在区域⑦,所有的轨线趋于无穷,这就意味着没有有界解存在.

可以看到,由于两系统的耦合,不仅出现了两个稳定平衡点的共存,而且还存在稳定平衡点和周期、倍周期甚至混沌运动的共存情况.为揭示耦合系统的动力学行为演化过程.下面讨论几种典型的演变过程.

3.2. 典型参数变化时的动力学行为演变过程

3.2.1. 设耦合强度 $\epsilon = -0.38$, 参数 a 作为分岔参数的动力学行为演变过程

我们首先固定参数 $\epsilon = -0.38$, 取 a 作为分岔参数.随 a 变化的分岔图画在图9.从图9中可以发现,当 $a < -2.16$ 时平衡点 E_{c11} 保持稳定(图10(a)),当 $a = -2.16$ 出现 Hopf 分岔,结果出现周期振荡(图10(b)),振荡的幅值随分岔参数 a 值的增加而增加.直到 $a = -1.24$, 倍周期分岔出现(图10(c)).随着 a 的进一步增加(图10(d)),系统又进入了周期运动,约在 $a = -1.07$ 到达混沌(图10(e)).在混沌运动区域,多次出现了周期窗口(图10(f)—(i)),说明这是一个阵发混沌现象.在图9中可看到, a 在 $[-2.16, -1.24]$ 区间周期运动的幅值不断增大, a 在 $[-1.07, -0.8754]$ 区间混沌吸引子不断膨胀,将占据更大的相空间(图10(g),(i)).

注意到 Hopf 分岔点 $a = -2.16$ 就是图7中H1分岔线和 $\epsilon = -0.38$ 垂直方向的直线的交点,同时发现参数 $\epsilon = -0.38$ 就是②④区域的动力学行为演变过程,此过程无论是周期运动,还是混沌运动,始终围绕着与 ϵ 无关的平衡点 E_{c11} 运动.

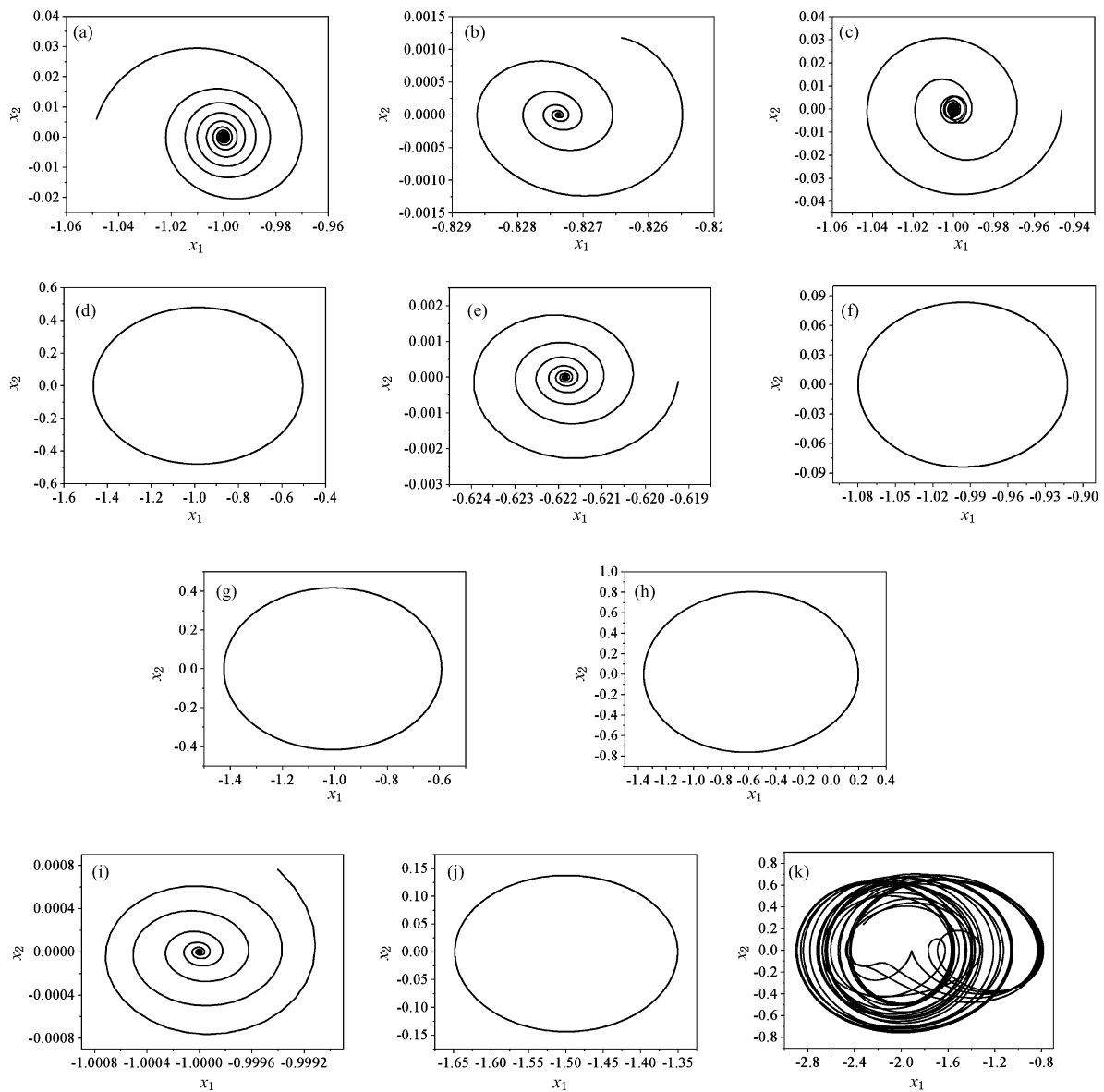


图 8 各区域在 x_1-x_2 平面上的相图. 区域①: (a), (b); 区域②: (c); 区域③: (d), (e); 区域④: (f); 区域⑤: (g), (h) 区域⑥: (i), (j), (k)

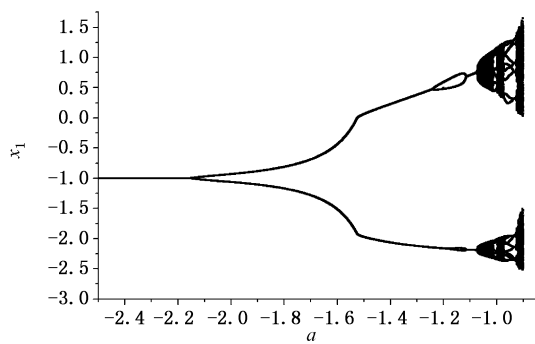


图 9 分岔图 $\varepsilon = -0.35$

3.2.2. 设 $a = -1.25$, 参数 ε 作为分岔参数的动力学行为演变过程

下面我们设 $a = -1.25$, ε 作为分岔参数. 动力学行为的演变过程如图 11 和图 13 所示. 由于在区域③①⑥存在两种类型的平衡点, 为此分别画出了与 E_{c11} 和 E_{c21} 相关的分岔图(图 11、图 13). 从图 11 中可以发现, 当耦合强度参数 $\varepsilon = 2/3$ 时, 系统开始进入 E_{c11} 稳定的平衡态(图 12(f)), 当 $\varepsilon = -0.25$ 时, 系统开始周期运动(图 12(e)). 随着 ε 的减少, 系统在 $\varepsilon = -0.348$ 时进入倍周期运动(图 12(d)). 此后随着 ε 的进一步减少, 系统进入混沌运动(图

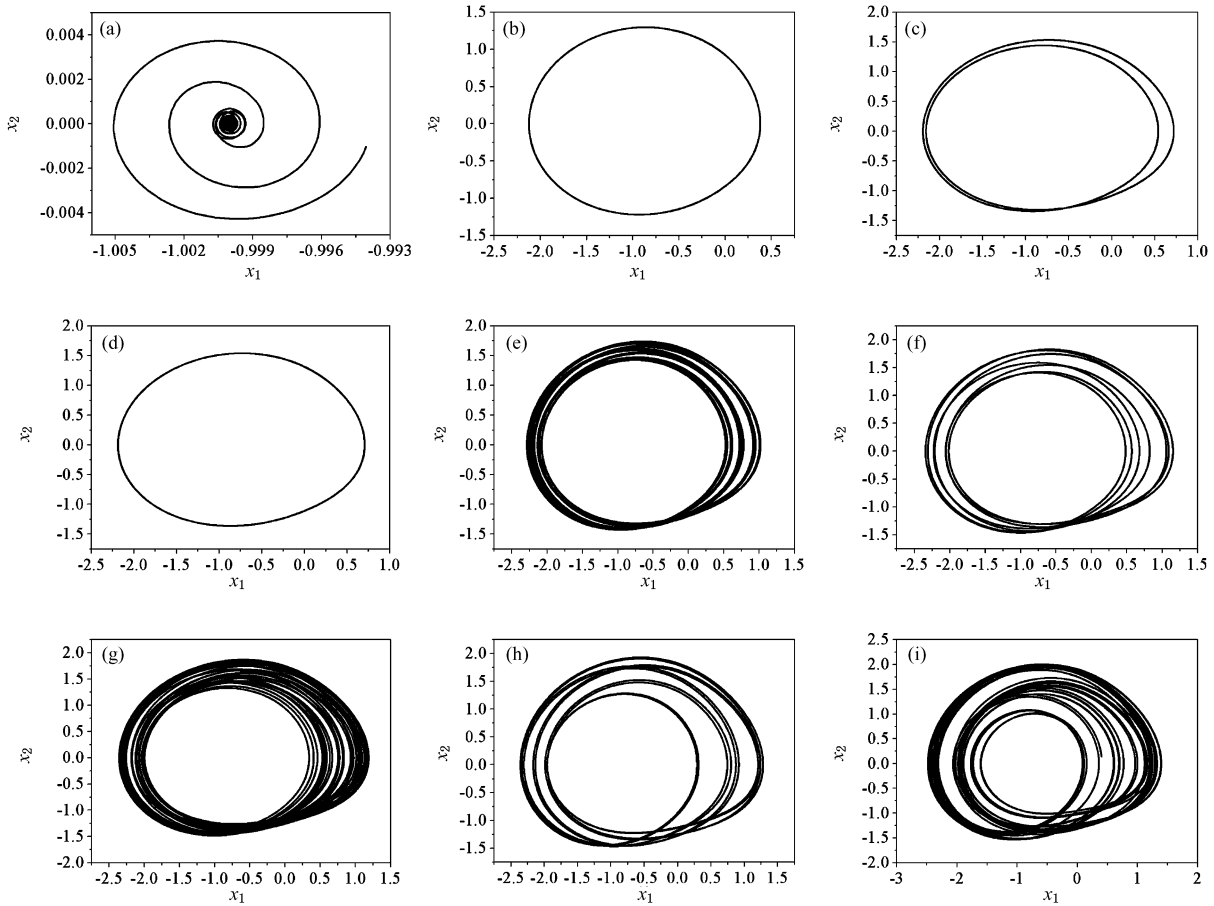


图 10 相图 (a) $a = -2.25$; (b) $a = -1.30$; (c) $a = -1.14$; (d) $a = -1.10$; (e) $a = -1.04$; (f) $a = -1.00$; (g) $a = -0.98$; (h) $a = -0.94$; (i) $a = -0.91$

12(c), (b), (a). 直到 $\varepsilon = -0.546$ 无解.

然而,与平衡点 E_{c21} 有关的动力学特性有所不同(图 13). 平衡点 E_{c21} 在 $\varepsilon \in [-1/3, -0.2186]$ 时系统处于周期运动(图 14(a)), $\varepsilon \in [-0.2186, 0.0896]$ 平衡点 E_{c21} 是稳定的(图 14(b)). 当 $\varepsilon > 0.0896$ 时分岔到一个周期解(图 14(c)). 这也能通过图 7 中分岔线 S2, H2 来证实. 其中 $a = -1.25$ 的水平直线与 H2 的两个交点就是 $\varepsilon = -0.2186, \varepsilon = 0.0896$. 此后系统通过倍周期分岔获得了混沌吸引子(图 14(d), (e), (f)).

3.2.3. 设 $a = -2.25$, 参数 ε 作为分岔参数的动力学行为演变过程

现在我们固定 $a = -2.25$, 分别画出与平衡点 E_{c11} 和 E_{c21} 相关的分岔图(图 15 和图 17). 从与平衡点 E_{c11} 相关的分岔图(图 15)可以观察到: 当 $\varepsilon = 2/3$ 时系统进入 E_{c11} 的平衡态(图 16(e)). 当 $\varepsilon = -0.357$ 为 Hopf 分岔点. 随着 ε 的减少, 系统出现周期

运动(图 16(d)), 在 $\varepsilon = -0.605$ 处进入倍周期分岔(图 16(c)). 随着 ε 的进一步减少, 系统出现混沌振荡(图 16(b)), 而后再演变为周期解(图 16(a)).

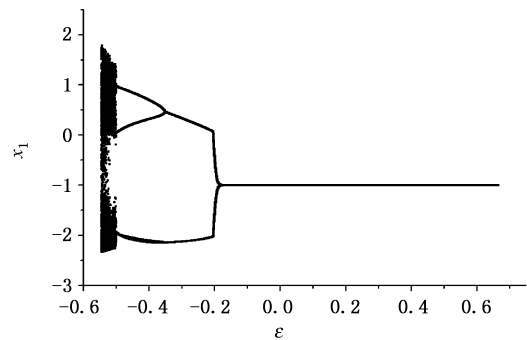


图 11 与 ε 无关的平衡点的分岔图, $a = -1.25$

而从图 17 看到, 平衡点 E_{c21} 在 $\varepsilon \in (-1/3, 0.092]$ 保持稳定(图 18(a)), 当 $\varepsilon > 0.092$ 时极限

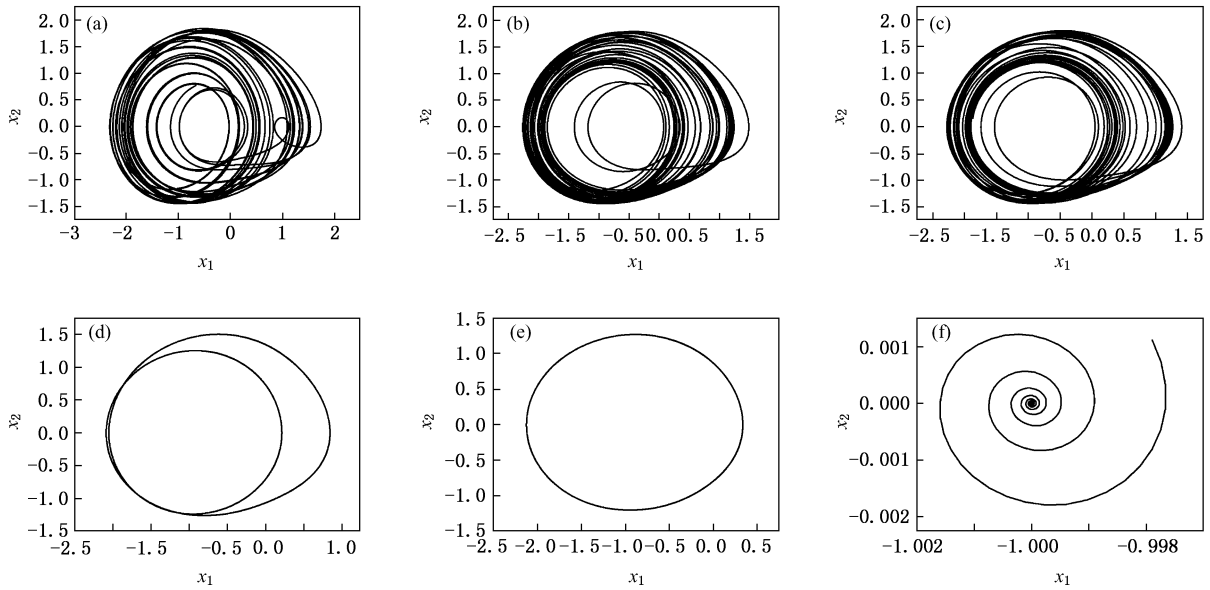


图 12 相图 (a) $\epsilon = -0.54$; (b) $\epsilon = -0.52$; (c) $\epsilon = -0.515$; (d) $\epsilon = -0.45$; (e) $\epsilon = -0.30$; (f) $\epsilon = -0.10$

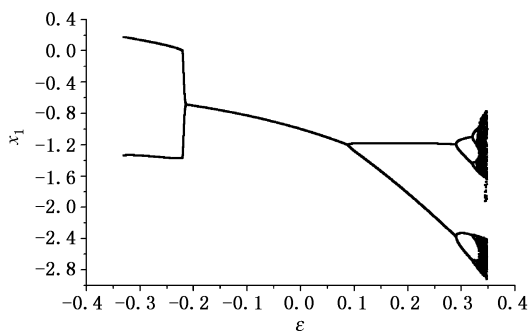


图 13 与 ϵ 有关的平衡点的分岔图, $a = -1.25$

环出现(图 18(b)). 而在 $\epsilon = 0.297$ 时, 出现了倍周期分岔(图 18(c), (d), (e)). 最终演变为混沌运动(图 18(f)). $a = -2.25$ 随分岔参数 ϵ 变化的动力学演变过程同样证实了图 7 分岔集空间划分的正确性.

从以上典型参数的动力学演化过程分析知道, 耦合系统走向混沌的演化过程可能是倍周期或倒倍周期分岔到达混沌, 也可能是单周期或双周期直接演化到混沌, 中间伴随阵发性混沌出现. 它们的演变过程符合分岔集对参数空间的划分.

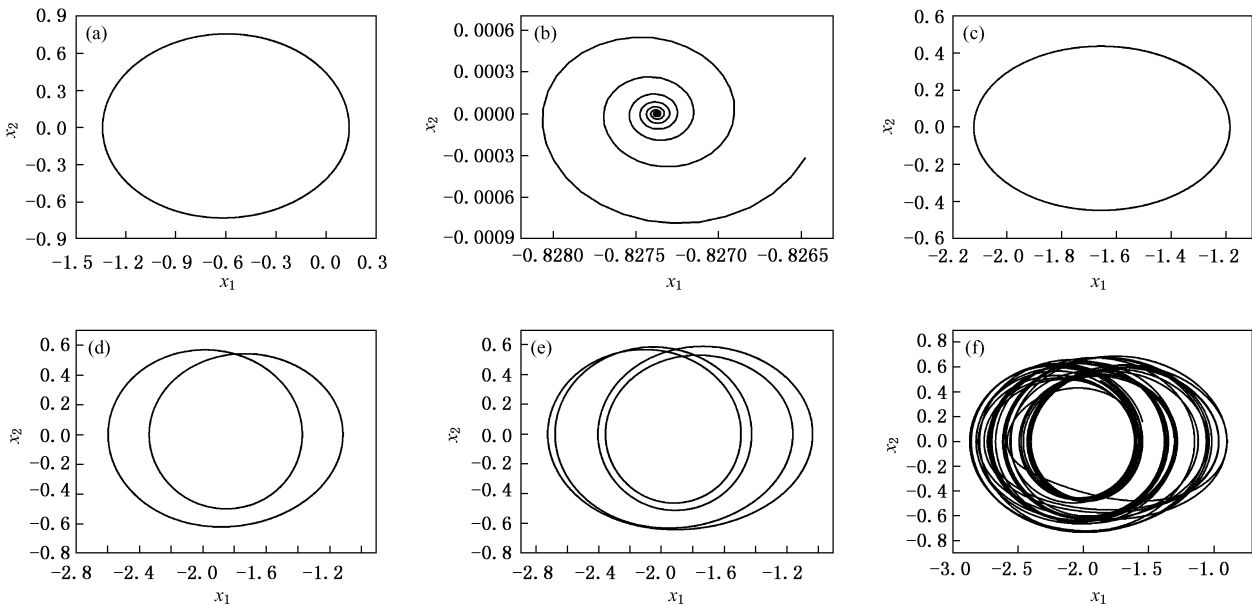
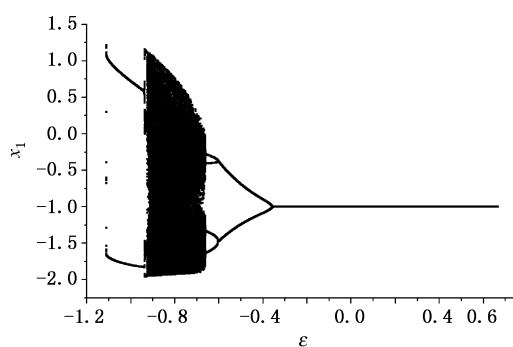
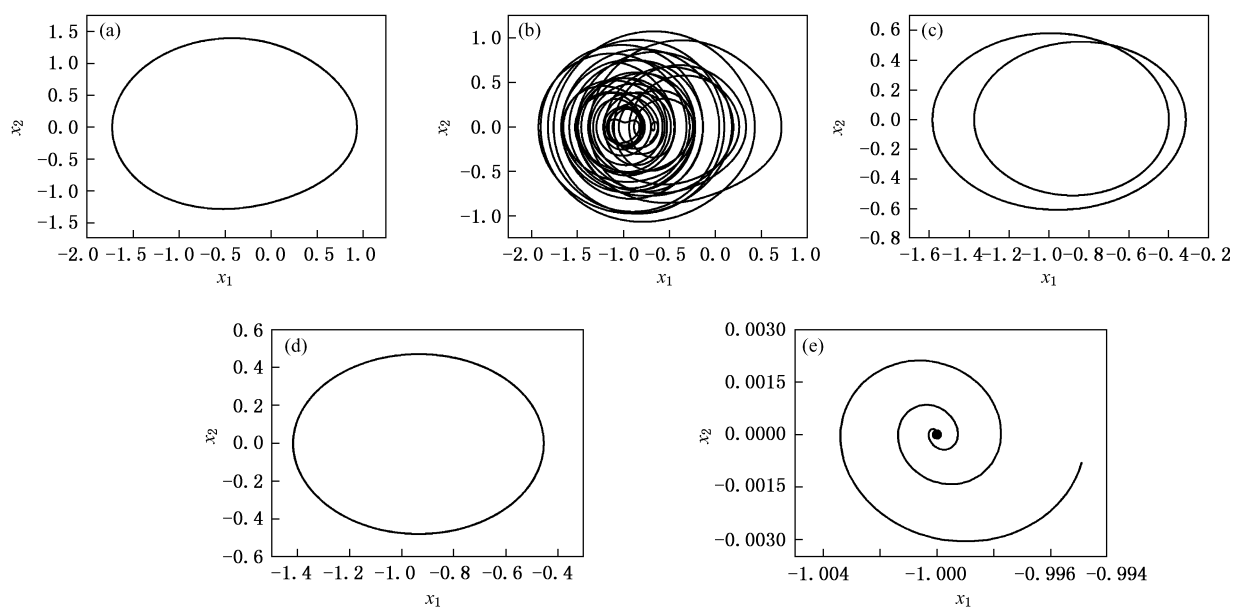
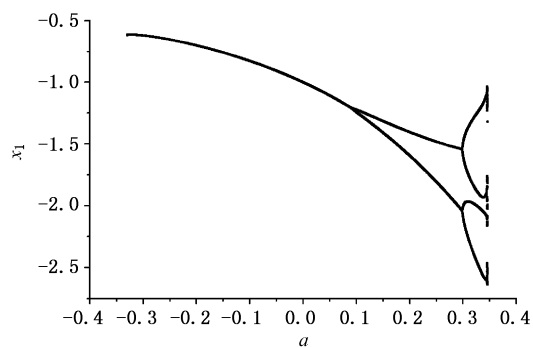


图 14 相图 (a) $\epsilon = -0.30$; (b) $\epsilon = -0.1$; (c) $\epsilon = 0.25$; (d) $\epsilon = 0.31$; (e) $\epsilon = 0.325$; (f) $\epsilon = 0.342$

图 15 与 ε 无关的平衡点的分岔图, $a = -2.25$ 图 16 相图 (a) $\varepsilon = -1.08$; (b) $\varepsilon = -0.8$; (c) $\varepsilon = -0.63$; (d) $\varepsilon = -0.58$; (e) $\varepsilon = -0.10$ 图 17 与 ε 有关的平衡点的分岔图, $a = -2.25$

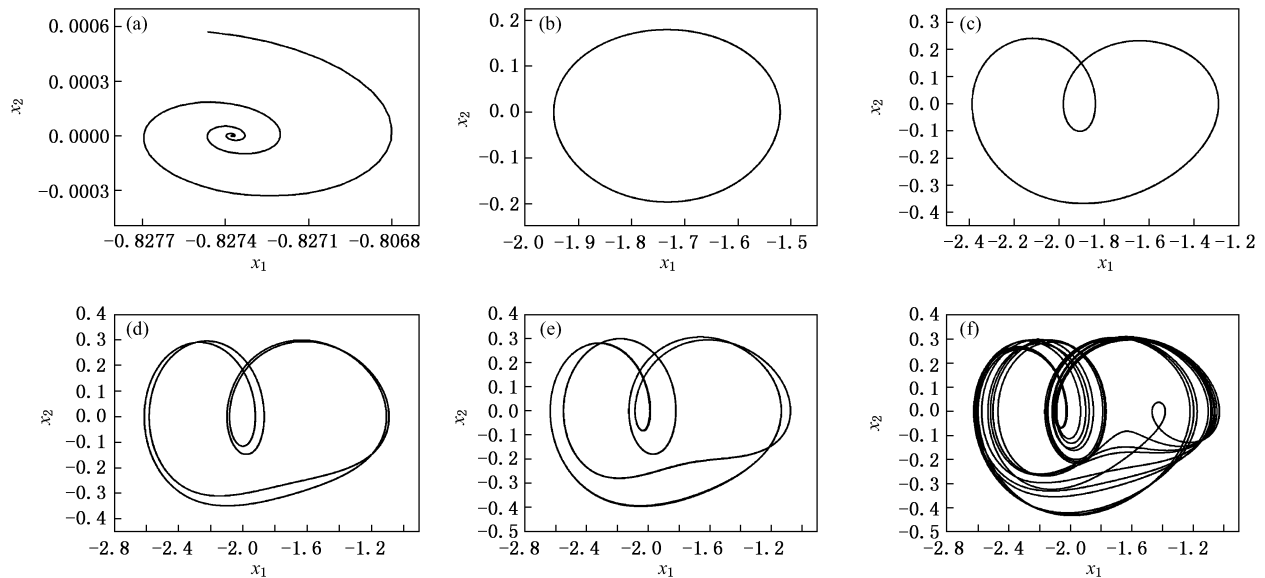


图 18 相图 (a) $\varepsilon = -0.10$; (b) $\varepsilon = -0.28$; (c) $\varepsilon = -0.32$; (d) $\varepsilon = -0.345$; (e) $\varepsilon = -0.346$; (f) $\varepsilon = -0.347$

4. 结 论

耦合系统呈现了多种动力学现象. 与子系统动力学行为不同, 由于耦合项对原系统的相互作用和向量场维数的增加, 出现了稳定的平衡点与周期

解, 倍周期, 混沌解共存的情况; 不完全倍周期分岔导致系统的混沌; 并在此演变过程中, 出现不同周期的窗口. 而且, 随着耦合强度的变化, 系统两个共存稳定平衡点将失去稳定, 经过倍周期分岔, 演变成各自不同的混沌吸引子.

-
- [1] Maccari A 2001 *Int. J. Nonlin. Mech.* **36** 335
- [2] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phy. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
- [3] Liu M H, Yu S M 2006 *Acta Phy. Sin.* **55** 5707 (in Chinese) [刘明华、禹思敏 2006 物理学报 **55** 5707]
- [4] Sprott J C 2000 *Amer. J. Phys.* **68** 758
- [5] Malasoma J M 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **39** 533
- [6] Chlouverakis K E, Sprott J C 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **28** 739
- [7] Maccari A 1998 *Nonlinear Dynamics* **15** 329
- [8] Liu Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 0749 (in Chinese) [刘 勇 2009 物理学报 **58** 749]
- [9] Roman A F, Alexander E H, Alexey A K 2006 *Phys. Lett. A* **358** 301
- [10] Agiza H N, Matouk A E 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **28** 219
- [11] Bi Q 2004 *Int. J. Nonlin. Mech.* **39** 33
- [12] Bi Q 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 337
- [13] Zhang Z D, Bi Q 2005 *Int. J. Nonlin. Sci. Num. Simul.* **6** 81
- [14] Zhang Z D, Bi Q 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1185

Bifurcations and chaos of coupled Jerk systems^{*}

Chen Zhang-Yao[†] Bi Qin-Sheng

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 20 July 2010; revised manuscript received 18 August 2010)

Abstract

Upon the analysis of the equilibrium points as well as the stabilities in coupled Jerk systems, bifurcation sets in parameter space are derived, which divide the parameter space into several regions associated with different forms of dynamics. The dynamical evolution of the coupled system is investigated with the variation of different parameters and specially, the influence of the coupling strength on the dynamics of the system is explored in details. The mechanism of some nonlinear phenomena such as the coexistence of multiple behaviors as well as the sequence of period-doubling bifurcations are presented.

Keywords: Jerk system, couple, bifurcation, coexistence

PACC: 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872080, 10972091) and the Senior Qualified Personal Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 10JDC062).

[†] E-mail: zychen@ujs.edu.cn