

# 基于自适应因子轨道延拓法的不变流形计算\*

贾 蒙<sup>1)2)†</sup> 樊养余<sup>1)</sup> 李慧敏<sup>1)</sup>

1) (西北工业大学电子信息学院, 西安 710072)

2) (新乡学院机电学院, 新乡 453000)

(2009 年 12 月 31 日收到; 2010 年 3 月 8 日收到修改稿)

提出自适应因子和轨道延拓相结合的二维流形计算方法, 利用以平衡点为中心的椭圆对局域流形的近似, 通过轨道的等距延拓和椭圆初始点的自适应调节, 在精度要求下自适应的添加轨道, 完成二维双曲不变流形的计算. 此方法比“轨道弧长法”精度高, 包含更多细节信息; 同时要比“盒子细分法”更能反映流形的延拓趋势.

**关键词:** 自适应因子, 轨道延拓, 流形, 非线性系统

**PACC:** 0547

## 1. 引 言

不变流形的计算对于了解系统的动力学特性具有非常重要的作用, 不变流形一般不能通过解析表达式求解, 而只能通过数值计算的方法得到. 对于连续动力系统双曲平衡点的二维流形计算方法, 连续动力系统(即向量场)以常微分方程的形式给出

$$\dot{X} = f(X). \quad (1)$$

为了便于算法的比较和说明, 本文以洛伦兹模型为例介绍不同的计算不变流形的方法. 洛伦兹模型的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\delta(x - y), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \end{cases} \quad (2)$$

(2) 式中,  $\beta$  是所研究流体的形状参数,  $r$  是相对瑞利数,  $\delta$  乃普兰德数. 当固定  $\beta$  和  $\delta$  而改变  $r$  由小于 1 经过 1 时, 流体由热传导变为热对流, 平衡点由一个(原点, 稳定结型点)变为三个(原点变为鞍型点, 另外两个是对称的稳定结型点). 随着相对瑞利数的增大, 稳定的结型点变为稳定的焦型点, 接着产生同宿分岔<sup>[1]</sup>、异宿分岔、霍普夫分岔<sup>[2]</sup>, 两稳定的焦型平衡点变为不稳定的螺旋型鞍点, 状态轨迹在三个不稳定的平衡点之间运动, 形成洛伦兹混沌

吸引子<sup>[3]</sup>. 取  $\delta = 10, r = 28, \beta = \frac{8}{3}$ , 经计算, 此时

系统有三个平衡点  $S_0 = (0, 0, 0), S_1 = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27), S_2 = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ , 其中  $S_0$  为鞍点,  $S_1, S_2$  为焦点. 本文主要介绍向量场鞍点的不变流形计算方法, 因此通过对  $S_0 = (0, 0, 0)$  线性化雅克比行列式的计算, 得出它的特征值和其对应的特征向量

$$\lambda = \begin{pmatrix} -22.8277 & 0 & 0 \\ 0 & 11.8277 & 0 \\ 0 & 0 & -2.6667 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -0.6148 & -0.4165 & 0 \\ 0.7887 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

由(3)式可以得出  $\lambda_1 = -22.8277$  与  $\lambda_3 = -2.6667$  是稳定的特征值<sup>[4]</sup>. 所以在平衡点  $S_0$  与稳定特征向量  $v_1$  和  $v_3$  确定的平面上, 可以求出洛伦兹模型的局域稳定流形  $W_{loc}^s(S_0)$ <sup>[5]</sup>.

## 2. 典型流形分析方法介绍

对于动力系统(1)而言, 当  $x \in R^n, f: R^n \rightarrow R^n$  足够光滑, 根据不变流形定理, 全局流形就是局部流形在  $\varphi^t$  迭代下所取得的像<sup>[6]</sup>, 对于稳定流形  $t \rightarrow -\infty$ , 不稳定流形  $t \rightarrow +\infty$ . 所以针对前面讲述的

\* 国家自然科学基金(批准号: 60872159)资助的课题.

† E-mail: tianshi\_cd@163.com

洛伦兹在  $S_0$  处的稳定流形就可以定义为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned}
 W^s(S_0) &:= \{x \in R^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = S_0\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(W_{loc}^s(S_0)), \tag{4}
 \end{aligned}$$

具体的实现思路是,从平衡点  $S_0$  的局部流形  $W_{loc}^s(S_0)$  (基域)出发,取  $t < 0$ ,对  $W_{loc}^s(x_0)$  上的离散点进行  $\varphi^t$  迭代,计算出基域的像,然后对得到的像再进行  $\varphi^t$  迭代,逐渐增大流形,使局部流形全局化<sup>[8]</sup>.

### 2.1. 轨道弧长法

该方法由 Johnson 提出,方法的核心思想是使轨道弧长参数化

$$W^s(S_0) = \{A_\eta \mid x \in W^s(S_0), d_a(x, S_0) = \eta\}_{\eta > 0}, \tag{5}$$

其中  $d_a(x, y)$  代表同一轨道上两点  $x$  与  $y$  的弧长距离<sup>[9,10]</sup>.

该方法的实现步骤:

1) 计算线性化向量场  $Df(S_0)$  在鞍点  $S_0$  处的特征向量和特征值,与稳定特征值对应的两个特征向

量为  $V_1$  和  $V_3$ , 它们张成稳定特征值空间  $E^s(S_0)$ ;

2) 在由向量  $V_1, V_3$  和点  $S_0$  确定的平面上画一个以  $S_0$  为圆心,  $\varepsilon$  为半径的圆,这个圆就是局部流形  $W_{loc}^s(S_0)$  的近似<sup>[11]</sup>,在圆上均匀地取  $N$  个点,把这  $N$  个点作为后续计算的初始条件;

3) 从初始条件上的每一个点出发,计算一段轨道(固定时间增量  $\Delta t$  或弧长增量  $\Delta s$ ),各条轨道的末点构成了一个新的环;

4) 为了使环上的点的密度大致保持恒定,需要对环上的点间的距离进行检查,当相邻两点的距离过小时,就要去掉其中一个点,而当两点间的距离过大时,就用插值法在这两个点中间插入一个点,当发生混沌现象时,稳定轨道与不稳定轨道相互缠绕<sup>[12-14]</sup>,这部分流形非常复杂,需要添加的点数也会增多;

5) 将得到的各个轨道的末点和插入的点连接在一起做环,并且由这些点作为新的初始条件,继续重复前面 1) — 4) 的步骤,直到满足轨道长度  $L$  的要求.

它的实现过程如图 1 所示.

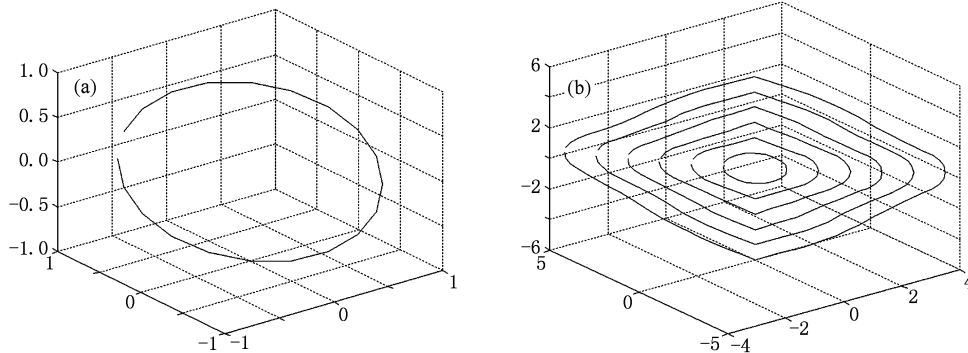


图1 (a)局域流形; (b)迭代 5 次后图形

图 1(a) 是显示了它的局域流形,初始圆有 20 个点,图 1(b) 显示了它迭代 5 次后的流形,最外围圆周有 44 个点. 当迭代次数满足轨道长度  $L$  要求时,就画出所需的流形. 该方法的缺点是: 后来插入的点不一定是从初始圆出发的轨道上的点,虽然有一些插值算法,例如角度限制<sup>[15]</sup>, 逆风条件限制<sup>[9]</sup> 等等,但是精度始终不高.

### 2.2. 盒子细分法

细分法的基本思想是: 先用  $R^n$  中的一组“大”的紧致子集(“大盒子”)包围所要研究的区域,然后

把每个子集再细分成更小的子集(“小盒子”),并不包含流形的子集扔掉,这样就得到了一个新的子集. 对新子集重复以上步骤,一步步逼近目标流形,当结果满足预定的精度时计算结束,这个理论是由 Dellnitz 在 2001 年通过 GAIO Pack 仿真完成的,更加具体的理论可以参考文献[8,9,16].

图 2(a) — (c) 直观的展示了盒子细分法的过程. 该方法能够比较精确的确定流形的边缘轮廓,避开了初始点选择的难点,但是该方法无法表示流形轨道的疏密状态,而且不能够反映流形的增长趋势.

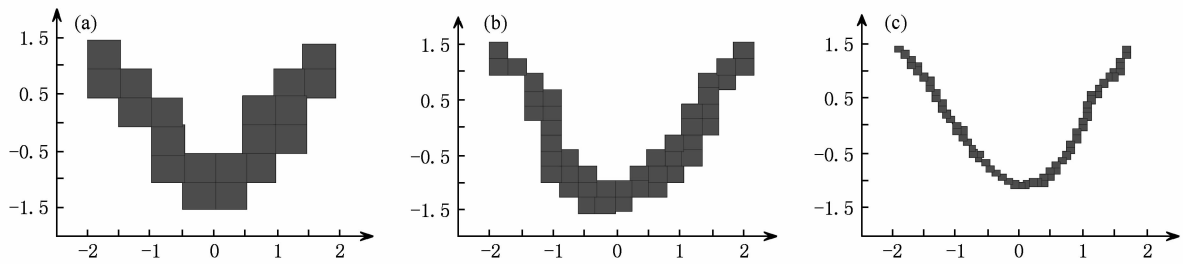


图2 (a)大盒子;(b)细分盒子;(c)最终结果

### 3. 自适应因子轨道延拓法

#### 3.1. 算法基本出发点

自适应因子轨道延拓法计算流形的基本思想是:首先,严格保证计算流形的点是从局域流形出发的轨道上的点,这样可以提高流形计算的精度和反应更多细节信息,所以本文采取轨道延拓法;其次,在保证精度的前提下,尽可能的减少处理的数据,提高流形计算速度,这样就需要一个自适应因子,可以根据精度要求自适应的调节计算数据.

#### 3.2. 算法的实现

自适应因子轨道延拓法在确定局域流形时采用椭圆,而不是圆;因为特征值不同,所以流形在不同方向的增长速度也不一样.局域流形的近似公式如下:

$$x(S_0) = S_0 + \delta \left( \cos(\theta) \frac{V_1}{\lambda_1} + \sin(\theta) \frac{V_3}{\lambda_3} \right). \quad (6)$$

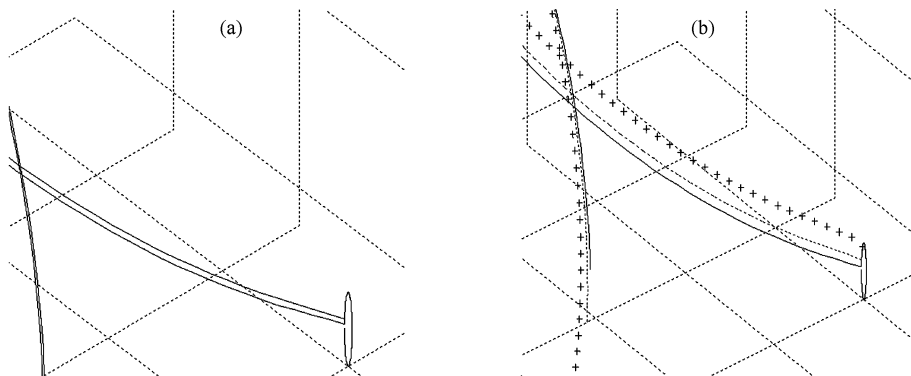


图3 (a)相邻轨道;(b)轨道自适应调整

流形在各个方向的增长速度是不同的,所以相邻轨道的距离是变化的,特别发生混沌现象时,相

邻轨道的距离急剧增加.当两条轨道不满足精度要求时,就要调节  $\Delta\theta$ ,即调节椭圆上初始点的位置,使流形的变化对初始椭圆上点很敏感,必须合理的确定初始点.轨道延拓法是通过轨道来计算流形,自适应因子是控制轨道数目的主要途径.设在椭圆的  $\theta$  处取一条轨道计算流形,下一条轨道取在  $\theta + \Delta\theta$  处,  $\Delta\theta$  就是自适应因子,  $\Delta\theta$  值越小,整个椭圆上取的轨道越多,计算越精确,但计算量也会越大,如图 3(a) 所示两条相邻轨道;所谓的轨道长度  $L$ ,是指轨道迭代的次数,轨道是以初始椭圆处的点为初始点向外延拓,每迭代一次,向外延长一步;流形的计算精度就是两条轨道的距离  $d$ ,是指两条轨道之间的最大距离,即在两条轨道相同步长处距离的最大值,如果  $L = 150$ ,  $d$  的计算公式为

$$d = \max(d(x_i, y_i)), \quad i = 1, \dots, 150. \quad (7)$$

由于不同的轨道在延拓时在相同时间内弧长的增长是不同的,所以在计算每条轨道时,都采用了固定弧长的步长增长方法<sup>[9]</sup>,即弧长  $\Delta s$  增长一定,而积分时间  $\Delta t$  可能不同,这样就避免了不同轨道在相同步长处距离突变.如图 3(b) 的“+”线轨道,两个“+”之间的弧长固定.

邻轨道的距离急剧增加.当两条轨道不满足精度要求时,就要调节  $\Delta\theta$ ,即调节椭圆上初始点的位置,使

相邻轨道距离  $d$  满足精度的要求. 如图 3(b) 所示, 实线轨道与“+”轨道距离比较远, 不满足要求, 就要调节减小  $\Delta\theta$ , 直到得到满足精度要求的虚线轨道. 同理, 当  $d$  过于小时, 会产生冗余的计算量, 这时要增加  $\Delta\theta$ , 调节增大轨道距离  $d$ , 在满足精度的前

$$\Delta\theta = \begin{cases} \Delta\theta \times 1.01, & d \leq 0.01 \times \Delta d, \\ \Delta\theta + \Delta\theta \times d \times 2 \div \Delta d, & 0.01 \times \Delta d < d \leq 0.5 \times \Delta d, \\ \Delta\theta, & 0.5 \times \Delta d < d \leq \Delta d, \\ \Delta\theta - \Delta\theta \times (d \div 10 \div \Delta d), & \Delta d < d \leq 10 \times \Delta d, \\ \Delta\theta \div \lg(d \div \Delta d), & d > 10 \times \Delta d, \end{cases} \quad (8)$$

(8) 式中,  $\Delta\theta$  是自适应角度因子,  $\Delta d$  是流行计算精度,  $d$  是相邻两条轨道的距离, 第一个与第四个式子是微调, 第二个与第五个式子粗调, 第三个式子是满足精度要求, 此时  $\Delta\theta$  不变.

具体的实现步骤:

1) 计算线性化向量场  $Df(S_0)$  在鞍点  $S_0$  处的特征向量和特征值, 与稳定特征值对应的两个特征向量为  $V_1$  和  $V_3$ , 它们张成稳定特征值空间  $E^s(x_0)$ ;

2) 在由向量  $V_1, V_3$  和点  $S_0$  确定的平面上画一个以  $S_0$  为圆心,  $\varepsilon/|\lambda_1|$  和  $\varepsilon/|\lambda_2|$  分别为长短轴的椭圆, 这个椭圆就是局部流形  $W_{loc}^s(S_0)$  的近似 (通过对参数  $\varepsilon$  的调节, 可以改变局域流形的大小,  $\varepsilon$  取得太小会降低计算速度,  $\varepsilon$  取得太大会减小计算精度), 在椭圆上  $\theta = 0$  处和  $\theta = \Delta\theta$  处取两条满足精度要求的相邻轨道作为初始条件如图 3(a) 所示;

3) 根据椭圆上  $\theta = \theta_+$   $\Delta\theta$  初始点计算下一条轨道, 并且通过(8)式调节  $\Delta\theta$ ;

4) 重复上述步骤, 直到  $\theta > = 2\pi$ , 即围绕椭圆一周.

### 3.3. 算法的数值计算

洛伦兹方程可以近似的用差分方程来表示<sup>[19-21]</sup>:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \delta(x_n - y_n) dt, \\ y_{n+1} = y_n + (rx_n - y_n - x_n z_n) dt, \\ z_{n+1} = z_n + (x_n y_n - \beta z_n) dt, \end{cases} \quad (9)$$

其中  $dt$  为时间步长. 当给定初值后, 可以用迭代方法依次求出后面的值. 洛伦兹模型的初值, 可以由初始椭圆的  $n$  个离散值  $w_{ij}$  近似的表示 ( $j$  从 1 到  $n$ ), 其中  $j$  表示第  $j$  个值,  $w_{ij}$  的计算公式为

提下减小计算量.

流形对初始椭圆上的点较敏感, 因为当发生混沌现象时, 伴随着分岔现象的出现<sup>[17,18]</sup>, 流形的轨道分布比较集中 (由表 1 可以看出), 导致  $d$  的变化比较大, 因此在调节  $\Delta\theta$  时, 必须建立微调公式和粗调公式

$$w_{ij} = \delta \left( \cos(\theta + \Delta\theta_j) \frac{V_1}{\lambda_1} + \sin(\theta + \Delta\theta_j) \frac{V_3}{\lambda_3} \right), \quad (10)$$

其中  $\theta = \theta + \Delta\theta_{j-1}$ ,  $\Delta\theta_j$  和  $\Delta\theta_{j-1}$  由(8)式确定.

由(9), (10)式可得第  $j$  个值  $i+1$  次迭代后的结果

$$w_{(i+1)j} \begin{cases} x_{(i+1)j} = x_{ij} - \delta(x_{ij} - y_{ij}) dt, \\ y_{(i+1)j} = y_{ij} + (rx_{ij} - y_{ij} - x_{ij}z_{ij}) dt, \\ z_{(i+1)j} = z_{ij} + (x_{ij}y_{ij} - \beta z_{ij}) dt. \end{cases} \quad (11)$$

这样就可以得到一个  $m \times n \times 3$  的三维矩阵, 其中  $m$  表示迭代次数,  $n$  表示需要迭代的个数, ‘3’ 表示三维坐标. 最后依次通过连线  $w_{ij} \rightarrow w_{mj}$  就可以得到一条从初始椭圆出发轨道; 当所有从初始椭圆出发的轨道计算完后, 全局流形就确定了.

### 3.4. 本文算法和轨道弧长法的误差比较

轨道弧长法同样可以用(9)式进行迭代, 即  $w_{ij} \rightarrow w_{(i+1)j}, w_{i(j+1)} \rightarrow w_{(i+1)(j+1)}$ . 但是当  $w_{(i+1)j}, w_{(i+1)(j+1)}$  之间的距离不满足精度要求时, 需要插入点  $w$

$$g(w) = \beta_1(w - w_{ij}) + \beta_2(w - w_{i(j+1)}), \quad (12)$$

其中  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ . 将  $w$  沿着切线反方向延长, 由于  $w_{ij}, w_{i(j+1)}, w$  共面, 所以延长后与  $w_{ij}, w_{i(j+1)}$  相交于  $w_{ij}^*$ , 即在第  $i$  环上的近似值为  $w_{ij}^*$ ,

$$w_{ij}^* = \frac{\beta_1 w_{ij} + \beta_2 w_{i(j+1)}}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (13)$$

而第  $i$  环上的真实的满足要求的值  $\tilde{w}_{ij}$  为

$$\tilde{w}_{ij} = f^{(i)}(\tilde{w}_{ij}), \quad (14)$$

所以差值误差为

$$\varepsilon_{ij} = |w_{ij}^* - \tilde{w}_{ij}|. \quad (15)$$

由(12),(13),(14),(15)式得到第  $i$  环上得总的误差为

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{\max(j)} \varepsilon_{ij} + f^{(i)}(\varepsilon_1). \quad (16)$$

$\varepsilon_1$  表示初始圆上的误差,  $f^{(i)}(\varepsilon_1)$  表示经过  $i$  次迭代. 而自适应因子轨道延拓法不需要插值, 所以在第  $i$  次迭代后的误差只有

$$\varepsilon'_i = f^{(i)}(\varepsilon_1). \quad (17)$$

因为  $\varepsilon_i \geq \varepsilon'_i$  所以本文算法的误差要小于轨道弧长法.

#### 4. 仿真结果和数据的分析

图 4(a) 是自适应因子轨道延拓法在  $L = 150$ , 轨道精度  $\Delta d = 3$  的情况下对洛伦兹模型在  $S_0$  处的稳定流形的计算; 图 4(b) 是轨道弧长法在  $L = 150$  下, 采用角度限制插值法对洛伦兹模型在  $S_0$  处的稳

定流形的计算; 对比可以看出来: 1) 图 4(b) 的稳定流形有些狭长, 这因为流形在该方法下仍然不是向外均匀增长的, 注意到从初始圆上出发的轨道并不是沿与初始圆边界垂直的方向向外增长的, 而是成一定的角度, 由几何的知识易知即使是轨道等弧长向外增长, 由于与初始圆边界所成角度不同, 与上一环的实际距离还是会有差别; 2) 在流形的底部, 图 4(a) 与 (b) 明显不同, 图 4(b) 的轨道弧长法是以局域稳定流形为中心, 以近似圆的方式向外扩展, 在圆周插值时产生较大误差, 掩盖了细节信息, 而图 4(a) 的自适应因子轨道延拓法是画线的方法, 避免插值产生的误差, 更精确反映了细节信息.

图 4(c) 是 (a) 的局部放大, 明显的看到了构成流形的轨道, 图 4(d) 是初始椭圆以及从该椭圆出发的轨道, 可以清楚看到轨道的分布情况, 从表 1 也可以看出, 画流形的轨道主要集中在一个很小的角度内.

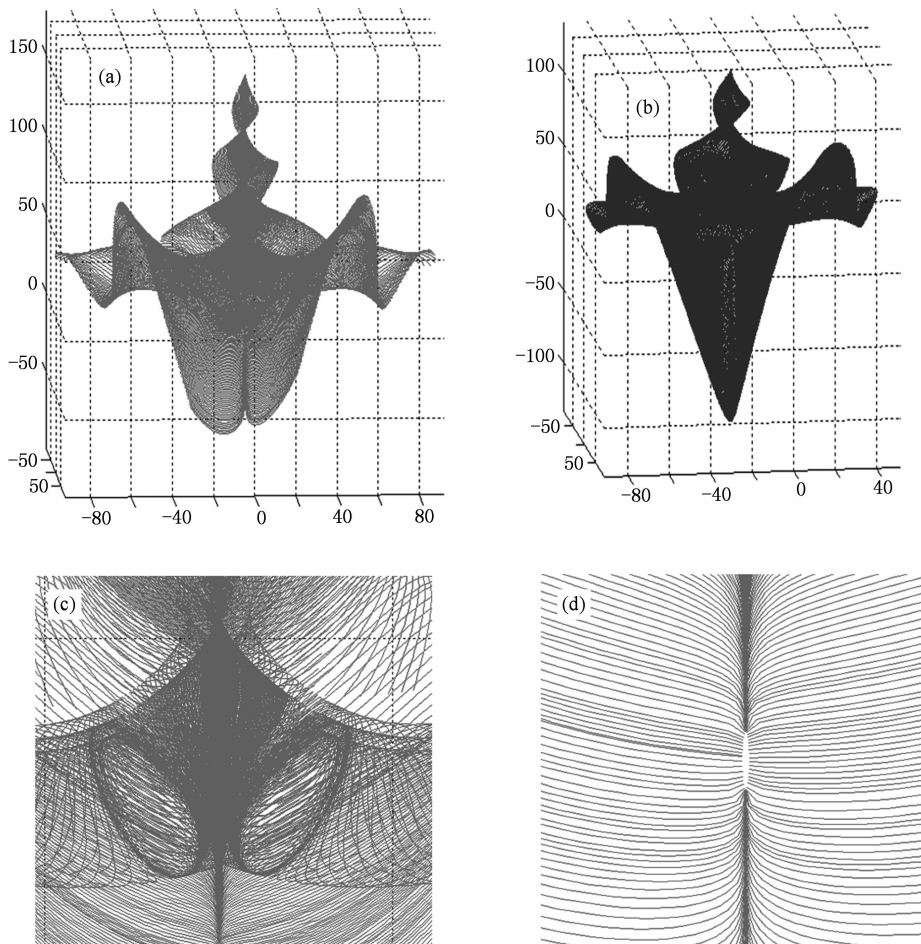


图 4 (a) 自适应因子流形; (b) 角度限制流形; (c) 自适应因子局部放大; (d) 自适应因子初始椭圆

表 1 自适应因子法全局流形计算过程

角度/rad	自适应因子变化范围/rad	轨道个数	所需时间/s
0.0000—1.5708	$10^{-1} - 10^{-6}$	41	51
1.5708—1.5709	$10^{-6} - 10^{-16}$	578	473
1.5908—4.7124	$10^{-1} - 10^{-6}$	35	50
4.7124—4.7125	$10^{-6} - 10^{-16}$	193	176
4.7125—6.2842	$10^{-1} - 10^{-6}$	25	31

由表 1 可以看出,流形对初始椭圆的点非常敏感,特别是在特征向量的方向上,在这个角度上集中了 90% 的轨道,由于这个方向要求精度比较高,所以当继续减小自适应因子  $\Delta\theta$  到  $10^{-23}$  时,计算量会急剧增加,可能导致流形图无法打开;如果继续减小自适应因子,计算机会默认两条轨道重合而进

入死循环. 本文在做仿真时兼顾速度与精度,取  $\Delta\theta$  最小值为  $10^{-16}$ .

## 5. 结 论

本文详细阐述了自适应因子轨道延拓法的基本思路,基本原理,实现步骤,并与另外两个方法进行对比;通过仿真可以得出,自适应因子方法在减小计算量的同时,保持了精度高的优势,更能反映流形延拓趋势和细节信息;而另外的两种方法仅仅得到了流形的轮廓,忽略了流形增长趋势. 在使用自适应因子轨道延拓法时,针对不同的模型,必须根据模型非线性的强弱重新确定计算精度和自适应因子的变化范围.

- [1] Liu Y Z, Chen L Q, Cheng G, Ge X S 2000 *Advance Mechanics* **30** 351 (in Chinese) [刘延柱、陈立群、成 功、戈新生 2000 力学进展 **30** 351]
- [2] Krauskopf B, Osinga H M 1998 *Comput. Phys.* **146** 406
- [3] Doedel, Auto E J 1981 *Congr. Numer* **30** 265
- [4] Nils Berglund <http://www.math.ethz.ch/~berglund> 2001
- [5] Krauskopf B, Osinga H M 1999 *Chaos* **9** 768
- [6] Johnson M E, Jolly M S, Kevrekidis I G 1997 *Numer Algorithms* **14** 125
- [7] Guckenheimer J, Vladimirovsky A 2004 *Appl. Dyn. Sys.* **3** 232
- [8] Dellnitz M, Hohmann A 1997 *Num. Math.* **75** 293
- [9] Krauskopf B, Osinga H M, Doedel E J 2005 *Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg* **15** 763
- [10] Krauskopf B, Osinga H M 2003 *Appl. Dyn. Sys.* **2** 546
- [11] Guckenheimer J, Worfolk P 1993 *Dynamical systems* (Ithaca: Kluwer Academic) p241
- [12] Ni F, Xu W, Fang T, Yue X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010510-1
- [13] Liu Y L, Zhu J, Luo X S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3772
- [14] Jiang G R, Xu B G, Yang Q G 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5235
- [15] Hobson D 1993 *Comput. Phys.* **104** 14
- [16] Henderson M E 2005 *Appl. Dyn. Sys.* **4** 832
- [17] Liang C X, Tang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 135
- [18] Zhang Y, Lei Y M, Fang T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3799 (in Chinese)[张 莹、雷佑铭、方 同 2009 物理学报 **58** 3799]
- [19] Jiang G R, Yang Q G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4114
- [20] Zuo H L, Xu J X, Jiang J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 117
- [21] Xu Q, Tian Q 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2469

# Computation of invariant manifolds with self-adaptive parameter and trajectories continuation method\*

Jia Meng<sup>1)2)†</sup> Fan Yang-Yu<sup>1)</sup> Li Hui-Min<sup>1)</sup>

1) (*Department of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

2) (*Department of Electrical Engineering, Xinxiang College, Xinxiang 453000, China*)

(Received 31 December 2009; revised manuscript received 8 March 2010)

## Abstract

Most work on manifold study focuses on two-dimensional manifolds and there have been proposed some good computing methods. However, the computation of two-dimensional manifold is still a hot research field. In this paper the two-dimensional manifold of hyperbolic equilibria for vector fields is computed by combining self-adaptive parameter with trajectories continuation, approximating the local manifold with an ellipse around the equilibria, extending the trajectory with equal distance, and adjusting the trajectory with self-adaptive parameter. This method is more accurate than the “trajectories and arc-length method”, and better shows the trend of the manifolds than the “box covering method”.

**Keywords:** self-adaptive parameter, trajectories continuation, manifolds, non-linear system

**PACC:** 0547

---

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 60872159).

† E-mail: tianshi\_cd@163.com