

薄板热扩散分形生长的环境干扰控制*

张 丽[†] 刘树堂

(山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061)

(2010 年 1 月 12 日收到; 2010 年 3 月 5 日收到修改稿)

研究了薄板热扩散中分形生长的控制, 给出了生长概率与干扰项之间的数量关系, 预测了热扩散分形生长表面在干扰作用区域内的凝聚情况, 并随着干扰项的制约而达到控制的目的. 其中以三角函数形式的非线性项与定义域为圆域的源项构成的环境干扰项为例, 验证了该控制方法的有效性. 另外, 生长表面的标度维数变化显示了环境干扰项对实际生长复杂度的影响.

关键词: 薄板热扩散, 分形, 环境干扰, 控制

PACC: 0555

1. 引 言

自然界中的许多远离平衡的生长系统、现象和过程都具有分形特征, 比如星云的分布、起伏的山脉、地震、河网水系分布、凝聚体、人的血管系统、肺膜结构、城市噪声、剧烈变化的气候、股市^[1,2]等. 因此为了解释实际环境中复杂无序的生长现象, 人们提出了生长集团具有标度不变性的生长模型, 其中扩散限制凝聚 (DLA) 模型^[3]是研究非平衡生长的最重要也是应用最广泛的模型之一. 在此模型的基础上, 人们做了大量的计算机模拟工作^[4-8], 并利用这些模拟结果解释了实验中出现的各种分形的现象.

然而, 在一个复杂的外在环境中, 温度、磁场的变化, 散发潜热的多少等许多因素都会影响生长凝聚的过程, 从而使得对应的生长形态难以预测并展现复杂的变化. 因此研究在众多复杂因素的干扰下, 非平衡分形生长形态的预测和控制成为一个重要并且具现实意义的问题. 但是到目前为止, 人们对非平衡生长的控制研究大多集中在通过改变计算机模拟的参数或调整实验的某些条件的方法^[9-16]得到生长形态的改变, 还没有从反映事物变化的数量分析上即数学模型出发, 研究由边界制约的, 也就是我们称为环境干扰下的非平衡生长控制

的相关资料和信息.

本文讨论了薄板热扩散在环境干扰下, 热扩散的分形生长控制问题, 并分析了在生长过程中热流的凝聚概率 (或凝聚温度) 与环境干扰项的数量关系. 通过所得的数量关系, 可以预测在环境干扰项的作用区域不同时, 热扩散分形生长的表面就会从枝状生长控制到不同的表面形态. 而且随着环境干扰项的增大, 热流分形凝聚的表面也会随之增大. 并以三角形式的弦振动非线性项与定义域为圆域的源项所构成的环境干扰项为例的仿真表明了该控制的有效性. 另外, 标度维数的变化显示了环境干扰项在控制生长形态的同时增加了生长的复杂程度.

2. 问题的提出

考虑某薄板物体 G (如图 1 所示) 的热传导问题, 以函数 $\varphi(x, y, t)$ 表示物体 G 在位置 (x, y) 处及时刻 t 的温度, 则由热扩散的特征^[17]可知, 薄板型热的传导过程的生长概率都可以看作满足定边界条件的分布参数动力系统为

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial \varphi^2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2(x, y, t)}{\partial y^2} \right),$$

其中, $\varphi(x, y, t)$ 通常称为热的传导概率或者称为凝聚温度, η 是扩散常数.

* 国家自然科学基金 (批准号: 60874009, 10971120), 全国百篇优秀博士论文专项基金 (批准号: 200444) 资助的课题.

[†] E-mail: zhanglisdu2008@yahoo.com

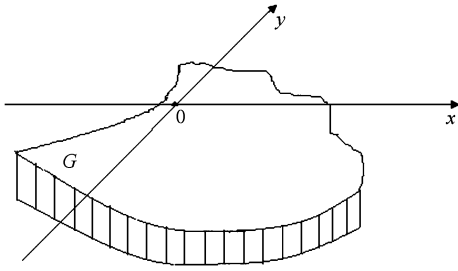


图1 某薄板物体 G

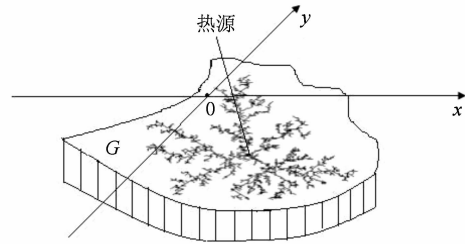


图2 $F = 0$ 时薄板 G 上的热扩散

注意到热量的传导会受到复杂的客观环境的影响，因此为了更好的处理热量的传导，现实中通常传导概率满足如下形式的分布参数系统：

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = F(\varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial t}, u(x, y)), \quad (1)$$

其中 F 代表环境干扰项，通常称为强迫项，并且是一个非线性函数， $u(x, y)$ 是数量化的初始条件，称为源项。通常对于非线性分布参数系统(1)，要得到其解析解是非常困难的，为此引入系统(1)的离散动力系统为

$$\begin{aligned} & \varphi_{m+1, n} + \varphi_{m-1, n} + \varphi_{m, n+1} + \varphi_{m, n-1} - 4\varphi_{m, n} \\ & = F(\varphi_{m, n}, (\varphi_{m+1, n} - \varphi_{m, n})(m_{t+1} - m_t) \\ & + (\varphi_{m, n+1} - \varphi_{m, n})(n_{t+1} - n_t), u_{m, n}), \quad (2) \end{aligned}$$

并考虑(2)式的数值量测的性质，从而来逼近(1)式的热量传导的精确值。

对环境干扰下的热量传导来说，除了传导点的4个最近邻之外，次近邻的4个点也对热量传导分形凝聚的形态起了很大的作用，例如在二元合金中的生长过程^[18]就是这样。因此根据系统(2)，环境干扰下热扩散分形生长的计算机模拟过程是这样的：在一个 201×201 的格子中心有一个传导点，然后从很远处发射出第二个粒子，该粒子随机扩散到传导点的周围（最近邻与次近邻），当由具有适当边界条件的系统(2)解出的传导点周围的 k 个点中的第 j 个点处的概率满足

$$\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq \zeta < \sum_{i=1}^j p_i$$

时，其中 $\zeta \in \Omega = (0, 1)$ ，并且 ζ 是一个随机数， $i = 1, 2, \dots, k$ ，选择第 j 个候选点是下一个传导点；类似的第三个，第四个， \dots ，第 n 个粒子以同样的方式被释放，并以相同的方法选择下一个传导点，最后形成一个复杂的热扩散分形凝聚集团。图2是 $F = 0$ 时热流传导凝聚集团。

3. 控制理论与实现

在以下的分析中，系统(2)的边界条件总是在传导点终止扩散的边界点上，集团内部的传导概率 $\varphi = 0$ ，以及离集团很远的场 φ 可提供一个稳定的总粒子流 $\varphi \equiv 1$ 给集团表面。

特别注意到，由于正弦函数代表的重复震荡现象在纯粹数学、物理、信号处理以及电气工程等很多不同领域都经常出现，因此假设系统(2)中的非线性函数

$$F = \lambda \sin(4\varphi_{m, n}) + u_{m, n}. \quad (3)$$

为了方便处理，引入符号

$$\begin{aligned} C(r) = C_{mn}(r) = & \varphi_{m+r, n} + \varphi_{m-r, n} \\ & + \varphi_{m, n+r} + \varphi_{m, n-r}, \quad (4) \end{aligned}$$

并考虑更一般的系统

$$C(r) = \lambda \sin(C(r-1)) + C(r-1) + u_{m, n}, \quad (5)$$

其中 $r = 1, 2, \dots$ 。

显然，当 $r = 1$ 时，(5)式就是系统(2)。并且对(5)式经过简单的迭代过程，可以得到

$$\begin{aligned} C(r) = & ru + \lambda \sin(C(r-1)) + \lambda \sin(C(r-2)) \\ & + \dots + \lambda \sin(C(0)) + C(0), \quad (6) \end{aligned}$$

其中 $r = 1, 2, \dots$ 。

对(6)式，讨论环境干扰项对热扩散分形生长的控制。

3.1. 源项与非线性项对热扩散分形生长的控制

假设 H 是凝聚区域， Γ 是源项 $u(x, y)$ 的作用范围，并且 $\Gamma \subset H$ 。另外，在环境干扰下的传导过程中始终存在两个边界条件：一个是在传导点终止扩散的边界点上，集团内部的传导概率 $\varphi(x, y) = 0$ ，以及离集团很远的场 $\varphi(x, y) \equiv 1$ 。显然对任何 $(x, y) \in H$ ，都有 $0 \leq \varphi(x, y) \leq 1$ 成立。又由 H 内

的作为解析函数的 $\varphi(x,y)$ 满足最大值原理, 那么对任何 $(x,y) \in H - \bar{H}$, 条件 $0 \leq \varphi(x,y) < 1$ 必须成立, 其中 \bar{H} 表示 H 的边界. 因此系统(5)中的 u 和参数 λ 必须足够小, 即在传导过程中 u 和 λ 的取值必须保证

$$0 \leq \varphi_{m+r,n} + \varphi_{m-r,n} + \varphi_{m,n-r} + \varphi_{m,n+r} < 1$$

成立, 也就是 $0 \leq C(r) < 1$, 其中 $r = 0, 1, \dots$. 显然有

$$0 < \sin(C(r)) < C(r) < 1$$

成立, 故系统(6)满足如下的不等式:

$$C(r) < ru + \lambda C(r-1) + \lambda C(r-2) + \dots + (\lambda + 1)C(0). \quad (7)$$

根据(6)式与数学归纳法, 由(7)式得

$$C(r) < [(\lambda + 1)^{r-1} + (\lambda + 1)^{r-2} + \dots + (\lambda + 1) + 1]u + (\lambda + 1)^r C(0), \quad (8)$$

其中 $r = 1, 2, \dots$.

令不等式(8)的右边项为

$$G(\lambda, u, r) = [(\lambda + 1)^{r-1} + (\lambda + 1)^{r-2} + \dots + (\lambda + 1) + 1]u + (\lambda + 1)^r C(0),$$

则因为 $0 < \lambda \ll 1, 0 < u \ll 1$, 易证 $\frac{\partial G}{\partial \lambda} > 0$, 同理有

$\frac{\partial G}{\partial u} > 0$ 成立, 从而 $C(r)$ 关于 λ 和 u 分别单调递增.

根据(4)式给出的 $C(r)$ 与 $\varphi_{m,n}$ 的关系, 以及以上的结论可以看出, 薄板热传导凝聚概率 φ 会分别随着非线性项 $\lambda \sin(\varphi)$ 和源项 u 的增大而增大. 对系统(2), 当取源项 u 的作用区域为圆域 (r 为半径), u 的取值分别是常数与随机数 (rand 表示在区间 $(0, 1]$ 内的随机数) 为例时, 所得的仿真图3—6与没有环境干扰的仿真图2的对比, 清楚的表达了环境干扰项以及作用区域的增大, 对热量扩散表面比没有环境干扰的情况下越来越凝聚的控制效应, 体现了控制方法的有效性.

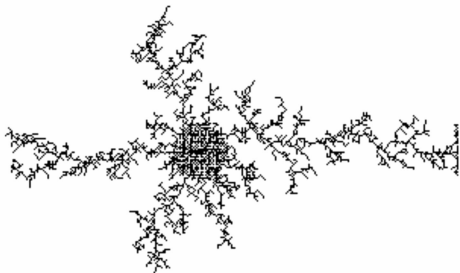


图3 $F = 10^{-6} \sin(4\varphi) + 10^{-2}$, $r = 10$ 时 G 上的热扩散

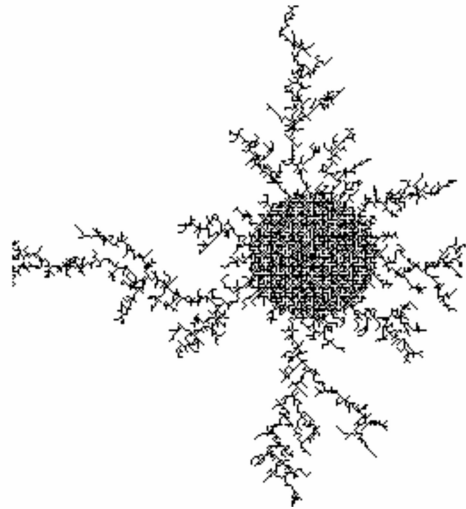


图4 $F = 10^{-6} \sin(4\varphi) + 10^{-2}$, $r = 20$ 时 G 上的热扩散

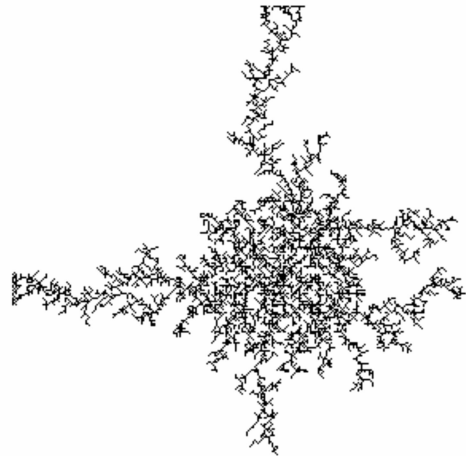


图5 $F = 10^{-6} \sin(4\varphi) + \text{rand} \times 10^{-3}$, $r = 30$ 时 G 上的热扩散



图6 $F = 10^{-5} \sin(4\varphi) + 5 \times 10^{-3}$, $r = 30$ 时 G 上的热扩散

需要特别指出的是, 上述研究是一个薄板热扩散中对于热量扩散的一个数学物理形式的数量分析, 可以看到对于热量凝聚的效果是明显的, 有效的. 而对于实际中的实现, 则需要一个非线性电路的实现和传感的过程, 这一部分结果我们正在进一

步研究, 并另文发表.

3.2. 源项抑制非线性项的控制作用

虽然非线性项 $\lambda \sin(\varphi)$ 和源项 u 的增大都可以控制热传导分形凝聚的概率增长, 但是仍然有必要讨论可以使得传导增长效应更快的控制项, 从而更好的预测与控制薄板热传导分形生长的凝聚过程.

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial u} &= (\lambda + 1)^{r-1} [rC(0) - 1] \\ &+ (\lambda + 1)^{r-2} [(r-1)u - 1] + \dots \\ &+ (\lambda + 1)(u - 1) + (u - 1), \end{aligned}$$

根据 $0 < ru < 1$ 和 $rC(0) < 1$, 从而

$$rC(0) - 1 < 0, (r-i)u - 1 < 0,$$

其中 $i = 1, 2, \dots, r-1$. 另外, 根据 $\lambda > 0$, 则

$$(\lambda + 1)^{r-1} [rC(0) - 1] < 0,$$

$$(\lambda + 1)^{r-2} [(r-1)u - 1] < 0,$$

...

$$u - 1 < 0.$$

因此有

$$\begin{aligned} &(\lambda + 1)^{r-1} [rC(0) - 1] + (\lambda + 1)^{r-2} \\ &\times [(r-1)u - 1] + \dots + (\lambda + 1)(u - 1) \\ &+ (u - 1) < 0, \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial u} < 0,$$

这意味着 $\lambda \sin(\varphi)$ 对生长凝聚的增长效应要小于 u 的效应. 由仿真图 5 与图 6 的对比, 可以清楚的看到, 在源项作用的区域内, 非线性项的存在不改变传导表面凝聚到作用区域内的热流分形趋势.

另外, u 取值为常数与取值为随机数对热流分形凝聚的紧密程度也有不同的作用, 这由图 4 与图 5 的比较可以看出, 原因是随机数的取值造成凝聚的不紧致.

运用 Sandbox 方法^[19]计算的在源项 u 的作用范围内的分形维数(D)变化如图 7 说明, 随着环境干扰项从零到不同的增大, 对应的分形维数也有不同程度的增大, 这意味着环境干扰项在控制了薄板热扩散分形表面形态变化的同时增大了热流分形生长的复杂度.

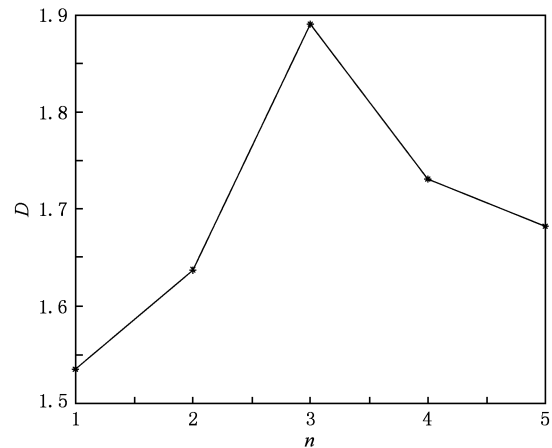


图 7 图 m 维数变化图, 其中 $m = n + 1, n = 1, 2, \dots, 5$

4. 结 论

非平衡生长现象广泛存在于自然界中, 它的预测与控制是一个重要并具现实意义的新问题. 本文给出了薄板热扩散中分形生长的环境控制模型, 根据模型分析结果预测热扩散分形生长表面的形态变化, 可以通过改变环境干扰项的大小与作用区域的范围得到相应的控制. 并以由三角函数形式的非线性项以及作用区域是圆域的源项组成的环境干扰项对热扩散分形生长形态变化进行了控制. 仿真表明我们的方法是可行, 有效的, 这将有助于理解实际中非平衡生长的物理机制以及对它在物理学、生物学、医学和材料学等学科中的应用做进一步的讨论.

- [1] Yang Z R 1996 *Fractal physics* (Shanghai: Scientific and Technological Education) p209 (in Chinese) [杨展如 1996 分形物理学 (上海: 科技教育) 第 209 页]
- [2] Meakin P 2001 *Fractal, scaling and growth far from equilibrium* (United Kingdom: Cambridge University Press) p183
- [3] Witten T A, Sander L M 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 1400

- [4] Zhang D P, Qi H J, Shao J D, Fan R Q, Fan Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1385 (in Chinese) [张东平、齐红基、邵建达、范瑞瑛、范正修 2005 物理学报 **54** 1385]
- [5] Murcio R, Rodríguez-Romo S 2009 *Physica A* **388** 2689
- [6] Yan L F, Iwasaki H 2004 *Chaos Soliton Fract* **20** 877
- [7] Zeng J L, Zhao G, Yuan J M 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 660

- [8] Jin F T, Yuan J M 2003 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2324
- [9] Su Y F, Li P X, Chen P, Xu Z F, Zhang X L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4531 (in Chinese) [苏亚凤、李普选、陈鹏、徐忠锋、张孝林 2009 物理学报 **58** 4531]
- [10] Xu X J, Wang F F, Cai P G, Wei G R, Sui C H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6881 (in Chinese) [许晓军、王凤飞、蔡萍根、魏高尧、隋成华 2007 物理学报 **56** 6881]
- [11] Zang J C, Tian Z K, Liu Y X, Chi J, Zou Y L, Wei J Z, Ye J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1358 (in Chinese) [臧竞存、田战魁、刘燕行、迟静、邹玉林、魏建忠、叶建萍 2006 物理学报 **55** 1358]
- [12] Xie G F, Wang D W, Ying C T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2212 (in Chinese) [谢国锋、王德武、应纯同 2005 物理学报 **54** 2212]
- [13] Wei H L, Liu Z L, Yao K L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 791 (in Chinese) [魏合林、刘祖黎、姚凯伦 2000 物理学报 **49** 791]
- [14] Lu H J, Wu F M, Yun Z 2004 *Chin. Phys. Lett.* **13** 2038
- [15] Tang Q, Tian J P, Yao K L 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 3033
- [16] Yang L, Pei W J, Li T, Cheung Y M, He Z Y 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1153
- [17] Gu C H, Li D Q, Chen S X, Zheng S M, Tan Y J 2002 *Equations of Mathematical Physics* (Higher Education Press) p48 (in Chinese) [谷超豪、李大潜、陈恕行、郑宋穆、谭永基 2002 数学物理方程 (高等教育出版社) 第 48 页]
- [18] Haemers T A M, Rickerby D G, Mittemeijer E 1999 *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* **7** 233
- [19] Tél T, Fülöp á, Vicsek T 1989 *Physica A* **159** 155

Control of thermal diffusion fractal growth of thin plate under environmental disturbance *

Zhang Li[†] Liu Shu-Tang

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

(Received 12 January 2010; revised manuscript received 5 March 2010)

Abstract

The control of thermal diffusion fractal growth of thin plate in reality under the environmental disturbance is introduced. The quantitative relationship between growth probability and environmental disturbance is obtained. According to the relationship, we predict that the growth surface will aggregate in the region of the environmental disturbance and be controlled by restricting the disturbance. The simulations show that the environmental disturbance, which is composed of a trigonometric function as a nonlinear term and a source term having a round region, controls the growth variation effectively. In addition, the change in fractal dimension of surface growth illustrates that the complexity of the growth increases as the environmental disturbance increases.

Keywords: thermal diffusion of the thin plate, fractal, environmental disturbance, control

PACC: 0555

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60874009, 10971120), the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (Grant No. 200444).

[†] E-mail: zhanglisdu2008@yahoo.com