

# 悬浮颗粒散射脉冲信号群的统计分形特性\*

杨 娟 卞保民<sup>†</sup> 彭 刚 闫振纲 李振华

(南京理工大学 信息物理与工程系, 南京 210094)

(2010 年 1 月 6 日收到; 2010 年 3 月 4 日收到修改稿)

将 PCI-9812 高速数据采集卡与激光尘埃粒子计数光电传感器结合, 对空气中悬浮颗粒群产生的散射脉冲信号数随幅度的统计分布  $p(l)$  进行高分辨率的测定. 实验数据表明, 在大样本条件下, 脉冲信号集合整体及不同脉宽信号子集的  $p(l)$  函数在幅度定义域  $(V_0, V_M)$  内均以很高的精度满足对数正态分布形式, 即该随机脉冲信号群具有统计分形(自相似)特征. 进一步理论研究表明,  $p(l)$  函数具有非线性缩放不变性; 且当统计参数满足  $(\overline{\ln l - \ln l})^2 > \ln l$  时, 该函数与幂函数  $l^{-(1-\varepsilon)}$  表现出几何相似性, 其中  $\varepsilon \ll 1$ .

**关键词:** 统计分形, 脉冲信号幅度计数分布函数, 非线性缩放不变性, 幂函数

**PACC:** 0555, 0250

## 1. 引 言

美国学者 Mandelbrot 于 1975 年提出的分形理论<sup>[1]</sup>, 已广泛应用于各类学科非线性问题的研究中<sup>[2,3]</sup>, 分形模型一般取幂函数形式<sup>[1]</sup>, 其本质为自相似. 自然界的许多事物和现象表现出极为复杂的形态, 分形自相似性往往以统计方式表现出来, 即当改变尺度时, 在该尺度包含的部分统计学特征与整体统计学特征相似, 这种分形称之为统计分形<sup>[4]</sup>.

较高精度测量数据的分析计算结果表明, 用对数正态统计函数描述小离散度颗粒群粒度分布更加准确<sup>[5]</sup>. Hwang 等人自 2007 年起对具有单峰的对数正态分布的亚微米颗粒进行了多通道实时测量和性能等方面的研究<sup>[6]</sup>; Baker 等人利用高精度测量系统的测量结果从曲线的经验拟合、破碎过程的分形特征、曲线中心不对称等方面论证了对数正态分布是描述破碎或分裂过程中碎片质量分布特征最合适的模型, 并介绍了分裂过程中的多重分形特征<sup>[7]</sup>. 目前, 分形模型已经成为纳米科学<sup>[6,8]</sup>、土壤科学<sup>[9]</sup>、环境科学<sup>[10]</sup>、生物医学<sup>[11]</sup> 等的重要研究基础.

本文报道以 PCI-9812 高速数据采集卡结合亚

微米级单分散颗粒计数光电传感器组成的测量系统, 对空气中悬浮颗粒群散射产生的随机脉冲信号幅度计数分布  $p(l)$  ( $l$  为计数电压通道序列数) 进行测定. 测量数据表明不同脉宽范围内的脉冲信号幅度计数、脉冲信号群整体的幅度计数都服从对数正态分布规律, 这是随机脉冲信号群具有统计分形特征的表现. 进一步理论计算表明, 脉冲信号幅度计数分布函数  $p(l)$  具有非线性缩放不变性, 且当统计参数  $\mu \equiv \overline{\ln l} < \sigma^2 \equiv (\overline{\ln l - \mu})^2$  时, 函数  $p(l)$  在几何上与分形幂函数  $l^{-(1-\varepsilon)}$  十分接近, 其中  $\varepsilon \ll 1$ . 考虑到随机脉冲信号计数统计的一般意义, 推定随机脉冲信号幅度计数分布函数  $p(l)$  为统计分形的基本形式.

## 2. 悬浮颗粒散射随机脉冲信号的产生及统计测量

在激光尘埃粒子计数测试系统中, 悬浮颗粒产生的信号是离散的随机脉冲信号, 信号的两个基本参数为脉冲宽度  $\tau$  和脉冲幅度  $V$ . 随机脉冲信号群计数统计测量结果分别对应于脉冲信号幅度计数分布和脉冲信号宽度计数分布. 典型的随机脉冲信号如图 1 所示, 图中横坐标为时间, 纵坐标为电压幅度, (a), (b) 框图分别代表两个参数不同的脉冲信

\* 江苏省博士后科研资助计划(批准号: 0902017C)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: bianbaomin\_56@yahoo.com.cn

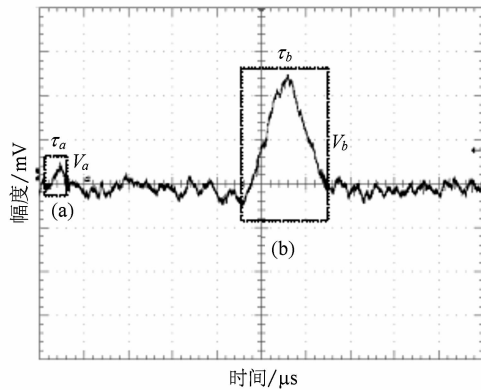


图1 典型的颗粒散射脉冲信号图

号. 随机脉冲信号群整体对应于一个信号集合, 每个脉冲是该集合中的一个元素. 显然, 根据脉冲信号基本参数测量值的不同, 如宽度参数 ( $\tau_k, \tau_k + \Delta\tau$ ) ( $k$  为信号宽度分档序列数,  $\Delta\tau$  为时间精度), 能将信号集合划分为具有不同特征的脉冲信号子集.

悬浮颗粒散射脉冲信号的随机性既是颗粒特征参数(质量、材质、形貌等)的反映, 也是光电测量过程中随机作用的反映. 脉冲信号参数幅度  $V$ 、宽度  $\tau$  均与颗粒质量  $m$  有关, 故激光尘埃粒子计数技术能够通过散射脉冲信号参数分布反演计算颗粒群的粒度及质量分布. 本文将采样率为 28.3 L/min 的激光尘埃粒子计数系统<sup>[12]</sup>产生的与颗粒散射对应的随机脉冲电压信号群输入具有 2048 个通道的计数系统(参见框图 2), 对不同脉宽范围内的脉冲信号进行幅度分布计数统计.

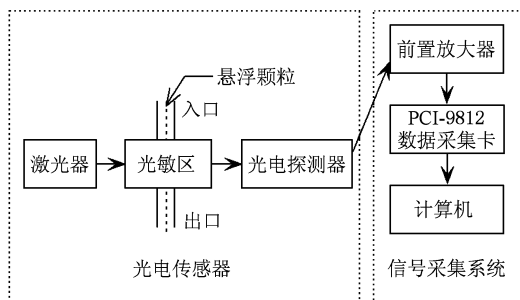


图2 粒子计数器测量系统示意图

测量装置输出的主要技术参数为: 光电传感器通频带宽约为 4 MHz, 脉冲信号平均宽度  $\bar{\tau} \sim 5 \mu\text{s}$ , 信号数字采样率  $f_e \sim 20 \text{ MHz}$  (相应的时间精度  $\Delta\tau$

$\sim 0.05 \mu\text{s}$ , 信号宽度分档序列数  $k = \left\lceil \frac{\tau}{\Delta\tau} \right\rceil$ ; 信号电压量程为 5 V, 2048 个计数通道的分档电压精度  $\Delta V = 5 \text{ V}/2048 \sim 2.44 \text{ mV}$ . 信号计数电压阈值  $V_0 = n_0 \Delta V$  约为测量系统电路输出噪声电压均方根的 5 倍, 脉冲信号电压  $V(l)$  记录值域 ( $n_0 \Delta V, 5 \text{ V}$ ), 对应的计数电压通道序列数  $l = \left\lceil \frac{V - n_0 \Delta V}{\Delta V} \right\rceil > 0, l, k$  均为有限值的自然数.

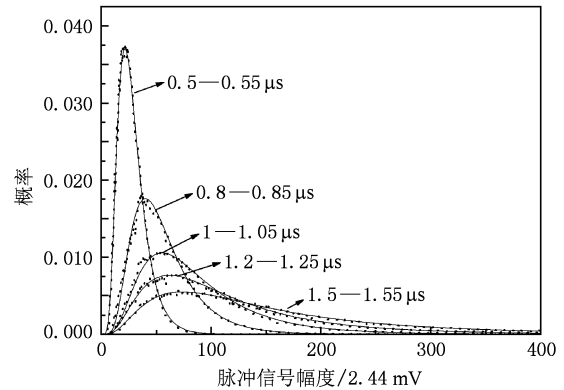


图3 不同宽度间隔内的悬浮颗粒散射信号幅度计数分布的对数正态分布曲线拟合图

采用上述装置取不同信号宽度范围  $\tau_k \sim \tau_k + 0.05 \mu\text{s}$ , 以脉冲信号幅度记录电压档  $V_i$  为横坐标, 测量出脉冲信号幅度计数分布  $\tilde{p}_{\tau_k}(V_i)$  参见图 3 中的离散点.

依信号出现先后进行排序, 颗粒脉冲信号幅度表现出随机性. 但依信号幅度大小排序, 从图 3 中容易看出  $\tilde{p}_{\tau_k}(V_i)$  曲线的几个基本特征. 首先, 脉冲信号计数幅度分布函数不具有“中心对称性”. 其次, 不同脉冲宽度信号子集的电电压幅度分布峰值、分布范围随信号宽度参数  $\tau_k$  单调增大. 第三, 不同脉宽信号子集的幅度分布  $\tilde{p}_{\tau_k}(V_i)$  具有很稳定的、整体性的几何结构相似性.

用同一装置对悬浮颗粒群产生的宽度大于  $0.5 \mu\text{s}$  的散射脉冲信号群幅度计数分布统计结果参见图 4(a), 幅度分布总档数超过 1500. 而脉冲信号群宽度计数分布统计结果参见图 4(b). 宽度分布采用分段测量, 在保持总样本不变的条件下, 逐次提高脉冲宽度下限, 计算不同宽度档内的计数比率, 宽度分布总档数只有 50. 由图 3, 4 比较可以看出, 脉冲信号群整体的计数分布与宽度子集的幅度计数分布具有非常好的几何相似性.

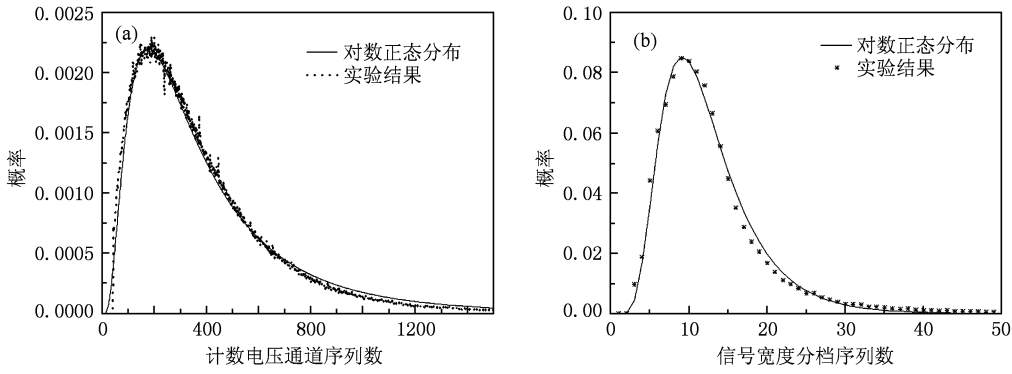


图4 悬浮颗粒散射脉冲信号随幅度和宽度的计数分布的对数正态分布曲线拟合图 (a) 幅度; (b) 宽度

### 3. 随机脉冲信号幅度计数分布函数

本文所及脉冲信号的随机性主要源于颗粒群一定程度的随机性、测量过程中的随机作用。由于无颗粒输入条件下的电噪声脉冲幅度远小于  $V_0$ ，故噪声对颗粒脉冲信号幅度、宽度的影响表现为使脉冲信号计数分布的离散程度增大。

图3,4中测量曲线的相似性能够理解成脉冲信号特征参数随机分布的共性所至。对不同宽度信号子集的幅度分布与信号集合整体幅度分布的相似性是随机脉冲信号群统计分形特性的(局部与整体相似)反映。图4代表同一随机性脉冲信号集合分别在两个独立特征参量形式下的统计分布。考虑到标准颗粒群产生的信号幅度分布规律<sup>[6]</sup>，以及高精度测量获得的颗粒粒度统计分布规律<sup>[5]</sup>，选用具有对数正态分布形式的统计函数对测量数据进行拟合，效果参见图3,4中的序列实线。与图4中实线对应的函数  $p(l)$  满足

$$p(l)\Delta l = \Omega \frac{\Delta l}{\sigma_A l} e^{-\frac{(\ln l - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2}}, \quad (\Delta l \equiv 1), \quad (1)$$

式中  $A$  代表幅度(或宽度)值,  $l \equiv \frac{A_l - A_0}{\Delta A} > 0$  为测量记录值域对应的有效分档数,  $A_0$  为对应的最小测量值,  $l$  为小于总分档数  $L$  的自然数。总分档数  $L$  随测量分辨率  $\Delta A$  减小而增大,统计分布的细节也随之更加清晰,无量纲参数  $\Omega, \mu_A, \sigma_A$  与测量过程的特征参数有关。

以  $M$  代表记录脉冲信号总数,  $m_l$  代表有效分档  $(A_{l-1}, A_l)$  对应的脉冲数,则以信号参数  $A$  为自变量的计数分布函数(参见图3)可写成

$$\frac{m_l}{M} \equiv \tilde{p}(A_l)(A_l - A_{l-1})$$

$$= \tilde{\Omega}(L, A_0, A_M, \sigma_A, \mu_A) \frac{\Delta A}{\sigma_A(A_l - A_0)} e^{-\frac{(\ln \frac{A_l - A_0}{\Delta A} - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2}}, \quad (2)$$

当脉冲信号量极大,任意  $m_l \gg 1$  时,记录数据对应的分布曲线趋于稳定。且  $\Delta l = 1$ , 令  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} L = \frac{A_M - A_0}{\Delta A} \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \ln \frac{A_l - A_0}{\Delta A} - \mu_A \right) = \ln \frac{A - A_0}{A_\mu}$ , 在有限区间上  $(A_0, A_M)$  分布函数  $\tilde{p}(A_l)$  趋于连续性形式

$$\lim_{A_l \rightarrow A_{l-1}} \frac{m_l}{M(A_l - A_{l-1})} \rightarrow \tilde{p}(A) = \frac{\tilde{\Omega}(L \rightarrow \infty, A_0, A_M, \sigma_A, \mu_A)}{\sigma_A(A - A_0)} e^{-\frac{(\ln \frac{A - A_0}{A_\mu})^2}{2\sigma_A^2}}, \quad (3)$$

归一化系数满足

$$\tilde{\Omega}(L \rightarrow \infty, A_0, A_M, \sigma_A, \mu_A) \int_{A_0+0^+}^{A_M} \frac{dA}{\sigma_A} \frac{1}{A - A_0} e^{-\frac{(\ln \frac{A - A_0}{A_\mu})^2}{2\sigma_A^2}} = 1, \quad (4)$$

上式中的积分计算如下:

$$\begin{aligned} & \int_{A_0+0^+}^{A_M} \frac{1}{\sigma_A} d \ln(A - A_0) e^{-\frac{(\ln \frac{A - A_0}{A_\mu})^2}{2\sigma_A^2}} \\ &= \int_{0^+}^{\frac{A_M - A_0}{A_\mu}} \frac{e^{-\frac{(\ln X)^2}{2\sigma_A^2}}}{\sigma_A} d \ln X \\ &= \int_{-\infty}^{\ln \frac{A_M - A_0}{A_\mu}} \frac{1}{\sigma_A} dY e^{-\frac{1}{2}(\frac{Y}{\sigma_A})^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{\ln \frac{A_M - A_0}{A_\mu}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \Phi\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A_M - A_0}{A_\mu}\right), \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $\Phi\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A_M - A_0}{A_\mu}\right)$  的值可由正态分布积分表查出. 将(5)式的计算结果代入(4)式, 可得归一化系数  $\tilde{\Omega}$  为

$$\tilde{\Omega}(L \rightarrow \infty, A_0, A_M, \sigma_A, \mu_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \Phi\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A_M - A_0}{A_\mu}\right)}. \quad (6)$$

(6)式表明, 随机脉冲信号幅度计数分布函数的归一化系数与其测量值的边界  $A_0, A_M$  有关, 边界值不同其对应的归一化系数也不同(如图3).

以上结果表明, 随机脉冲信号幅度计数分布函数  $p(l)$  是自变量为自然数的对数正态分布函数的特殊形式, 而自变量  $l$  的自然数形式是信号参数测量精度(最小物理量单位)不为零的必然要求. 该系统产生的悬浮颗粒随机脉冲信号集合的计数分布与宽度子集的计数分布形式相同, 符合统计分形的定义<sup>[4]</sup>, 表明该随机脉冲信号群具有统计分形特征.

#### 4. 随机脉冲信号幅度计数分布函数的分形自相似特性

对数正态分布函数  $p(l)$  中的无量纲数  $\mu = \overline{\ln l}$ ,  $\sigma^2 = \overline{(\ln l - \ln l)^2}$  是两个描述其几何结构的特征参数. 当  $\sigma$  值较小时 ( $< 0.05$ ),  $p(l)$  趋于对称中心在  $\tilde{l} = e^\mu$  处的正态分布函数; 当  $\sigma \rightarrow 0$ , 信号计数集中于单一通道  $\tilde{l}$ ,  $p(l)$  趋于脉冲函数  $\delta(\tilde{l})$ ; 若取信号分布区间值  $(A_M - A_0)$  为物理量单位, 即  $L \equiv 1 > l$ , 则做自然数变换  $n = \frac{1}{l}$ , 且  $p(l) \rightarrow P(n)$ , 由(1)式可证明  $P(n)$  仍具有对数正态分布函数形式; 若取  $L \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow e^2$ , 则必然存在一个  $\mu$  值使得  $P(l)$  函数趋于均匀分布形式.

无量纲数  $\mu = \overline{\ln l}, \sigma^2 = \overline{(\ln l - \ln l)^2}$  也是反映随机脉冲信号统计具有分形特征的参数. 当测量精度足够高 (即  $\frac{\Delta A}{A_M - A_0} \rightarrow 0$ ) 总分档数极大 (数学无限大), 计数统计分布函数  $p(l)$  均趋于连续形式. 取  $\alpha = \sigma_1/\sigma_2$  ( $\alpha$  的值一般为非整数)、 $\ln b = \mu_1/\alpha - \mu_2$ , 对两个自变量作非线性变换

$$l_1 = (bl_2)^\alpha. \quad (7)$$

则有

$$\begin{aligned} p(l_1) dl_1 &= \frac{dl_1}{\Omega \sigma_1 l} e^{-\frac{(\ln l_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \\ &= \frac{\alpha b (bl_2)^{\alpha-1} dl_2}{\Omega \sigma_1 (bl_2)^\alpha} e^{-\frac{(\alpha \ln l_2 + \alpha \ln b - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \\ &= \frac{dl_2}{\Omega (\sigma_1/\alpha) l_2} e^{-\frac{(\ln l_2 + \ln b - \mu_1/\alpha)^2}{2\sigma_1^2/\alpha^2}} \\ &= \frac{dl_2}{\Omega \sigma_2 l_2} e^{-\frac{(\ln l_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\ &= p(l_2) dl_2. \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式表明,  $p(l)$  函数也具有非线性缩放不变这种分形自相似特征. 不仅随机脉冲信号子集与子集之间、子集与集合整体之间、幅度分布与宽度分布之间具有统计意义上的结构自相似分形特征; 且基于  $p(l)$  函数的统计特征量(如幅度、宽度)在定义域内也具有幂函数分形自相似变换关系.

当  $\sigma^2 > \mu$  时,  $p(l)$  呈现出单调减小的特性, 作参数代换  $\ln \tilde{l} = \mu$ , 则有

$$\begin{aligned} p(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma l}} e^{-\frac{(\ln l - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma \tilde{l}}} \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right) e^{-\frac{[\ln(L/\tilde{l})]^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma \tilde{l}} \xi f(\xi)}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中函数  $f(\xi) = e^{\frac{(\ln \xi)^2}{2\sigma^2}} \geq f(1) = 1$ , 且有  $\xi f(\xi) \geq \xi$ . 数值计算发现, 在  $\sigma^2 > \mu$  的条件下,  $p(l)$  函数(图5中的实线)与非整数分形幂函数  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma \tilde{l}}} \left[ (1 - \varepsilon) \frac{l}{\tilde{l}} \right]^{-(1-\varepsilon)}$  (图5中的点序列线)非常接近, 其中参数  $\varepsilon \ll 1$ .

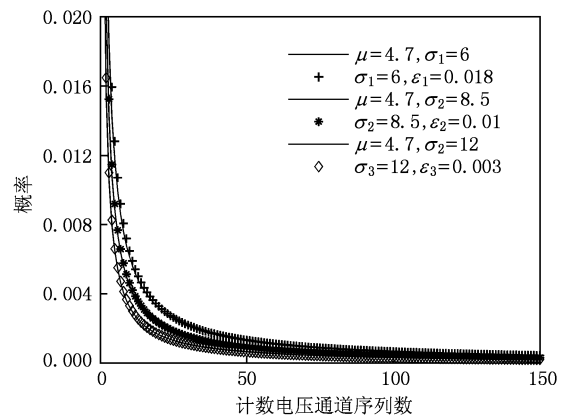


图5 单调性  $p(l)$  函数与幂函数  $l^{-(1-\varepsilon)}$  两种几何结构相近

对单调  $p(l)$  函数, 当假设物理模型  $B(A)$  满足

$B(A) \propto A^\beta \sim l^\beta$  近似形式时, 与参量  $B(A)$  对应的累  
计分布函数也具有分形幂函数形式<sup>[13,14]</sup>

$$\int p(l) dl \sim \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} \tilde{l}} \left[ (1 - \varepsilon) \frac{l}{\tilde{l}} \right]^{-(1-\varepsilon)} dl$$

$$\propto \left( \frac{l}{\tilde{l}} \right)^{1+\varepsilon} \sim \left( \frac{B}{\tilde{B}} \right)^{(1+\varepsilon)\beta}. \quad (10)$$

但是, 幂指数不是统计函数, 且没有明确的定义域上下限, 同时未见有研究结果给出这种函数所对应的物理学测量原理, 仅仅是从实用形式的角度利用其“分形特征”, 因此这种类似于幂函数形貌的统计分布是统计函数  $p(l)$  在信号参数离散度很大条件下的近似表达式.

## 5. 结 论

实验发现空气中悬浮颗粒群散射脉冲信号幅度同样也服从对数正态分布形式, 且集合整体分布服从与其不同脉宽子集下的分布相同的统计规律, 即该信号群具有统计分形特征. 进一步证明了脉冲信号幅度计数分布函数  $p(l)$  具有非线性缩放不变性, 且当统计参数  $\sigma^2 > \mu$  时, 脉冲信号幅度计数分布函数  $p(l)$  与统计分形幂函数  $l^{-(1-\varepsilon)}$  十分接近, 其中  $\varepsilon \ll 1$ . 结果表明, 对于脉冲信号幅度计数分布离散比较大的一个实际测量结果, 将其拟合成具有简单形式的幂函数和对数正态分布都是可以的.

- [1] Mandelbrot B B 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco; W. H. Freeman)
- [2] Yang J, Lai X M, Peng G, Bian B B, Lu J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3008 (in Chinese) [杨 娟、赖晓明、彭 刚、卞保民、陆 建 2009 物理学报 **58** 3008]
- [3] Ren X C, Guo L X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2956
- [4] Chen Y, Chen L 2005 *Fractal Geometry* (Beijing: Earthquake Publishing House) p76 (in Chinese) [陈 颢、陈 凌 2005 分形几何学 (北京: 地震出版社) 第 76 页]
- [5] Kiss L B, Soderlund J, Granqvist C G 1999 *NanoStructured Materials* **12** 327
- [6] Park D, An M, Hwang J 2007 *Aerosol Science* **38** 420
- [7] Baker L, Giancola A J, Allahdadi F 1992 *Journal of Applied Physics* **72** 2724
- [8] Shu X M, Fang J, Shen S F, Liu Y J, Yuan H Y, Fan W C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4466 (in Chinese) [疏学明、方 俊、申世飞、刘勇进、袁宏永、范维澄 2006 物理学报 **55** 4466]
- [9] Millan H, Gonzalez-Posada M, Aguilar M, Dominguez J, Cespedes L 2003 *Geoderma* **117** 117
- [10] Michael D H 2006 *Journal of Volcanology and Geothermal Research* **154** 8
- [11] Tijana B, Aleksandra V, Aleksandar K 2010 *Journal of Theoretical Biology* **262** 214
- [12] Peng G, Bian B B, Lu J 2009 *Instrument Technique and Sensor* **9** 5 (in Chinese) [彭 刚、卞保民、陆 建 2009 仪表技术与传感器 **9** 5]
- [13] Gu F, Yang J, Bian B B, He A Z 2007 *Acta Opt. Sin.* **27** 1706 (in Chinese) [顾 芳、杨 娟、卞保民、贺安之 2007 光学学报 **27** 1706]
- [14] Tanaka M, Komagata M, Tsukada M, Kamiya H 2008 *Powder Technology* **186** 1

# The statistical fractal characteristic of aerosol scattering pulse signal group<sup>\*</sup>

Yang Juan   Bian Bao-Min<sup>†</sup>   Peng Gang   Yan Zhen-Gang   Li Zhen-Hua

(Department of Information Physics and Engineer, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 6 January 2010; revised manuscript received 4 March 2010)

## Abstract

The amplitude statistical distribution function  $p(l)$  of the aerosol scattering pulse signals is measured with high resolution through combining the high-speed data acquisition card PCI-9812 and the photoelectric sensor of laser airborne particle counter. The experimental results show that the distribution function  $p(l)$  of the whole signal group and the different pulse width subsets all fit the lognormal distribution with very high precision in the range of amplitude definition  $(V_0, V_M)$  under the condition of big samples, which indicates that the random signal group has a statistical fractal (self-similarity) characteristic. According to the further theoretical results, it is analyzed that function  $p(l)$  has a nonlinear scale invariance. Besides, this function shows a geometrical similarity to the power law  $l^{-(1-\varepsilon)}$  when statistical parameter  $(\overline{\ln l} - \overline{\ln l})^2 > \overline{\ln l}$ , where  $\varepsilon \ll 1$ .

**Keywords:** statistical fractal, amplitude counting distribution function of the pulse signal, nonlinear scale invariance, power law

**PACC:** 0555, 0250

<sup>\*</sup> Project supported by the Jiangsu Planned Projects for Postdoctoral Research Funds (Grant No. 0902017C).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: bianbaomin\_56@yahoo.com.cn