

带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞 的瞬时辐射能通量^{*}

孟庆苗[†] 蒋继建 李传安

(菏泽学院物理系, 菏泽 274015)

(2009 年 2 月 1 日收到; 2009 年 6 月 15 日收到修改稿)

利用带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞视界面附近标量场的熵密度, 研究黑洞的热辐射规律, 导出了黑洞的瞬时辐射能通量, 得到了黑洞的热辐射总是满足广义 Stefan-Boltzmann 定律的结论. 导出的广义 Stefan-Boltzmann 系数不是常数, 而是一个与黑洞参量(质量、所带的电荷与磁荷、加速度的大小、视界的变化率)有关的动比例系数. 对于不同的动态黑洞, 由于黑洞周围的引力场和电磁场不同, 导出的广义 Stefan-Boltzmann 系数也不同.

关键词: 熵密度, 视界温度, 瞬时辐射能通量, 广义 Stefan-Boltzmann 定律

PACC: 0420, 9760L

1. 引言

自从 Hawking 从理论上证明黑洞的视界会发出热辐射以来^[1], 人们在黑洞热力学方面做了大量工作, 并取得了许多有价值的成果^[2-6]. 其中, 't Hooft 提出的 brick-wall 模型^[3]对黑洞熵的起源给出了一种统计解释. 随后人们改进 brick-wall 方法, 提出薄膜模型^[7,8]. 大量文献^[9-14]采用薄膜模型计算得到的动态黑洞的熵同样与黑洞的视界面积成正比. 显然, 黑洞的视界、熵以及 Hawking 辐射之间存在着必然的内在联系^[15]. 2000 年 Parikh 和 Wilczek^[4]在考虑辐射粒子的自引力作用的情况下, 将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿过程, 得到了黑洞视界处粒子的量子隧穿率与黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵变有关. 随后的一些工作^[16-20]都得到了与 Parikh 结论完全相符的结果. 进一步研究黑洞熵与黑洞的辐射之间的关系是一项十分有意义的工作. 我们利用黑洞视界附近的熵密度, 对黑洞的热辐射进行了研究, 得到了黑洞的热辐射总是满足广义 Stefan-Boltzmann 定律的结论^[21-28]. 为使研究结果更具有普遍意义且与天文观测更好的相联系, 本文研究了带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞的瞬

时辐射能通量.

2. 带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞 的视界面方程

采用超前 Eddington-Finkelstein 坐标和 $(-, +, +, +)$ 号差, 带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞的时空线元为^[29,30]

$$ds^2 = g_{00}dv^2 + 2g_{01}dvdr + 2g_{02}dv d\theta + 2g_{03}dv d\varphi + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\varphi^2. \quad (1)$$

度规各非零分量为

$$g_{00} = - \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{E^2 + Q^2}{r^2} - 2\arccos\theta - \frac{4a(E^2 + Q^2)}{r}\cos\theta - r^2(f^2 + h^2\sin^2\theta) - \frac{1}{3}\lambda r^2 \right],$$

$$g_{01} = 1, g_{02} = r^2 f,$$

$$g_{03} = r^2 h \sin^2\theta,$$

$$g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \quad (2)$$

式中,

$$f = -a\sin\theta + b\sin\varphi + c\cos\varphi,$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10773002)和山东省教育厅科技计划(批准号:J07WJ49)资助的课题.

[†] E-mail: mengqingmiao@yahoo.com.cn

$$h = \cot\theta(b\cos\varphi - c\sin\varphi), \quad (3)$$

$M = M(v)$, $E = E(v)$, $Q = Q(v)$ 分别是黑洞引力场源质量及其所带的电荷与磁荷, $a = a(v)$ 为加速度的大小, $b = b(v)$, $c = c(v)$ 代表加速度的方向的改变. 由于黑洞的任意加速, 时空是动态和非轴对称的.

引入坐标变换^[31]

$$R = r - r_h(v, \theta, \varphi), \quad (4)$$

$$dR = dr - r_{hv}dv - r_{h\theta}d\theta - r_{h\varphi}d\varphi,$$

其中 $r_h(v, \theta, \varphi)$ 为黑洞的视界半径, $r_{hv} = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)_{r=r_h}$, $r_{h\theta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)_{r=r_h}$, $r_{h\varphi} = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)_{r=r_h}$, (1) 式可改写为

$$ds^2 = \hat{g}_{00}dv^2 + 2dv dR + \hat{g}_{22}\left(d\theta + \frac{\hat{g}_{02}}{\hat{g}_{22}}dv\right)^2 + \hat{g}_{33}\left(d\varphi + \frac{\hat{g}_{03}}{\hat{g}_{33}}dv\right)^2, \quad (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00} &= -1 + \frac{2M}{r} - \frac{E^2 + Q^2}{r^2} \\ &+ 2\arccos\theta + \frac{4a(E^2 + Q^2)}{r}\cos\theta \\ &+ 2r_{hv} - 2fr_{h\theta} - 2hr_{h\varphi} + \frac{1}{3}\lambda r^2 \\ &- \frac{r_{h\theta}^2}{r^2} - \frac{r_{h\varphi}^2}{r^2\sin^2\theta}, \\ \hat{g}_{02} &= r^2f + r_{h\theta}, \\ \hat{g}_{03} &= r^2h\sin^2\theta + r_{h\varphi}, \\ \hat{g}_{22} &= r^2, \\ \hat{g}_{33} &= r^2\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

再引入坐标变换

$$d\Theta = d\theta + \frac{\hat{g}_{02}}{\hat{g}_{22}}dv, \quad (7)$$

$$d\Phi = d\varphi + \frac{\hat{g}_{03}}{\hat{g}_{33}}dv,$$

(5) 式可变为

$$ds^2 = \hat{g}_{00}dv^2 + 2dv dR + \hat{g}_{22}d\Theta^2 + \hat{g}_{33}d\Phi^2. \quad (8)$$

变换后黑洞的无限红移面与事件视界面重合, 容易得到黑洞事件视界面方程为

$$-1 + \frac{2M}{r_h} - \frac{E^2 + Q^2}{r_h^2} + 2ar_h\cos\theta$$

$$+ \frac{4a(E^2 + Q^2)}{r_h}\cos\theta + 2r_{hv} - 2fr_{h\theta} - 2hr_{h\varphi} + \frac{1}{3}\lambda r_h^2 - \frac{r_{h\theta}^2}{r_h^2} - \frac{r_{h\varphi}^2}{r_h^2\sin^2\theta} = 0. \quad (9)$$

由于 $\hat{g}_{00} = 0$ 为黑洞的视界面方程, 故 $\hat{g}_{00}$ 可表示为 $\hat{g}_{00} = F(v, r, \theta, \varphi)(r - r_h)$. (10)

3. 带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞的广义 Stefan-Boltzmann 定律

采用黑洞的薄膜模型, 动态黑洞的瞬时辐出度 (瞬时辐射能通量) 可表示为^[22]

$$M_m = M_s - \alpha sr_{hv}T, \quad (11)$$

式中, M_s 为假定黑洞处于热力学平衡时对应的辐出度 (辐射能通量), α 为与黑洞辐射和吸收系数有关的常数, s 为动态黑洞事件视界面附近薄层膜内熵的体密度, $r_{hv} = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)_{r=r_h}$ 为黑洞的视界变化率, T 为黑洞的视界温度.

文献[14]采用薄膜模型, 在视界附近 $r_h + \varepsilon \rightarrow r_h + \varepsilon + \delta$ (其中 δ 为薄膜的厚度, ε 为截断因子, ε 和 δ 都远小于 r_h) 的区域, 把薄层膜分成许多子系统 $r_h(v, \theta_i, \varphi_i) + \varepsilon \rightarrow r_h(v, \theta_i, \varphi_i) + \varepsilon + \delta$, 在每个小子系统内的量子场处于准热平衡且统计规律是有效的条件下, 给出了黑洞视界面附近标量场的第 i 个子系的熵为

$$\Delta S_i = \frac{4\pi^2 \Delta A_i}{90\beta_h^3 F_h^2} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon(\varepsilon + \delta)}, \quad (12)$$

其中 ΔA_i 是第 i 个子系统在视界上的小面积, $\beta_h = \frac{1}{k_B T}$, k_B 为玻尔兹曼常数, $F_h = F(v, r_h, \theta, \varphi)$. 由 (12) 式可得第 i 个子系统内黑洞熵的体密度为

$$s = \frac{4\pi^2 k_B^3}{90F_h^2 \varepsilon(\varepsilon + \delta)} T^3. \quad (13)$$

取带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞趋于整体热平衡状态时的时空背景为带有电荷、磁荷的静态球对称黑洞, 对应的时空线元为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{E^2 + Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{E^2 + Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (14)$$

式中 M, E, Q 分别为带有电荷、磁荷的静态黑洞的质

量、电荷和磁荷,令

$$\hat{g}'_{00} = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{E^2 + Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\lambda r^2 \right) = f(r)(r - r_h), \quad (15)$$

则 $\hat{g}'_{00} = 0$ 即为该黑洞的视界方程. 静态球对称黑洞 Dirac 场的辐射能通量可表示为^[21]

$$M_s^{(D)} = \frac{21\pi^2 c k_B^3}{90\varepsilon(\varepsilon + \delta)f_h^2} T^4, \quad (16)$$

式中 c 为光速, $f_h = f(r_h)$. 当取相同截断因子时, 静态球对称黑洞 Dirac 场的统计熵为标量场统计熵的 $7/2$ 倍^[11], 由此可得到静态球对称黑洞标量场的辐射能通量为

$$M_s^{(B)} = \frac{\pi^2 c k_B^3}{15\varepsilon(\varepsilon + h)f_h^2} T^4. \quad (17)$$

将(13), (17)式代入(11)式可得带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞标量场的瞬时辐射能通量

$$M_m^{(B)} = \frac{\pi^2 k_B^3}{45\varepsilon(\varepsilon + \delta)} \left[\frac{3c}{f_h^2} - \frac{2\alpha r_{hv}}{F_h^2} \right] T^4, \quad (18)$$

其中

$$f_h = \left(\frac{\partial \hat{g}'_{00}}{\partial r} \right)_{r=r_h} = -2 \left(\frac{M}{r_h^2} - \frac{E^2 + Q^2}{r_h^3} - \frac{1}{3}\lambda r_h \right), \quad (19)$$

$$F_h = \left(\frac{\partial \hat{g}_{00}}{\partial r} \right)_{r=r_h} = -2 \left[\frac{M}{r_h^2} - \frac{E^2 + Q^2}{r_h^3} - \frac{1}{3}\lambda r_h - a \cos\theta + \frac{2a(E^2 + Q^2)}{r_h^3} \cos\theta - \frac{r_{h\theta}^2}{r_h^3} - \frac{r_{h\varphi}^2}{r_h^3 \sin^2\theta} \right]. \quad (20)$$

令

$$\sigma(v, \theta, \varphi) = \frac{\pi^2 k_B^3}{45\varepsilon(\varepsilon + \delta)} \left[\frac{3c}{f_h^2} - \frac{2\alpha r_{hv}}{F_h^2} \right], \quad (21)$$

则(18)式可变为

$$M_m^{(B)} = \sigma(v, \theta, \varphi) T^4. \quad (22)$$

由(19)–(21)式可见, 当薄膜的厚度 δ 和截断因子 ε 取定后, 带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞视界附近某一时刻沿某一给定方位的瞬时辐射能通量总是正比于该方向上黑洞事件视界温度的 4 次方. 即带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞标量场的热辐射总是满足广义 Stefan-Boltzmann 定律. 得到的广义 Stefan-Boltzmann 系数 σ 是一个随黑洞参量的变化而变化的动比例系数. 由于采用薄膜模型计算的带有电荷、磁荷的静态球对称黑洞的熵与 f_h 有关, 带有电荷、磁荷的一类任意加速黑洞的熵与 F_h

有关, 且 f_h 和 F_h 均与黑洞视界面附近的时空度规有关, 而薄膜模型认为黑洞的熵是来自视界附近的一薄层内量子态的贡献. 可见黑洞视界面附近的时空度规将影响黑洞周围量子场中微观态的分布. 黑洞的 Hawking 辐射与黑洞视界附近的真空涨落有关, 黑洞的质量越大, 带有电荷、磁荷越多, 对黑洞视界附近的真空涨落的影响越显著. 截断因子 ε 和薄膜的厚度 δ 越小, 视界附近的真空涨落越显著, 因而黑洞的质量和所带的电荷、磁荷将对黑洞的热辐射产生影响. 当黑洞参量变化时, σ 值也跟着变化, 故我们把 σ 称为动比例系数. 对于不同参量的黑洞, 导出的广义 Stefan-Boltzmann 系数也不同. 黑洞越复杂, 影响其周围真空涨落的因素越多, 得到的 σ 值越繁杂. 可见黑洞的热辐射不同于黑体的热辐射, 黑洞参量将会影响黑洞的热辐射, 其原因主要在于二者的辐射机理不同.

4. 几种典型动态黑洞的瞬时辐射能通量

4.1. 动态 Vaidya 黑洞的瞬时辐射能通量

考虑 Vaidya 黑洞趋于整体热平衡状态时的时空背景为 Schwarzschild 黑洞, Vaidya 黑洞的视界半径 $r_h = \frac{2M}{1 - 2r_{hv}}$, Schwarzschild 黑洞的视界半径 $r_h = 2M$, 令 $a = r_{h\theta} = r_{h\varphi} = E = Q = \lambda = 0$, 由(18)–(20)式可得 Vaidya 黑洞标量场的瞬时辐射能通量

$$M_v^{(B)} = \frac{4\pi^2 k_B^3 M^2}{45\varepsilon(\varepsilon + \delta)} \left[3c - \frac{2\alpha r_{hv}}{(1 - 2r_{hv})^4} \right] T^4. \quad (23)$$

4.2. 直线加速运动动态黑洞的瞬时辐射能通量

考虑直线加速运动动态黑洞趋于整体热平衡状态时的时空背景为 Schwarzschild 黑洞, Schwarzschild 黑洞的视界半径 $r_h = 2M$, 令 $r_{h\varphi} = E = Q = \lambda = 0$, 由(18)–(20)式可得直线加速运动动态黑洞标量场的瞬时辐射能通量

$$M_m^{(B)} = \frac{\pi^2 k_B^3 M^2}{45\varepsilon(\varepsilon + \delta)} \left[\frac{3c}{4M^2} - \frac{\alpha r_{hv}}{2 \left(\frac{M}{r_h^2} - a \cos\theta - \frac{r_{h\theta}^2}{r_h^2} \right)^2} \right] T^4. \quad (24)$$

4.3. 带有电荷与磁荷的直线加速动态黑洞的瞬时辐射能通量

考虑带有电荷与磁荷的直线加速动态黑洞趋

于整体热平衡状态时的时空背景为带有电荷与磁荷的静态黑洞,令 $r_{h\varphi} = 0$,由(18)—(20)式可得带有电荷与磁荷的直线加速动态黑洞标量场的瞬时辐射能通量

$$M_m^{(B)} = \frac{\pi^2 k_B^3 M^2}{180 \varepsilon (\varepsilon + \delta)} \times \left[\frac{3c}{\left(\frac{M}{r_h^2} - \frac{E^2 + Q^2}{r_h^3} - \frac{1}{3} \lambda r_h \right)} - \frac{\alpha r_{hv}}{\left(\frac{M}{r_h^2} - \frac{E^2 + Q^2}{r_h^3} - \frac{1}{3} \lambda r_h - a \cos \theta + \frac{2a(E^2 + Q^2)}{r_h^3} \cos \theta - \frac{r_{h\theta}^2}{r_h^3} \right)^2} \right] T^4. \quad (25)$$

5. 结 论

利用黑洞视界面附近标量场的熵密度研究黑洞的热辐射,得到了黑洞的热辐射总是满足广义 Stefan-Boltzmann 定律的结论. 得到的广义 Stefan-Boltzmann 系数 σ 不是常量,而是一个动比例系数,黑洞引力场源质量、所带的电荷与磁荷、加速度的大小、视界的变化率均会对 σ 产生影响. 对于不同的黑洞,其参量不同,导出的广义 Stefan-Boltzmann

系数也不同. 当黑洞参量变化时, σ 值也跟着变化,表明黑洞周围的强引力场和电磁场以及黑洞的加速运动情况将影响黑洞的热辐射. 当 $r_{hv} = 0$ 时,动态黑洞的瞬时辐射能通量自然过渡到静态或稳态黑洞的辐射能通量,这与已知理论是自洽的. 薄膜模型虽给出了更多的黑洞热性质,但截断因子不能避免,表明了在求解黑洞熵的问题上采取半经典近似方法的局限性. 本文给出了一种研究黑洞热辐射的新方法.

[1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[3] ' t Hooft G 1985 *Nucl. Phys. B* **256** 727

[4] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5024

[5] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Normal University Press) p70 (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 70 页]

[6] Gao C J, Shen Y G 2003 *Sci. Chin. Ser. G* **33** 561 (in Chinese) [高长军、沈有根 2003 中国科学, G 辑 **33** 561]

[7] Liu W B, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310

[8] Li X, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 463

[9] Zhang J Y, Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2399 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2399]

[10] He H, Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2661 (in Chinese) [贺 晗、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2661]

[11] Li C A, Meng Q M, Su J Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]

[12] Meng Q M, Su J Q, Li C A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1822 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、李传安 2003 物理学报 **52** 1822]

[13] Niu Z F, Liu W B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2102 (in Chinese) [牛振风、刘文彪 2005 物理学报 **54** 2102]

[14] Yang B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2614 (in Chinese) [杨 波 2008 物理学报 **57** 2614]

[15] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2752

[16] Yang S Z, Jiang Q Q, Li H L 2005 *Chin. Phys.* **14** 2411

[17] Ren J, Zhao Z, Gao C J 2006 *Gen. Relativ. Gravit.* **28** 387

[18] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796]

[19] Meng Q M, Su J Q, Jiang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3723 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、蒋继建 2007 物理学报 **56** 3723]

[20] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7463 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、李怀繁 2008 物理学报 **57** 7463]

[21] Meng Q M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2102 (in Chinese) [孟庆苗 2003 物理学报 **52** 2102]

[22] Meng Q M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 471 (in Chinese) [孟庆苗 2005 物理学报 **54** 471]

[23] Meng Q M, Su J Q, Jiang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5077 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、蒋继建 2007 物理学报 **56** 5077]

- [24] Meng Q M, Jiang J J 2008 *Sci. Chin. Ser. G* **38** 171 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建 2008 中国科学, G 辑 **38** 171]
- [25] Meng Q M, Wang S, Jiang J J, Deng D L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2811
- [26] Meng Q M, Jiang J J, Liu J L, Deng D L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 78 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、刘景伦、邓德力 2009 物理学报 **58** 78]
- [27] Jiang J J, Meng Q M, Wang S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 457
- [28] Meng Q M, Jiang J J, Wang S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7486 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、王 帅 2009 物理学报 **58** 7486]
- [29] Wang Y J, Tang Z M 1986 *Sci. Chin. Ser. A* **29** 525 (in Chinese) [王永久、唐智明 1986 中国科学, A 辑 **29** 525]
- [30] Zhu J Y, Zhang J H, Zhao Z 1994 *Acta Astron. Sin.* **35** 246 (in Chinese) [朱建阳、张建华、赵 峥 1994 天文学报 **35** 246]
- [31] Li Z H, Zhao Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1273 (in Chinese) [黎忠恒、赵 峥 1997 物理学报 **46** 1273]

Instantaneous radiation energy flux of the scalar field in arbitrarily accelerating black hole with electric charge and magnetic charge^{*}

Meng Qing -Miao[†] Jiang Ji-Jian Li Chuan-An

(Department of Physics, Heze University, Heze 274015, China)

(Received 1 February 2009; revised manuscript received 15 June 2009)

Abstract

Using entropy density of scalar field near event horizon in an arbitrarily accelerating black hole with electric charge and magnetic charge, we study the law for the thermal radiation of black hole and the instantaneous radiation energy flux is obtained. It is found that the thermal radiation of a black hole always satisfies the generalized Stefan-Boltzmann's law. The proportional coefficient of generalized Stefan-Boltzmann is no longer a constant, and it becomes a dynamic coefficient that is related to the parameters of the black hole. For different dynamic black holes, the obtained generalized Stefan-Boltzmann's dynamic proportional coefficient is different from each other, because the gravitation field and electromagnetic field around black holes is not the same.

Keywords: entropy density, temperature of event horizon, instantaneous radiation energy flux, generalized Stefan-Boltzmann's law

PACC: 0420, 9760L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10773002) and the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Shandong Province, China (Grant No. J07WJ49).

[†] E-mail: mengqingmiao@yahoo.com.cn