

分形理论结合相变动力学的冷表面结霜过程模拟^{*}

刘耀民 刘中良[†] 黄玲艳

(北京工业大学环境与能源工程学院, 教育部传热强化与过程节能重点实验室, 北京 100124)

(2009 年 12 月 4 日收到; 2010 年 2 月 24 日收到修改稿)

运用分形理论并结合相变动力学模拟冷表面上结霜过程. 在相变动力学基础上成功模拟了结霜初始阶段水蒸气在冷表面上凝结、液滴生长及冻结过程, 随后运用分形理论的有限制的扩散凝聚 (diffusion limited aggregation, DLA) 模型模拟了霜晶在冻结液滴表面上的形成生长过程. 模拟结果与实验结果取得良好的一致, 模拟过程中凝结液滴出现及冻结的时间与实验结果几乎完全符合; 液滴冻结之前其表面接触半径随时间变化的模拟结果与实验结果基本一致, 同时模拟霜层厚度与实验测得霜层厚度也非常接近. 研究结果对于探讨分形理论与动力学理论的结合方法具有一定的指导意义, 对于建立一种更合理、精确的结霜模型提供了可靠的理论基础.

关键词: 分形, 相变动力学, 结霜, 模拟

PACC: 6400, 0555, 8220F

1. 引 言

分形论 (fractal theory) 是上世纪 70 年代自然科学上的三大发现之一. 分形的概念是由 Mandelbrot 于 1975 年首次提出, 标志着分形理论的正式诞生^[1]. 分形论作为一种新的理论逐渐渗入到自然科学和社会科学的各个领域, 正在为世界上越来越多的国家所认识掌握. 分形来源于数学, 目前分形理论已具有比较完善的数学理论体系, 但数学的本质是一种工具, 我们应该把数学理论应用到实际的科学研究领域中去, 其中分形理论如何与相关动力学系统结合是分形论发展面临的难题和挑战. 目前已有很多学者在这一领域进行了大量的研究, 比如: 混沌动力学中吸引子与排斥子概念的提出及其理论分析^[2-5], 非平衡态物质的分形凝聚及分形生长特性的研究^[6-9]等. 然而这些理论研究数学性比较强, 缺乏与实际物理过程的有机结合, 因此将分形理论与相关动力学理论进行结合并应用到具体的物理过程中的研究是很有现实意义的.

结霜是热力学中典型的相变过程. Hao 等^[10]、Hou 等^[11] 分别对结霜过程的分形特性进行了研究. Hao 指出在结霜临界状态时冰粒的大小及其在冷表

面上的分布具有分形特征; Hou 等用计盒维数的方法求得充分生长的树枝状霜晶体的分形维数. 戴万田等^[12] 也对结霜初期的分形特性进行了研究. 近期, Liu 等^[13] 建立了基于 DLA 模型的结霜过程分形理论模型来模拟霜晶在冷表面上形成及生长过程, 并取得了良好的结果. 值得注意的是这些研究成果几乎都是纯分形理论的分析和应用而缺乏与相关动力学机理的结合. 本文中, 作者在文献 [13] 提出的分形模型基础上结合相变动力学理论模拟了水蒸气在冷表面上凝结、液滴生长、冻结过程以及后期霜晶在冻结液滴表面上的形成生长过程, 尝试了分形理论与相变动力学理论相结合的新方法, 进一步完善和发展了该模型, 使模拟的结霜过程更加贴近实际. 该研究对于建立更合理、更准确的结霜模型具有重要的理论和实际意义.

2. 实验设备与方法

结霜过程所用实验系统, 如图 1 所示. 有关该系统各组成部分的技术参数说明详见文献 [13]. 实验中利用显微镜从制冷台侧面观察紫铜表面上液滴凝结、生长、冻结过程以及后期霜晶形成生长过程中的形态变化; 用高像素数码相机拍摄通过显微镜

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 50376001), 北京市科学技术委员会北京市科技计划 (批准号: Z07020600290793) 和北京工业大学第七届研究生科技基金 (批准号: ykj-2009-2338) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: liuzl@bjut.edu.cn

观察到的图像,记录不同时刻的结霜过程;用最小刻度为 0.5 mm 的钢尺标定图像尺寸,确定在一定放大倍数下每一像素所表示的实际长度,从而在图像处理软件中可以通过计算像素的数目来测量液滴表面接触半径及霜层厚度.实验过程在自然对流条件下进行,并且维持环境温度和空气湿度相对恒定.实验前,首先将紫铜表面嵌于制冷台中,并调节显微镜物镜与铜板表面的距离,使之聚焦于铜板表面;然后用丙酮将紫铜表面擦拭干净,并将 T 形热电偶连接到数据采集仪用以测量铜板表面温度.在设定冷表面温度之后开启制冷台,实验过程中,用冷光源给实验台照明.

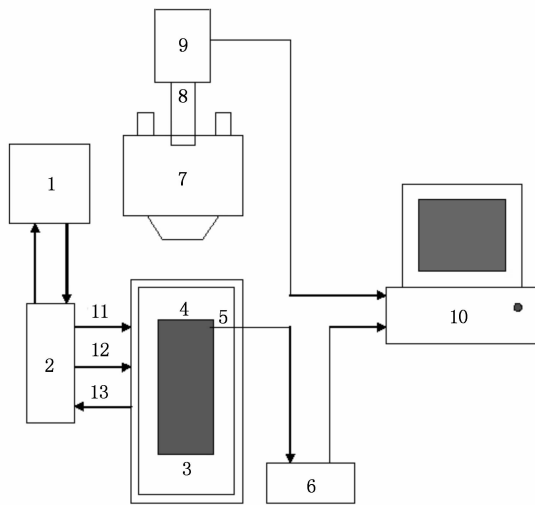


图1 实验系统图 1. 冷却水系统;2. 制冷台电源;3. 紫铜表面;4. 半导体制冷台;5. T形热电偶;6. 数据采集仪;7. 立体显微镜;8. 摄像镜头;9. CCD;10. 采集卡;11. 电缆;12. 冷却水进口;13. 冷却水出口

3. 模型建立与算法设计

结霜是典型的相变过程.空气中含有一定量的水蒸气,通常这些水蒸气处于过热状态,当暴露在空气中的冷表面温度降低时,周围空气的温度也随之降低,对应水蒸气的饱和蒸汽压也会降低,当冷表面温度降低至一定程度时,水蒸气便处于过饱和状态,此时便有水蒸气在冷表面上凝结形成液滴,并不断增长;冷表面的温度进一步降低,液滴内部温度也不断降低,当液滴达到一定过冷度时,便发生冻结,随后在冻结液滴表面上开始长霜^[14].霜晶形成及生长过程我们采用分形理论的 DLA 模型来模拟.自 1981 年 Witten 等^[15]提出 DLA 模型以来,

该模型被广泛应用在晶体的凝聚等分形生长过程领域.同时也有学者对该模型中不同参数设置对模拟结果的影响进行了深入探讨^[16].有关结霜过程分形模型的前期工作文献^[13]的贡献在于把分形理论的 DLA 模型引入到结霜领域,并通过实验手段验证这种模型的可行性;而本研究则是在前期分形模型的基础上结合相变动力学理论更加全面而确切地模拟冷表面上的结霜过程,从而使该模型得到进一步的完善和发展.

3.1. 相变动力学控制方程及参数设置

模拟前首先设定一些基本参数:环境温度 T_∞ ,环境湿度 RH,冷表面温度 T_w ,接触角 θ .

计算当时环境温度 T_∞ 下湿空气中水蒸气饱和蒸汽压 P_s 的经验公式^[17]为

$$\{P_s\}_{\text{kPa}} = \frac{2}{15} \exp\left[18.5916 - \frac{3991.11}{T_\infty + 233.84}\right]. \quad (1)$$

计算相对湿度为 RH 条件下湿空气中实际蒸汽压 P_v 为

$$P_v = P_s \text{RH}. \quad (2)$$

计算实际蒸汽压 P_v 下对应的饱和温度 T_s 为

$$T_s = \frac{3991.11}{18.5916 - \ln(7.5P_v)} - 233.84. \quad (3)$$

设定冷表面的温度 T_{sur} 随时间 τ 变化的温降公式

$$T_{\text{sur}} = -0.06\tau + T_\infty. \quad (4)$$

计算水蒸气均相凝结成核的临界半径 R_c 公式^[18]为

$$R_c = \frac{2\sigma}{ZR_g\rho_w(T_g + 273.15)\ln(s)}, \quad (5)$$

$$\ln(s) = \frac{4746\Delta T}{(T_s + 273.15)(T_g + 273.15)}. \quad (6)$$

(5),(6)式中,水表面张力 $\sigma = 75.6 \times 10^{-3} \text{ N/m}$,水蒸气压缩因子 $Z = 1.110$,水蒸气气体常数 $R_g = 461.5 \text{ J/kgK}$,水密度 $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$,水的三相点温度 $T_g = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, ΔT 为水蒸气发生凝结时的过饱和度和.

当液滴凝结在冷表面上时,由于重力作用和表面特性液滴在冷表面上呈球缺状并存在一定接触角 θ ,其形状如图 2 所示.

图 2 中球缺半径 R 即为凝结液滴半径, r 为凝结液滴与冷表面接触半径,球缺的体积公式为

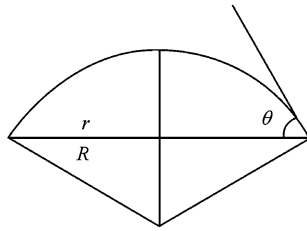


图2 冷表面上凝结液滴形状示意图

$$V = \frac{\pi R^3}{3}(2 - 2\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta), \quad (7)$$

在推导凝结液滴半径 R 及液滴内部温度 T 随时间 τ 变化的公式时做 2 点假设：

1) 水蒸气凝结相变潜热等于液滴表面传热量^[18]

$$\rho_w h_{fg} \pi R^2 k_\theta dR = \alpha 2\pi R^2 (1 - \cos\theta) \times (T_s - T) d\tau, \quad (8)$$

式中 T 为液滴内部温度, $k_\theta = 2 - 2\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta$, 气液相变潜热 $h_{fg} = 2500 \text{ kJ/kg}$, 液滴表面传热系数 $\alpha = 500 \text{ W/m}^2\text{K}$.

2) 液滴内部温度均匀且完全依靠铜板导热冷却

$$\lambda \pi (R \sin\theta)^2 (T - T_w) d\tau = -\rho_w c_p \frac{\pi R^3}{3} k_\theta dT, \quad (9)$$

式中, 水的导热系数 $\lambda = 0.561 \text{ W/mK}$, 水的比热 $c_p = 4.21 \text{ kJ/kgK}$.

根据上述两点假设, 可得凝结液滴半径及液滴内部温度随时间变化的微分方程组

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{2\alpha(1 - \cos\theta)(T_s - T)}{\rho_w h_{fg} k_\theta},$$

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{3\lambda \sin^2\theta(T - T_w)}{\rho_w c_p k_\theta R}. \quad (10)$$

初始条件: $\tau[0] = 0, R[0] = 0.008 \text{ mm}, T[0] = T_s$.

求解(10)式之微分方程组时采用四阶 Runge-Kutta 法, 当液滴过冷度 $(-T) > 5 \text{ }^\circ\text{C}$ 时求解结束 (计算所用水的物性参数取自文献^[19]).

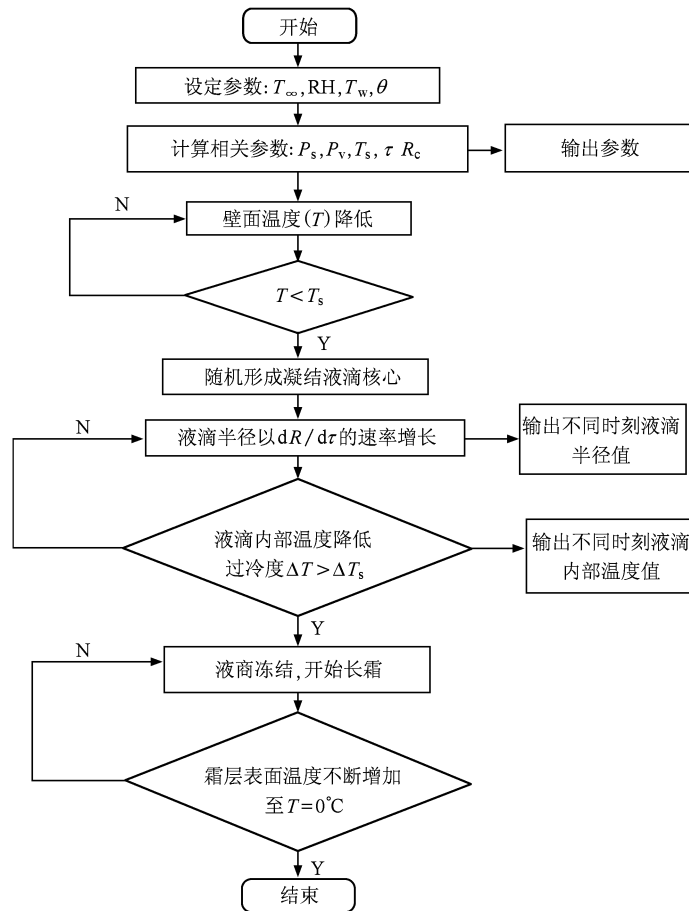


图3 算法流程图

3.2. 分形模型与算法设计

该模型具体的算法设计如下:

1) 在平面上画一条直线 L 来代表紫铜表面.

2) 实时监测冷表面温度, 当冷表面温度达到相应条件下水蒸气的饱和温度时, 在直线 L 上随机产生一定数量的粒子代表凝结核心.

3) 水蒸气不断在已形成的核心上凝结, 凝结液滴半径 R 和内部温度 T 按(10)式所示规律变化, 实时监测 T 的变化, 当 T 达到指定条件时, 凝结液滴停止生长并冻结.

4) 采用 DLA 模型模拟霜晶在冻结液滴表面或冷表面上的生长过程. 在直线 L 上方距离 d ($d > R$) 处设置一条虚拟直线 L' , 在 L' 上产生一随机粒子来代表水蒸气分子, 随机粒子可向左、下、右 3 个方向随机游走.

5) 判断该游走粒子每一步左、下、右邻居中是否含有粒子(在界面处, 则判断该粒子是否遇到直线 L 或凝结液滴), 如果有则被粘住, 如果没有则继续游走. 当随机粒子游走到直线 L 左右两侧范围之外时消失, 同时在 L' 上产生新的随机游走粒子, 并继续按步骤 4 的方式向下游走.

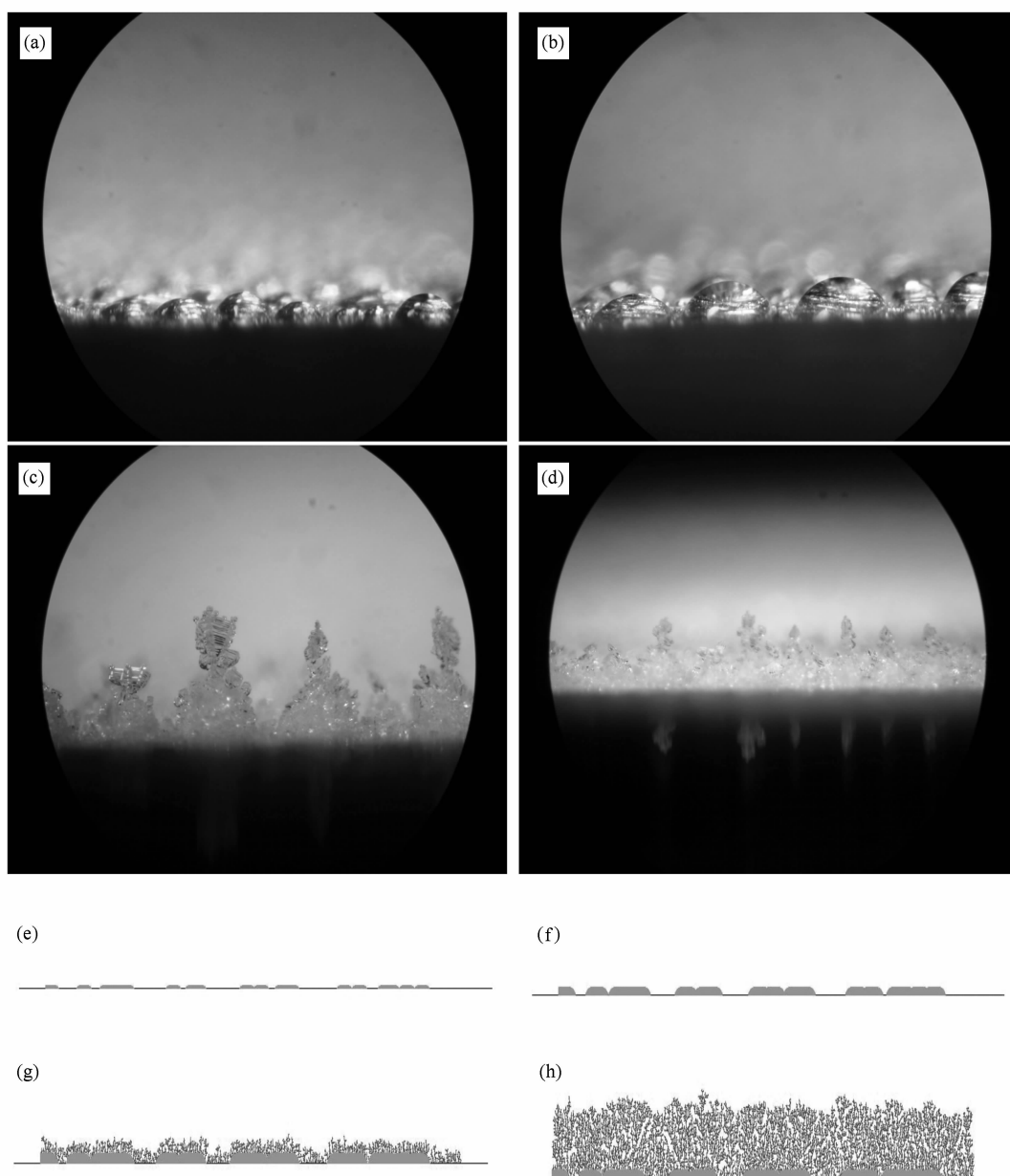


图4 实验与模拟结果(侧面图) (a)实验 $\tau = 110$ s; (b)实验 $\tau = 214$ s; (c)实验 $\tau = 330$ s; (d)实验 $\tau = 1050$ s; (e)模拟 $\tau = 110$ s; (f)模拟 $\tau = 214$ s; (g)模拟 DLA 循环 2000 次; (h)模拟 DLA 循环 20000 次

6) 随着被粘附粒子在直线 L 和冻结液滴表面上的不断增长, 以一定梯度降低 L' 上产生随机粒子的概率, 直至最后不再产生粒子, 此过程用来模拟霜晶生长过程的终止. 降低产生随机粒子概率的具体方法可参考文献[13].

模拟过程中设计了专门的冷表面上结霜过程模拟软件^[20], 该软件算法流程图如图 3 所示.

4. 模拟与实验结果分析

4.1. 模拟图像与实验图像

研究过程首先进行实验, 实验中拍摄到不同时刻紫铜表面上液滴凝结成长及霜晶生长图像, 之后根据实验条件设置相应模拟参数, 利用结霜过程模拟软件进行模拟. 该实验是在环境温度 $T_{\infty} = 28\text{ }^{\circ}\text{C}$, 紫铜表面温度 $T_w = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$, 环境湿度 $\text{RH} = 35\%$ 的条件下进行的, 文献[21]的研究表明去离子水在紫铜表面的接触角 $\theta = 72^{\circ}$. 模拟结霜过程的生长界面为长度为 20 mm 的紫铜表面. 实验与模拟结果如图 4 所示(图 4 中(a)–(c)放大 120 倍, (d)放大 30 倍).

实验过程中, 从紫铜表面的侧面拍摄不同时刻液滴半径变化及霜晶生长图片. 当显微镜视野中出现雾状微小液滴时开始计时, 时间以相片拍摄时记录时间为准, 精确到 1 s. 模拟过程中, 当冷表面温度达到环境条件下蒸汽压对应饱和温度时, 在模拟表面上随机产生一系列凝结核心, 此后液滴开始形成并按(10)式规律不断生长, 当液滴过冷度大于 $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时停止生长并冻结, 随后在冻结液滴表面上长霜. 实验中观察到从冷表面开始降温至有微小液滴形成的时间为 206 s, 而模拟过程中所用的时间为 271 s, 两者相差很小. 从图 4 可以看出, 模拟结果与实验结果在形态上取得良好一致, 模拟结束时霜层厚度为 2.25 mm 与实验中测得霜层厚度 1.8 mm 非常接近.

4.2. 凝结液滴表面接触半径与内部温度随时间的变化

实验过程中, 从正面拍摄不同时刻冷表面上液滴生长图像, 并用标尺标定图像尺寸, 计算每一像素所表示实际长度, 精确至 0.001 mm. 在测量液滴表面接触半径时, 液滴与表面接触面呈近似圆形并

且忽略液滴的合并过程. 在图像中随机选取 5 个液滴, 每一液滴用正方形完全包围起来, 正方形边长的一半即可表示液滴表面接触半径 r_c , 如图 5 所示(图 5 放大 120 倍)由于实验条件所限, 液滴内部温度变化无法测量, 本文只提供模拟结果. 液滴表面接触半径的模拟结果 r_m ($r_m = R\sin\theta$) 与实验结果 r_c 及液滴内部温度 T 的模拟结果随时间 τ 的变化曲线如图 6 所示.

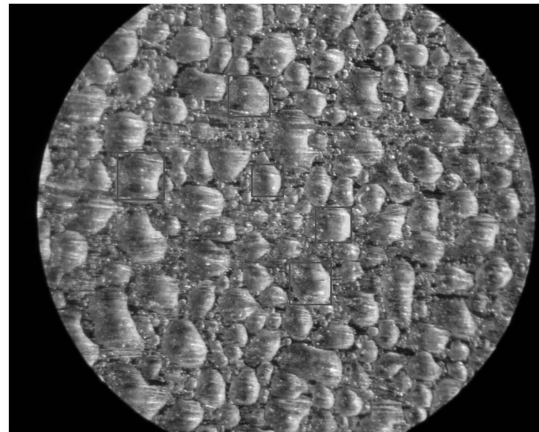


图 5 凝结液滴表面接触半径(正面图, $\tau = 254\text{ s}$)

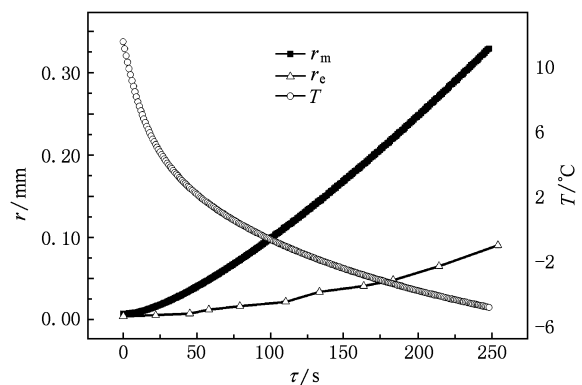


图 6 (r_m, r_c, T)- τ 图

从图 6 中可以看出, 液滴表面接触半径随时间变化的模拟结果与实验结果取得较好的一致, 虽然模拟结果与实验结果存在一定误差, 但在数量级和变化趋势上是完全一致的, 并且在液滴冻结的时间上几乎是完全符合的; 模拟结果显示液滴内部温度在初始一段时间内随时间变化较快, 而后期变化较为缓慢, 这说明液滴内部温度变化速率随液滴半径的增加而逐渐变小.

5. 结 论

在文献 13 提出的在分形理论模型基础上结合相变动力学理论,成功模拟了结霜初期水蒸气在冷表面上凝结、液滴生长、冻结过程以及后期霜晶在冻结液滴表面上形成生长过程,进一步发展和完善了改模型. 模拟结果与实验结果在形态上取得良好的一致. 模拟过程中凝结液滴出现及冻结的时间与实验结果几乎完全符合;液滴表面接触半径随时间变化的模拟结果与实验结果虽然存在一定误差,但在数量级和变化趋势上是完全一致

的;液滴内部温度随时间的变化速率在液滴半径很小时非常大,但随液滴半径的增加而逐渐变小;模拟霜层厚度与实验测得霜层厚度也非常接近. 研究结果充分证实了这种方法的可行性,对于建立更合理、更准确的结霜模型提供了重要的理论和实验基础. 研究过程对于探索分形理论与相关动力学理论之间的有效结合方法具有重要的指导意义. 模拟结果中存在的误差,需要在建立模型和参数设置时综合考虑各种因素,这有待在今后的研究过程中不断完善,同时也需要不同条件下大量的、重复性的实验,以及更有效、更精确的测量手段来验证和修正这种模型.

- [1] Mandelbrot B B 1977 *Fractal: Form, Chance and Dimension* (New York: W. H. Freeman and Co.)
- [2] Barnsley M F, Demko S G 1986 *Chaotic Dynamics and Fractals* (New York: Academic Press)
- [3] Addison D S 1991 *Fractals and Chaos* (London: IOP Publishing Ltd) chap. 3
- [4] Qi D L, Wang Q, and Gu H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 847
- [5] David S, Edward O 2000 *Phys. D* **139** 1
- [6] Zhang J Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1302 (in Chinese) [张济忠 1992 物理学报 **41** 1302]
- [7] Zhang T H, Wu Y G, Sang H B, Li Y L, Zhou G 2001 *Chin. Phys.* **10** 295
- [8] Su Y F, Li P X, Chen P, Xu Z F, Zhang X L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4531 (in Chinese) [苏亚凤、李普选、陈鹏、徐忠锋、张孝林 2009 物理学报 **58** 4531]
- [9] Wu F M, Zhu Q P, Shi J Q, Wu Z Q 2000 *Chin. Phys.* **9** 49
- [10] Hao Y L, Jose I, Yong X T 2005 *J. Southeast Uni.* **35** 149
- [11] Hou P X, Cai L, Yu W P 2007 *J. Appl. Sci.* **25** 193
- [12] Dai W T, Wu X M, Wang W C 2005 *Chinese Society of Engineering Thermophysics Heat and Mass Transfer conference Beijing*, p1398 (in Chinese) [戴万田、吴晓敏、王维城 2005 中国工程热物理学会传热传质学学术会议论文集 北京 第 1398 页]
- [13] Liu Y M, Liu Z L, Huang L Y, Sun J F 2009 *Sci China Ser E-Tech Sci* **52** 3497
- [14] Ismail K A R, Salinas C S 1999 *Int. J. Refrigeration* **22** 425
- [15] Witten T A, Sander L M 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 1400
- [16] Wu F M, Zhu Q P, Shi J Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 542 (in Chinese) [吴峰民、朱启鹏、施建青 1998 物理学报 **47** 542]
- [17] Shen W D, Jiang Z M, Tong J G 2001 *Thermal Dynamics* (3th edition) (Beijing: High Education Press) p343 (in Chinese) [沈维道、蒋智敏、童钧耕 2001 工程热力学(第三版)(北京:高等教育出版社)第 343 页]
- [18] Cai Y N, Wang N N 1985 *Two Phase Wet Steam Flow* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p47—118 (in Chinese) [蔡颐年、王乃宁 1985 湿蒸汽两相流(西安:西安交通大学出版社)第 47—118 页]
- [19] http://www.engineeringtoolbox.com/water-thermal-properties-d_162.html [2009]
- [20] Liu Z L, Liu Y M, Huang L Y Software Copyright: 2009SRBJ7200 [2009-10-01]
- [21] Wang J T 2008 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Beijing University of Technology) [王皆腾 2008 冷表面上结霜现象的理论与实验研究 博士学位论文(北京:北京工业大学)]

Simulation of frost formation process on cold plate based on fractal theory combined with phase change dynamics *

Liu Yao-Min Liu Zhong-Liang[†] Huang Ling-Yan

(*The Education Ministry Key Laboratory of Enhanced Heat Transfer and Energy Conservation, College of Environmental and Energy Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China*)

(Received 4 December 2009; revised manuscript received 24 February 2010)

Abstract

Simulation of frost formation process on cold surface is carried out based on fractal theory combined with phase change dynamics. Before frosting, the phenomena of vapor condensation, droplet growth and frozen on cold plate are successfully simulated based on phase change dynamics and then a fractal simulation of the frost formation and growth process over the frozen droplets is carried out based on diffusion limited aggregation (DLA) model. The simulation results accord well with the experimental results. The time when the condensation droplets are present and frozen on the surface during simulation process is nearly the same as the experimental result. Before the droplets are frozen, the trend that the surface contact radius of the droplet varies with condensation time is similar to actual one. The simulation results also show that the thickness of frost layer is nearly equal to the measured value. By that means, the feasibility of this method of simulating the frost formation is verified and the new attempt made to foster the combination between fractal theory and phase change dynamics is of great significance. This study also provides a foundational theory work for a more reasonable and accurate frosting process model.

Keywords: fractal, phase change dynamics, frost formation, simulation

PACC: 6400, 0555, 8220F

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50376001), the Beijing Science and Technology Plan Project of Beijing Science and Technology Commission (Grant No. Z07020600290793), the 7th Graduate Science and Technology Foundation Program of BJUT (Grant No. ykj-2009-2338).

[†] Corresponding author. E-mail: liuzl@bjut.edu.cn