

# 离散空间上的最小能量框架及其在矩形脉冲信号去噪中的应用研究\*

谢映海<sup>1)2)†</sup> 杨 维<sup>1)2)</sup> 张 玉<sup>2)</sup>

1) (北京邮电大学网络与交换技术国家重点实验室, 北京 100876)

2) (北京交通大学轨道交通控制与安全国家重点实验室, 北京 100044)

(2009 年 11 月 26 日收到; 2010 年 3 月 5 日收到修改稿)

最小能量(小波)框架在信号处理领域有着广泛的应用前景,但目前只能应用在连续信号上.为解决这一问题,给出了离散信号空间上的最小能量框架的定义,并证明了它所具备的一些优良性质.在实际应用中,针对通信领域中的受加性高斯白噪声污染的二进制矩形脉冲信号提出一个新的去噪算法,利用离散空间上一个最小能量框架对接收波形的抽样离散数列进行去噪工作,获得了较好的处理效果.仿真结果表明,如果利用该算法对接收波形进行去噪预处理,则接收机可以降低误码率,在信噪比 4 dB 处获得了 3.4 dB 的性能增益.

**关键词:** 离散信号空间, 最小能量(小波)框架, 二进制矩形脉冲信号, 去噪

**PACC:** 8760J

## 1. 引 言

小波理论在信号处理领域有着广泛的应用<sup>[1-4]</sup>,而文献[5]提出的最小能量(小波)框架既可以利用小波理论对信号进行时频分析和处理,又克服了正交小波不能同时具备光滑性、紧支性、和对称性的缺点,在信号处理领域上有着良好的应用前景.但目前对最小能量框架的研究<sup>[5-8]</sup>主要集中在连续信号空间上,无法应用在离散信号上.从信息论角度出发,对连续信号进行离散化间接处理不可能取得比直接处理更好的结果.但随着计算机技术的飞速发展,以 DSP 为核心的数字信号处理技术在稳定性、可编程性、集成规模等方面都比模拟信号处理有着较大优势,因此连续信号的离散化处理是信号处理领域中的一个总趋势.

为了把相关理论扩展至离散信号处理领域,本文在连续信号空间的最小能量框架基础上,给出了离散信号空间上的最小能量框架的定义,并证明了

它所具备的一些和连续信号空间上的最小能量框架相类似的优良性质.

在实际应用中,如果在均方误差和信噪比意义上对离散信号进行去噪,使用具有一定冗余性的最小能量框架变换算法可以减少误差,提高重构精度,比不具冗余性的变化算法明显具有优势.身为 Parseval 框架族中的一员,它也具备类似于正交基的性质,可以使用同一套系统对信号进行分解和重构,且分解前后保持信号的能量不变性.事实上,它不但可以直接处理离散信号,也可以间接应用于连续信号的去噪问题.

二进制矩形脉冲是数字通信系统中常见的一种发射波形,针对其受加性高斯白噪声污染的接收波形,本文详细地分析了接收波形抽样离散化后的离散二进制矩形数列和加性高斯噪声数列在离散信号空间上的一具体最小能量框架下的各自不同分解特性,据此在阈值去噪算法<sup>[9-11]</sup>基础上提出了一个新的去噪算法.比起传统的直接对连续信号波形进行处理 D4 单小波阈值去噪算法,本算法充分

\* 国家自然科学基金(批准号:60572036),国家高技术研究发展计划(批准号:2007AA01Z259),网络与交换技术国家重点实验室(北京邮电大学)开放基金(批准号:SKLNST-2008-1-11),轨道交通控制与安全国家重点实验室(北京交通大学)自主研究课题(批准号:RCS2009ZT014)资助的课题.

† E-mail: 06121957@bjtu.edu.cn

利用了信号的先验信息,对信号的抽样离散序列进行去噪处理后重构连续信号波形,取得了更好的去噪效果.而系统如果如果在接收机上增加了这样一个信号去噪的预处理环节,可以大幅度降低噪声影响,减少解调的误码率,获得较大的性能增益.

为简化文中的表述,下面给出文中一些符号的说明.

$L^2(\mathbb{R})$  空间代表在实轴上能量有限的连续信号空间,内积定义为  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$ .

$L^2(-\pi, \pi)$  空间代表周期为  $2\pi$ ,且在区间  $[-\pi, \pi]$  上能量有限的信号空间.  $l^2$  空间则表示在整数轴上能量有限的离散信号空间,内积定义为  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{[k]} \overline{g_{[k]}}$ , 数列  $f_{[k]}$  的傅里叶变换函数为  $F(\omega) = \sum_k f_{[k]} e^{jk\omega}$ , 平移算子  $T_n$  定义为  $T_n f_{[k]} = f_{[k-n]}$ , 其中,  $k, n$  为任意整数,  $\mathbb{Z}$  代表整数集.

## 2. $L^2(\mathbb{Z})$ 空间上的最小能量框架的基础知识

本节主要介绍一下框架和  $L^2(\mathbb{R})$  空间的最小能量框架的定义以及一些基本性质,方便对后续的  $l^2$  空间的最小能量框架概念的引出和讨论.

**定义 1** 设  $\{x_j; j \in J\}$  是希尔伯特空间  $H$  上的一组元素,如果对于任意的元素  $f \in H$ , 存在正数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 有

$$\lambda_1 \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, x_j \rangle|^2 \leq \lambda_2 \|f\|^2,$$

则称  $\{x_j; j \in J\}$  是  $H$  上的一个框架,  $\lambda_1, \lambda_2$  分别称为框架的下、上框架界. 而如果  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , 则称框架是一个 Parseval 框架. 而对于一个 Parseval 框架, 有下列通用的分解和重构公式:

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, x_j \rangle x_j, \tag{1}$$

及满足分解前后能量不变性等式

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, x_j \rangle|^2. \tag{2}$$

**定义 2** 设函数  $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  生成了一个嵌套序列空间  $\{V_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ , 嵌套空间定义如下:

$$V_j := \text{clos}_{L^2} \langle \phi_{j,k}(x) : k \in \mathbb{Z} \rangle, \quad j \in \mathbb{Z},$$

满足

$$0 \leftarrow \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \rightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

且

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \text{clos}_{L^2} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}),$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x + 2^{-j}) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z},$$

这里  $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ , 则称函数  $\phi(x)$  为尺度函数且生成了  $L^2(\mathbb{Z})$  空间上的一个多分辨分析.

**定义 3** 设尺度函数  $\phi(x)$  生成了一个如上定义的嵌套空间序列  $\{V_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ , 则对任意的函数  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 如果一个有限集合  $\psi = \{\psi^1, \dots, \psi^N\} \subset L^2(\mathbb{R})$  满足下列等式:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{1,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{0,k} \rangle|^2 \\ &+ \sum_{l=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{0,k}^l \rangle|^2, \end{aligned} \tag{3}$$

或等价地

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{1,k} \rangle \phi_{1,k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{0,k} \rangle \phi_{0,k} \\ &+ \sum_{l=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{0,k}^l \rangle \psi_{0,k}^l, \end{aligned} \tag{4}$$

这里  $\psi_{j,k}^l(x) = 2^{j/2} \psi^l(2^j x - k), l = 1, 2, \dots, N$ . 则称集合  $\psi$  生成了  $L^2(\mathbb{R})$  空间上一个和尺度函数  $\phi$  相联系的最小能量框架.

如果集合  $\psi$  生成了  $L^2(\mathbb{R})$  空间上一个和尺度函数  $\phi(x)$  相联系的最小能量框架, 则尺度方程定义为

$$\phi(x) = \sum_k p_{[k]} \phi(2x - k),$$

尺度符号为

$$P(Z) = 1/2 \sum_k p_{[k]} Z^k,$$

而  $p_{[k]}$  为相应的尺度数列.

框架方程定义为

$$\psi^l(x) = \sum_k q_{[k]}^l \phi(2x - k),$$

框架符号为

$$Q_l(Z) = 1/2 \sum_k q_{[k]}^l Z^k, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

$q_{[k]}^l, l = 1, 2, \dots, N$  为相应的框架数列.

根据尺度符号  $P(Z)$  和框架符号  $Q_l(Z), l = 1, 2, \dots, N$ , 可以建立如下一个  $(N + 1) \times 2$  维矩阵:

$$R(Z) = \begin{bmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ Q_1(Z) & Q_1(-Z) \\ \vdots & \vdots \\ Q_N(Z) & Q_N(-Z) \end{bmatrix}.$$

这里介绍文献[3]中关于最小能量框架的一个最重要性质。

**引理 1** 尺度函数  $\phi(x)$  生成了一个嵌套空间序列  $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  且  $P(Z)$  和  $Q_l(Z)$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) 如上定义, 则下面三个命题相互等价:

1)  $\psi = \{\psi^1, \dots, \psi^N\}$  生成了一个和尺度函数  $\phi$  相联系的最小能量框架。

$$2) \mathbf{R}^\dagger(Z)\mathbf{R}(Z) = \mathbf{I}_2, |Z| = 1. \quad (5)$$

3)  $\alpha_{j,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_{[j-2k]}p_{[l-2k]} + \sum_{i=1}^n q_{[j-2k]}^i q_{[l-2k]}^i) - 2\delta_{j,l}$ , 对所有的  $j, l \in \mathbb{Z}$ , 满足

$$\alpha_{j,l} = 0, \quad (6)$$

其中符号  $\dagger$  表示对矩阵进行共轭转置,  $\delta_{j,l}$  是 Kronecker 符号, 且定义如下:

$$\delta_{j,l} = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$$

### 3. $l^2$ 空间上的最小能量框架

最小能量框架具备许多优良性质, 在信号处理领域有着广泛的应用. 但目前对最小能量框架的研究主要集中在连续信号上, 无法应用于另一大信号类型的离散信号的处理问题上, 因此有必要研究应用于离散信号的  $l^2$  空间上的最小能量框架的相关问题。

观察引理 1 的三个等价命题可知, 最小能量框架的性质除了本身所在的  $L^2(\mathbb{R})$  空间, 在  $L^2(-\pi, \pi)$  空间和  $l^2$  空间上也均有所体现, 即如果在  $L^2(\mathbb{R})$  空间上的一组函数生成了和一个和尺度函数相联系的最小能量框架, 则它们在  $L^2(-\pi, \pi)$  空间上的尺度符号和框架符号要满足(5)式, 而它们在  $l^2$  空间上的尺度数列和框架数列要满足(6)式, 反之亦然。

根据上述一一对应关系, 本文提出如下定义:

**定义 4** 设数列  $p_{[k]} \in l^2$  是一个数字低通滤波器的单位抽样响应, 如果一数列组  $q_{[k]}^i \in l^2: i = 1, 2, \dots, N$  对所有的  $j, l \in \mathbb{Z}$ , 满足下列条件

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_{[j-2k]}p_{[l-2k]} + \sum_{i=1}^n q_{[j-2k]}^i q_{[l-2k]}^i) = 2\delta_{j,l},$$

则称数列组  $q_{[k]}^i: i = 1, 2, \dots, N$  生成了  $l^2$  空间上的一个和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架。

$L^2(\mathbb{R})$  空间上和  $l^2$  空间上的最小能量框架的本质虽然是一样的, 但是前者定义强调信号在框架下的分解系数需满足的条件, 而后者给出的定义则

注重于框架本身数值需满足的条件, 更有利于直观了解其所可能具备的一些性质. 双方一一对应, 因此可以把已构造出来的  $L^2(\mathbb{R})$  空间上的最小能量框架具体函数数值结果<sup>[5-8,12,13]</sup> 推广至  $l^2$  空间上的最小能量框架数列值上。

框架在信号处理领域中用途广泛, 但存在一个很大的缺点, 即对于绝大部分的框架而言, 如果冗余性过大, 它们的分解和重构将不能使用同一套系统, 而当且仅当框架是一个框架界为 1 的 Parseval 框架时才可以类似于正交基, 使用同一套系统对信号进行分解和重构.  $L^2(\mathbb{R})$  空间上的最小能量框架在对连续信号进行处理时具备这个优点<sup>[5]</sup>, 那么  $l^2$  空间上最小能量框架在对离散信号进行处理时是否也具有同样的性质呢? 我们发现可以证明它同样具备这种特性, 为其在离散信号上的应用奠定了坚实的基础。

**定理 1** 如果数列  $q_{[k]}^i: i = 1, 2, \dots, N$  生成了  $l^2$  空间上一个和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架, 则集合  $\{T_n p_{[k]}, T_n q_{[k]}^i, i = 1, 2, \dots, N, n \in \mathbb{Z}\}$  是  $l^2$  空间上的一个框架界为 1 的 Parseval 框架。

这里先介绍文献[10]中一个引理:

**引理 2** 设  $f_{[k]}^i, i = 0, 1, \dots, N$  是  $l^2$  空间上的一个数列组, 则集合  $\{T_n f_{[k]}^i, i = 1, 2, \dots, N, n \in \mathbb{Z}\}$  是  $l^2$  空间上的一个框架当且仅当对任意  $\omega \in [-\pi, \pi]$  而言, 存在  $B \geq A > 0$ , 使得下列不等式成立:

$$A \leq \sum_{i=0}^N |F^i(\omega)|^2 \leq B.$$

另外, 这个框架是一个 Parseval 框架当且仅当  $A = B = 1$ 。

下面给出定理 1 的具体证明过程:

**证明** 如果数列  $q_{[k]}^i: i = 1, 2, \dots, N$  生成了  $l^2$  空间上一个和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架时, 则根据定义 4 和引理 1 中的等价命题可知有

$$\left| \sum_k p_{[k]} e^{ik\omega} \right|^2 + \sum_{i=1}^N \left| \sum_k q_{[k]}^i e^{ik\omega} \right|^2 = 1.$$

再根据引理 2 的内容可知定理 1 成立. 证毕。

因此离散空间上的最小能量框架具备 Parseval 框架的通用的分解和重构公式, 具体形式如下:

**定理 2** 如果数列  $q_{[k]}^i: i = 1, 2, \dots, N$  生成了  $l^2$  空间上一个和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架, 则对任意数列  $f_{[k]} \in l^2$ , 有如下分解和重构算法:

$$f_{[k]} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f_{[k]}, p_{[k-n]} \rangle p_{[k-n]}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f_{[k]}, p_{[k-n]}^i \rangle q_{[k-n]}^i, n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

及满足分解前后的能量不变性等式

$$f_{[k]} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} | \langle f_{[k]}, p_{[k-n]} \rangle |^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} | \langle f_{[k]}, p_{[k-n]}^i \rangle |^2, n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

对于一般框架甚至是冗余性较小的 Parseval 框架而言,由于其不是一个线性无关族,因此可能存在多种分解和重构公式.  $L^2(\mathbb{R})$  空间上的最小能量框架的定义由于是跟嵌套空间  $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  联系在一起的,在信号分解和重构过程中可以使用小波理论中经典的塔式算法. 由于和在  $L^2(\mathbb{R})$  空间上本质是一样的,我们发现在  $l^2$  空间上的最小能量框架也可以使用类似算法,具体形式如下:

**定理 3** 如果数列  $q_{[k]}^i; i = 1, 2, \dots, N$  生成了  $l^2$  空间上一个和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架,则对任意数列  $c_{[j+1,k]} \in l^2$ , 有分解算法如下:

$$c_{[j,l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k p_{[k-2l]} c_{[j+1,k]}, \\ d_{[j,l]}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2l]}^i c_{[j+1,k]}, \\ (i = 1, 2, \dots, N). \quad (9)$$

其重构算法如下:

$$c_{[j+1,l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \{ p_{[l-2k]} c_{[j,k]} + \sum_{i=1}^n q_{[l-2k]}^i d_{[j,k]}^i \}. \quad (10)$$

及满足分解前后的能量不变性等式

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{[j+1,k]}|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{[j,l]}|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l \in \mathbb{Z}} |d_{[j,l]}^i|^2. \quad (11)$$

(注:由于可以利用分解公式对数列进行逐层的分解,因此这里数列  $c_{[j+1,k]}$  的下标第一个表示层数,第二个表示整数轴.)

**证明** 根据尺度函数的定义可知,对任意数列  $c_{[j+1,k]} \in l^2$ , 一定存在函数  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 使得  $c_{[j+1,k]} = \langle f(x), \phi_{j+1,k}(x) \rangle$ .

根据尺度方程和框架方程有

$$\phi_{j,l}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k p_{[k-2l]} \phi_{j+1,k}(x), \quad (12)$$

$$\psi_{j,l}^i(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2l]}^i \phi_{j+1,k}(x), \quad (13)$$

$$\phi_{j+1,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \{ p_{[k-2l]} \phi_{j,l}(x) + \sum_{i=1}^N q_{[k-2l]}^i \psi_{j,l}^i(x) \}. \quad (14)$$

分别使用函数  $f(x)$  对(12),(13),(14)式的左右两端同时进行内积可得

$$c_{[j,l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k p_{[k-2l]} c_{[j+1,k]}, \\ d_{[j,l]}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2l]}^i c_{[j+1,k]}, \\ c_{[j+1,l]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \{ p_{[l-2k]} c_{[j,k]} + \sum_{i=1}^n q_{[l-2k]}^i d_{[j,k]}^i \}, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

其中令  $c_{[j,l]} = \langle f(x), \phi_{j,l}(x) \rangle$ ,  $d_{[j,l]}^i = \langle f(x), \psi_{j,l}^i(x) \rangle$ .

而根据(3)式对  $L^2(\mathbb{R})$  空间上的最小能量框架的定义,(11)式显然也成立. 证毕.

比起其它的 Parseval 框架,离散空间上的最小能量框架的一个主要优点就在于它具备定理 3 中的塔式分解和重构算法. 从时域上看,虽然定义在整数轴上的数列  $p_{[k]}$  不能像尺度函数  $\phi(x)$  那样构造一个嵌套空间,但使用(9)式的分解公式时仍然可以看做是对离散信号在不同尺度下进行逐层分解,通过分析各层的分解子信号的性质来研究信号本身整体和局部的一些特征;从频域上看,由于存在明确的重构公式,和数列  $p_{[k]}$  相联系的最小能量框架可以看做是一个可准确重建,由  $N+1$  个单位抽样响应分别为  $p_{[k]}$  和  $q_{[k]}^i; i = 1, 2, \dots, N$  的数字滤波器组成的滤波器组,可以从多个不同的频带上对信号的频谱信息进行分析处理.

在实际应用中,由于存在连续信号和尺度函数所生成的空间不匹配的问题,因此应用  $L^2(\mathbb{R})$  空间上的最小能量框架对信号进行分解前需要对连续信号做空间  $V_j$  的逼近处理<sup>[9,14]</sup>,因此会带来一定误差.  $l^2$  空间上最小能量框架的另一个优点在于它不但能直接应用于离散信号,而且还可以间接对连续信号进行处理. 特别是在一些特殊情况下,如通信领域中的接收波形的处理问题,由于其发射波形的特殊性,如果利用  $l^2$  空间上最小能量框架对其抽样离散信号进行处理后再重构,由于能够更直接地融入发射波形的先验信息,因此可以克服空间不匹配问题,取得较好的处理效果.

#### 4. 最小能量框架在接收机上的去噪应用

信号在传输过程中不可避免的会受到各种噪声的污染,因此信号去噪一直是信号处理领域中的一个研究热点.  $l^2$  空间上最小能量框架去噪的理论基础就是通过分析原始信号数列和噪声数列在框架下的分解系数的不同统计特征,根据这些特征对其分解系数进行修正后重构信号,从而去除噪声的部分影响,尽量恢复原始信号. 由于具备一定的冗余性,  $l^2$  空间上最小能量框架可以把被污染的信号分解到多个子带上,原始信号和噪声分离更加彻底,因此可以最大化去除噪声影响.

##### 4.1. 二进制矩形脉冲信号的去噪算法

在一个数字通信系统中,假定发射器采用的是矩形脉冲来传输信息,其在传输过程中受到了加性高斯白噪声的影响,不失一般性,这里仅仅考虑不需载波的基带传输方式.

对于二进制数字基带脉冲幅度调制(PAM)信号而言,接收机接收到的受加性高斯白噪声影响的信号波形为

$$r(t) = s(t) + u(t),$$

其中,  $s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$ ,  $a_n \in \{+A, -A\}$ , 脉冲波形  $g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_s, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$   $u(t)$  是功率密度

谱为  $\frac{N_0}{2}$  的高斯白噪声的样本函数,  $A$  是矩形脉冲的幅度,  $T_s$  是每个脉冲的持续时间. 如果接收机直接对这个接收波形进行解调检测,则错误率  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2\xi}{N_0}}\right)$ , 其中,  $\xi$  是每个矩形脉冲波形的发射能

量,而  $Q$  函数定义为  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt, x \geq 0$ .

可见在发射功率不变的情况,如果在数字解调器前增加一个预处理环节,对接收信号进行去噪处理,则可以提高解调器的输入信号的信噪比,从而降低错误率,提高通信质量.

虽然接收信号受到了加性高斯白噪声的污染,其在整个频率范围内都具有平坦的功率密度谱,但假定接收端的信号和噪声通过了一个理想的,带宽足够大的带通滤波器,使得接收信号是一个带限随

机信号. 因此接收信号可以用一个非唯一,抽样速率不低于其奈奎斯特速率的数字序列来表示. 在发射矩形脉冲的前提下,接收信号抽样离散化后等价于一个受加性高斯噪声影响的离散二进制矩形数列.

利用最小能量框架对数列进行分解,其本质上也是一次信号滤波过程,因此滤波器如果具有线性相位,重构过程就可以避免失真. 出于这种考虑,本文选用了文献[5]中的这样一组数据

$$\begin{aligned} p_{[k]} &= \left[ \frac{1}{2}, \dot{,} \frac{1}{2} \right], \\ q_{[k]}^1 &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{,} \frac{-\sqrt{2}}{2} \right], \\ q_{[k]}^2 &= \left[ \frac{-1}{2}, \dot{,} \frac{-1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

(注:数列上的那个黑点表示零点位置.)

下面开始分析离散二进制矩形数列和高斯噪声数列在(15)式下的各自分解系数特性. 首先随机产生一个 100 段,每段长度为 5 个点,幅度为 1 的离散二进制矩形信号  $s_{[n]}$ , 利用上述数列并根据(9)式的分解算法对其进行分解,产生 3 个点数为 250 的子数列,其中  $c_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{500} p_{[k-2n]} s_{[k]}$ ,  $d_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{500} q_{[k-2n]}^1 s_{[k]}$ ,  $e_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{500} q_{[k-2n]}^2 s_{[k]}$ , 具体情况如图 1 所示.

接着产生一个长度为 500,均值为 0,方差为 1 的高斯噪声序列  $u_{[n]}$ , 同样对其进行分解,也产生了 3 个点数为 250 的子数列,即  $c1_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k P_{[k-2n]} u_{[k]}$ ,  $d1_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2n]}^1 u_{[k]}$ ,  $e1_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_{[k-2n]}^2 u_{[k]}$ , 具体情况如图 2 所示.

阈值去噪是一种常用的去噪思想,信号和噪声进行一些变换后各自的一些指标会产生明显不同的统计特征,针对这些特征设定一个合理的阈值,对阈值上下两部分数据采用不同的处理手段,尽量保持原始信号成分,去除噪声成分,最后根据重构算法进行重构,完成去噪过程. 对于加性高斯白噪声,有如下的硬阈值函数<sup>[9-11]</sup>:

$$\eta^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \varepsilon, \\ x, & \text{其他,} \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\varepsilon$  是阈值,  $x$  是分解系数.

比较图 1 和图 2,可以清楚看出对  $s_{[n]}$  而言,其

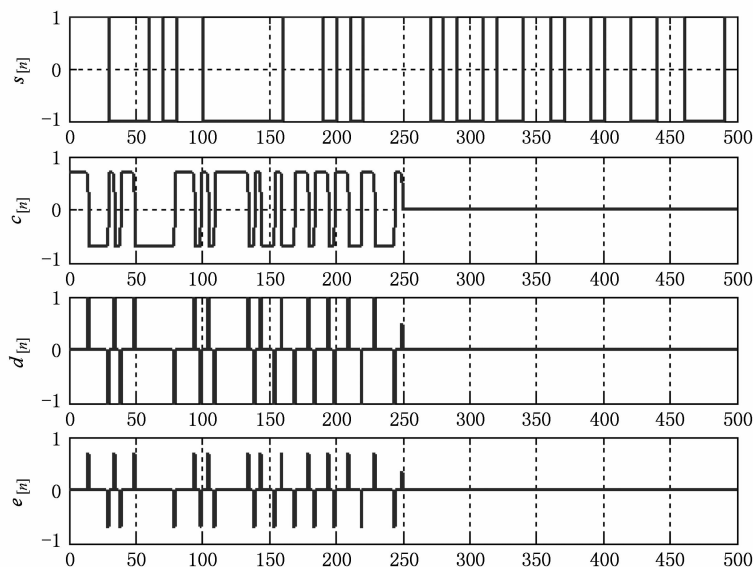


图 1 二进制离散矩形数列分解图

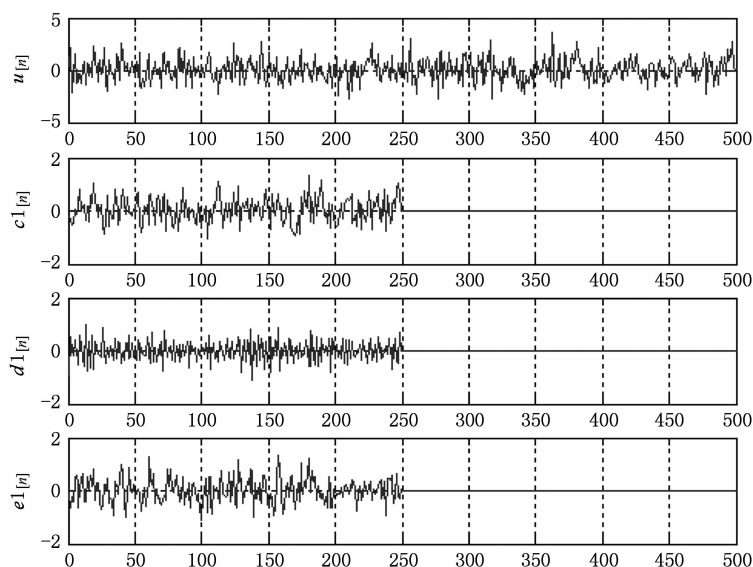


图 2 高斯噪声数列分解图

子数列  $c_{[n]}$  基本反映  $s_{[n]}$  的基本细节部分, 承载了信号的大部分信息和能量, 而  $d_{[n]}$ ,  $e_{[n]}$  则都代表  $s_{[n]}$  的高频部分, 即在信号的突变处才有值, 而在其他位置全部为 0; 对高斯噪声数列  $u_{[n]}$  而言, 由于其各点之间的不相关性, 3 个子数列的值仍然都表现出高斯噪声的统计特征, 且噪声信号的能量均匀的分布在三个子数列上. 而且在这个框架下, 其他均值为 0, 任意方差的高斯噪声序列的分解子数列也均表现出了这种统计特性. 基于图 1 和图 2 的结果, 在制定去噪算法时需要针对不同的子数列采用了不同的策略, 以尽量保持原始信号成分和最大化地

去除噪声影响, 达到最佳的去噪效果.

根据上述分析, 我们在数字通信系统的接收机端增加了一个信号去噪的预处理环节, 在解调器对受加性高斯白噪声污染的二进制矩形脉冲信号进行解调之前进行信号去噪的预处理工作, 其相关过程具体描述如下:

1) 原始设定: 脉冲宽度为  $T_s$ , 发射功率恒定, 即每个矩形脉冲的能量相同, 且脉冲波形在信道传输过程中受到加性高斯白噪声的影响. 对接收机接收到波形  $r(t)$  每  $100 T_s$  的长度进行一次满足奈奎斯特抽样条件的等距抽样, 抽样  $100 T$  次 ( $T$  大小取决

于  $T_s$ ),不妨设抽样序列为  $r_{[n]} = s_{[n]} + u_{[n]}$ , 其中  $s_{[n]}$  是个幅值为 1, 每段点数为  $T$ , 总序列点数为  $100T$  的二进制离散矩形信号, 而  $u_{[n]}$  是一个长度为  $100T$ , 均值为 0, 方差为  $\delta^2$  高斯噪声序列.

2) 信号预处理环节:

(1) 分解:

第一层分解, 令

$$c_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100T} p_{[k-2n]} x_{[k]},$$

$$d_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100T} q_{[k-2n]}^1 x_{[k]},$$

$$e_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100T} q_{[k-2n]}^2 x_{[k]}.$$

第二层分解, 令

$$cc_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100T} p_{[k-2n]} c_{[k]},$$

$$dc_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100T} q_{[k-2n]}^1 c_{[k]},$$

$$ec_{[n]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100T} q_{[k-2n]}^2 c_{[k]}.$$

其中  $p_{[k]}, q_{[k]}^1, q_{[k]}^2$  数值如(15) 式所示.

(2) 去噪 对数列  $dc_{[n]}, ec_{[n]}$  而言, 采用(16)

式的硬阈值函数, 设定其阈值大小为  $\frac{\delta}{3}$ , 即凡是绝对值小于这个阈值的点全部置零, 得到两个新数列  $dc'_{[n]}, ec'_{[n]}$ . 而对于  $d_{[n]}, e_{[n]}$  而言, 除了  $n = iT - 1, i = 1, 2, \dots, 100$  这些点, 把其他所有的点全部置零, 得到两个新数列  $d'_{[n]}, e'_{[n]}$ .

(3) 重构 利用重构公式(10)对数列  $cc_{[n]}, dc'_{[n]}, ec'_{[n]}$  进行重构得到一个新数列  $c'_{[n]}$ , 再利用

重构公式对数列  $c'_{[n]}, d'_{[n]}, e'_{[n]}$  进行重构得到去噪后的新信号  $\hat{r}_{[n]}$ , 根据抽样定理的重构公式, 使用序列  $\hat{r}_{[n]}$  进行重构且得到信号波形  $\hat{r}(t)$ .

3) 解调: 对处理后的波形  $\hat{r}(t)$  进行解调检测, 输出判决结果.

4.2. 仿真结果

衡量两个信号之间接近程度和去噪效果的最通用的一个指标就是均方误差 (MSE), 其定义如下:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\hat{s}_{[n]} - s_{[n]}|^2 \quad (\text{离散信号}),$$

$$MSE = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |\hat{s}(t) - s(t)|^2 dt \quad (\text{连续信号}),$$

其中,  $\hat{s}_{[n]}$  或  $\hat{s}(t)$  代表新信号,  $s_{[n]}$  或  $s(t)$  代表原始信号.

上小节给出的去噪算法充分利用了信号的先验信息, 分析了原始信号和噪声的分解子序列的各自统计特性, 去噪时通过使用合适的阈值和直接归零的方法, 最大化去除噪声对信号影响. 这里通过计算机仿真来验证这套算法的具体去噪效果, 不失一般性, 假定发射信号  $s(t)$  的矩形脉冲宽度为 1 单位时间, 幅度也为 1, 在传输过程中受功率密度谱为  $\delta^2$  的高斯白噪声的污染, 对接收信号  $r(t)$  每间隔 100 单位时间进行均匀抽样, 抽样间隔为 0.01, 得到一个抽样数列  $r_{[n]}, n = 1, 2, \dots, 10000$ .

利用文献[9,14]中的 D4 小波对连续信号  $r(t)$  直接进行去噪处理, 得到新信号  $r1(t)$ ; 利用上小节给出的去噪算法得到新信号  $r2(t)$ , 计算并比较  $r(t), r1(t), r2(t)$  这 3 个信号和发射信号  $s(t)$  之间的 MSE 指标, 具体结果如图 3 所示.

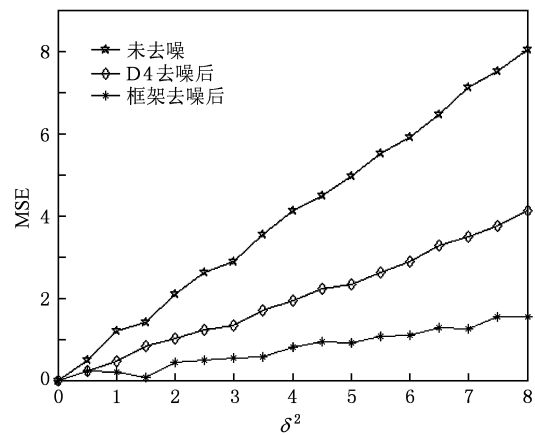


图 3 3 个信号和发射信号  $s(t)$  之间的 MSE 指标

由于具备一定的冗余性,  $l^2$  空间上最小能量框架可以把被污染的信号分解到多个子带上, 原始信号和噪声分离更加彻底, 因此可以最大化去除噪声影响. 观察图 3 的结果, 可以清楚看出对于受到加性高斯白噪声影响的二进制矩形脉冲信号, 本文提出的算法的去噪效果要远优于常用的 D4 小波去噪算法, 不管噪声功率密度谱的大小, 都可以使去噪后的信号的 MSE 指标下降 70%—80% 左右, 即去噪后的信号在 MSE 意义上更加接近原始发射信号.

使用原解调算法分别对原接收信号和应用上述两种去噪算法对接收信号进行预处理后得到的新信号进行解调, 3 个信号的误码率和信噪比之间的关系曲线如图 4 所示.

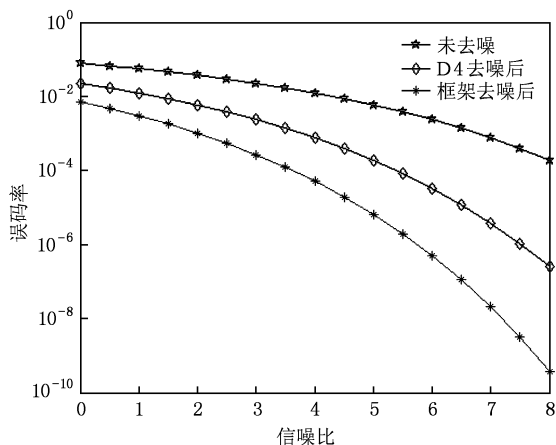


图4 误码率比较

观察图4的结果,可以清楚看出由于接收机增加了一个简单的预处理环节,去噪后的接收信号在MSE意义上要比未去噪信号更加接近原始发射的脉冲波形,减少了噪声对解调工作的影响,误码率

大大减低.使用D4单小波阈值去噪算法在信噪比4 dB处会获得2.2 dB的性能增益,而使用本文的去噪算法效果更好,可以获得3.4 dB左右的性能增益.

## 5. 结 论

本文首次给出了离散信号空间上的最小能量框架的具体定义并证明了它所具备的一些性质,完善了最小能量框架的理论体系,解决了最小能量框架不能对离散信号进行分析处理的问题.在具体应用上,本文研究了受加性高斯白噪声污染的二进制矩形脉冲信号的去噪算法,通过在接收机端增加一个去噪预处理环节来改善数字通信系统的性能,获得了一定的性能增益.这些工作和仿真结果表明离散信号空间上的最小能量框架在信号去噪领域上具备很好的应用前景,值得做进一步的深入研究.

- [1] Chen S G, Ji S Y, Liu W S, Song Z Y, Pang L J 2009 *Acta Phy. Sin.* **58** 3041 (in Chinese) [陈世国、吉世印、刘万松、宋泽运、庞礼军 2009 物理学报 **58** 3041]
- [2] Zhao W S, He Y G, 2009 *Acta Phy. Sin.* **58** 0843 (in Chinese) [赵文山、何怡刚 2009 物理学报 **58** 843]
- [3] Deng Y Q, Cao S Y, Yu J, Xu T, Wang Q Y, Zhang Z G 2009 *Acta Phy. Sin.* **58** 7017 (in Chinese) [邓玉强、曹世英、于靖、徐涛、王清月、张志刚 2009 物理学报 **58** 7017]
- [4] Liu B, Peng J X, 2008 *Sci. China Ser. F* **38** 2273 (in Chinese) [刘斌彭、嘉雄 2008 中国科学 F 辑 **38** 2273]
- [5] Chui C K, He W 2000 *Appl. Comp. Harm. Anal.* **8** 293
- [6] Peng L Z, Wang H H 2003 *Sci. China Ser. F* **46** 445
- [7] Gao X P, Zhou S W 2005 *Sci. China Ser. F* **48** 771
- [8] Gao X P, Cao C H, 2009 *Sci. China Ser. F* **39** 411 (in Chinese) [高协平、曹春红 2009 中国科学 F 辑 **39** 441]
- [9] Mallat S 2003 *A Wavelet Tour of Signal Processing 2* (Beijing: Machinery Industry Press) P241 (in Chinese) [马拉特 2003 信号处理的小波导引 2 (北京:机械工业出版社)第 241 页]
- [10] Shen L X, Manos Papadakis, Ioannis A 2006 *IEEE Trans. Ima. Proc.* **15** 1177
- [11] D Donoho 1995 *IEEE Trans. Inf. Theory* **3** 613
- [12] Petukhov A 2003 *Constr. Approx.* **19** 309
- [13] Abdelnour A F, Selesnick I W 2005 *IEEE Trans. Sig. Proc.* **53** 231
- [14] Chui C K 1997 *An Introduction To Wavelets* (Xian: Jiaotong University Press) P189 (in Chinese) [崔锦泰著 小波分析导论 (西安:交通大学出版社)第 189 页]

# Minimum-energy frame of discrete signal space and its de-noising application to rectangular pulse signal<sup>\*</sup>

Xie Ying-Hai<sup>1)2)†</sup> Yang Wei<sup>1)2)</sup> Zhang Yu<sup>2)</sup>

1) (State Key Laboratory of Networking and Switching Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

2) (State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

(Received 26 November 2009; revised manuscript received 5 March 2010)

## Abstract

The minimum-energy (wavelet) frame has an extensive application prospect in the field of signal processing, but now it can be applied only to continuous signals. In order to solve the problem, we define a minimum-energy frame in the discrete signal space, and then prove that it has some good properties. In the actual application, we propose a new de-noising algorithm which is special for the binary rectangular pulse signal polluted by the additive gaussian noise and obtain better processing effect by using a minimum-energy frame in the discrete signal space to denoise the sampled sequence of receiving waveform. The simulation results show that if a pre-processing link is used to denoise the receiving waveform through using the algorithm, the receiver can reduce the bit error rate and achieve a 3.4 dB performance gain at 4 dB signal-to-noise ratio.

**Keywords:** discrete signal space, minimum-energy (wavelet) frame, binary rectangular pulse, de-noising

**PACC:** 8760J

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60572036), the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2007AA01Z259), the Open Foundation of State Key Laboratory of Networking and Switching Technology (Beijing University of Posts and Telecommunications) (Grant No. SKLNST-2008-1-11), and the State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety Beijing Jiaotong University (Grant No. RCS2009ZT014).

<sup>†</sup> E-mail: 06121957@bjtu.edu.cn