

# 基于循环平稳信号相干统计量的脉冲星 周期估计新方法\*

李建勋<sup>†</sup> 柯熙政

(西安理工大学, 自动化与信息工程学院, 西安 710048)

(2010 年 4 月 3 日收到; 2010 年 4 月 20 日收到修改稿)

讨论了脉冲星的周期估计在脉冲星搜索中的重要性. 将脉冲星观测信号建模为二阶循环平稳模型, 仿真验证了其合理性. 在此基础上, 提出了一种基于双谱相干统计量的周期估计新方法, 并给出了稳健有效的周期搜索策略以消除其对数据量的敏感性. 分别对单脉冲脉冲星 (PSR J0437-4715) 的实测信号和双脉冲脉冲星 (PSR B1821-24) 的仿真信号进行了周期估计, 实验表明, 相比较于常用的傅里叶频谱法, 该时域方法直观、有效, 在低信噪比情况下仍具有很好的性能, 且适用于非连续观测数据. 尽管方法运算量较大, 但仍然可为微弱脉冲星的周期估计提供有力参考.

**关键词:** 脉冲星, 脉冲星搜索, 周期估计, 循环平稳信号

**PACC:** 9760G, 9575M, 9570

## 1. 引 言

脉冲星属于高速旋转的致密中子星, 其自转周期非常稳定, 用于计时和导航的潜力巨大<sup>[1,2]</sup>. 大部分的脉冲星具有射电辐射, 一部分在红外、可见光、紫外、X 射线和  $\gamma$  射线频段<sup>[3]</sup> 可探测到. 由于脉冲星的磁极轴与自转轴有一夹角, 当磁极的辐射波束随脉冲星自转扫过探测器时, 会获得一系列周期稳定的脉冲信号. 脉冲定时信号的到达时刻 TOA (time of arrival) 含有丰富的天文信息, 如脉冲星的运动轨道、脉冲星质量、内部结构、引力波效应、星际介质特性等<sup>[4-6]</sup>. 然而, 由于射电脉冲星信号到达地面接收机的能量较弱, 测量并估计到达时刻需要先对信号按视周期进行能量累积, 得到高信噪比的平均脉冲轮廓<sup>[7]</sup>. 因此, 对于搜寻或观测未知的、没有任何先验信息的脉冲星, 获取脉冲周期是首要任务和核心步骤, 一旦得到周期的近似值, 可通过观测数据进行模型拟合, 估计出更精确的脉冲周期以及其他物理参数. 基于此, 本文旨在研究微弱脉冲星信号的周期估计新途径.

若不考虑双星系统, 周期识别主要有时域的快速折叠算法和频域的傅里叶频谱法, 其中利用傅里叶变换进行周期搜索更为成熟 (如图 1 所示). 需要说明的是, 脉冲周期是和色散量 (dispersion measure, DM) 往往是一起来估计的. 由于脉冲星的周期辐射脉冲具有一定脉宽, 其频谱具有一系列的谐波成分. 为了充分利用这一特点, 人们采用非相干谐波累加法 (incoherent harmonic summing)<sup>[8]</sup> 来提高频谱的信噪比. 一般通过一系列 DM 的试探值, 得到相应的消色散后的时间序列, 然后进行 FFT 以及谐波累积处理, 其次, 把频域上估计的信噪比与阈值进行判别, 就得到一系列可能的候选周期, 然后分析信噪比的大小以及相同候选周期出现的次数, 那些具有最大信噪比或 (以及) 出现次数较多的候选周期所对应的 DM 则可作为其真值的近似, 最后以选定的 DM 和周期估计值进行原始观测信号的消色散和折叠累加, 得到脉冲信号. 可以看到, 周期搜索是一个工程性很强的工作, 有时需要人工的反复分析和检验, 步骤较复杂. 对于 X 射线脉冲星, 色散可以忽略.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61004122), 陕西省自然科学基金 (批准号: 2010JQ8002) 和校高层次人才科研基金 (批准号: 105-210919) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: Ljx088@xaut.edu.cn

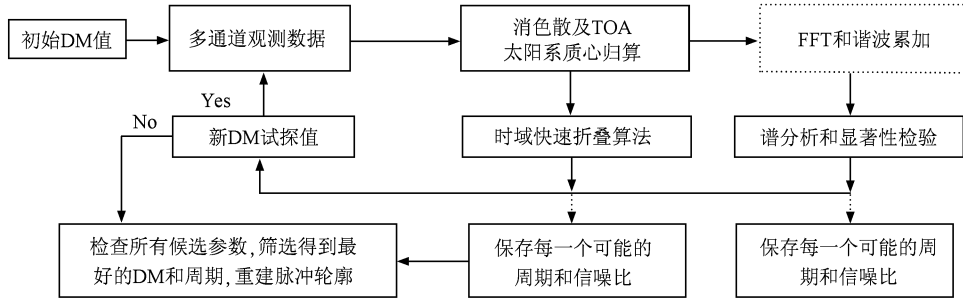


图1 脉冲星搜索的主要步骤

考虑到脉冲星稳定的周期辐射特点,忽略掉其有时发生的闪烁、爆发现象以及在传播过程中受到星际介质的色散影响,我们将观测信号建模为循环平稳过程.基于此模型,本文重点探索脉冲星搜索过程中的频域核心算法(对应图1的虚框部分),以期有效提高脉冲星搜索性能.因此可先假设DM已知(搜索DM的方案见文献[9]),将同时估计DM和周期的二维搜索问题简化为一维估计问题,即研究对象定义为消色散后的时间序列.需要说明的是,我们假设观测是在相对较短的连续时间内进行,则周期变化率参数可以忽略;另外,只考虑脉冲辐射为单脉冲和双脉冲两种类型,不考虑巨脉冲(giant-pulse)和零脉冲(nulling pulse)存在的情况.

## 2. 脉冲星信号的循环平稳模型

### 2.1. 循环平稳模型

循环平稳信号是实际工程中经常要遇到的一类特殊非平稳过程,如声场信号、机械信号等<sup>[10,11]</sup>.由于脉冲星稳定的自转特性,其辐射信号的统计特征应该周期变化,脉冲信号 $X(t)$ 可认为是具有循环周期 $P$ 的二阶循环平稳随机过程,即存在一个最小的正整数 $P$ ,使其对于每一个 $t, s, X(t)$ 的均值和自相关满足

$$\begin{aligned} m(t) &= E\{X(t)\} = m(t+P); \\ R_x(t, s) &= \text{cov}(X(t), X(s)) \\ &= R_x(t+P, s+P), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,相关函数 $R_x(t, s) = R_x(t, t+\tau)$ 可记为 $R_x(t; \tau)$ .相应的, $X(t)$ 有如下两种谱描述:

#### A) 循环方差和循环谱

若 $R_x(t; \tau)$ 对于每一个固定的 $\tau$ 是关于 $t$ 以 $P$ 为周期的周期序列,则其离散傅里叶变换为

$$C_x(\alpha; \tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} R_x(t; \tau) e^{-j\alpha t}, \quad (2)$$

其中, $\alpha = 2\pi k/P$ ,对固定的 $\alpha, C_x(\alpha; \tau)$ 与 $\tau$ 有关,称为循环方差,其对变量 $\tau$ 的离散傅里叶变换(DTFT),即 $X(t)$ 的循环谱为

$$S_x(\alpha; \omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_x(\alpha; \tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (3)$$

#### B) 双谱

双谱 $S_x(\nu, \omega)$ 定义为相关函数 $R_x(t, s)$ 的两维DTFT

$$S_x(\nu, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \sum_{t_2=-\infty}^{\infty} R_x(t, s) e^{-j\nu t} e^{j\omega s}. \quad (4)$$

对于循环平稳周期过程,其双谱存在于 $\nu$ - $\omega$ 平面的一系列平行线上,谱线满足

$$\omega - \nu + \frac{2\pi k}{P} = 0, k \in Z, \quad (5)$$

即第 $k$ 条谱线上的谱分量为 $S_x(2\pi k/P, \omega)$ .

由(5)式知,通过双谱分析可得到相邻谱线间的距离,即得到周期 $P$ 的估计.

### 2.2. 模型验证

我们仿真产生脉冲幅度各不相同的脉冲星观测信号,脉冲周期取10 ms,采样间隔为0.2 ms,则每个周期有50个数据点,观测数据总长度取250个,叠加高斯白噪声.脉冲由高斯函数构造,占空比约为4%.用蒙特卡罗方法进行300次实验,其中一组样本如图2(a)所示.对此随机信号的均值函数和相关函数进行计算,分别如图2(b),(c)所示,并利用(1)式进行验证.一般来说,相关函数 $R_x(t; \tau)$ 不需要对每一个 $\tau$ 都进行计算,选 $\tau = 0$ 或 $\tau = 1$ 即可.由图知,脉冲星信号可看作循环平稳信号.

## 3. 基于双谱相干统计量的周期估计

对于平稳随机信号,可以用基于傅里叶变换的

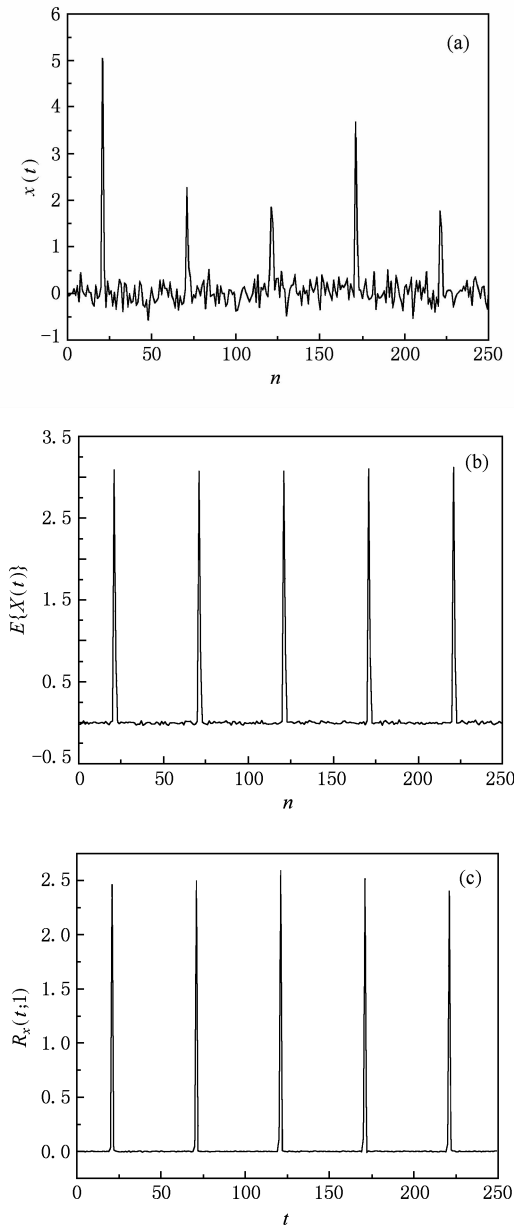


图2 脉冲星信号的均值与自相关函数 (a) 仿真信号; (b) 均值; (c) 相关

周期图法来确定周期, 而对于循环平稳随机过程, 本文尝试采用基于双谱、即两维周期图的估计方法. 具体步骤如下:

1) 给定一个信号  $x(t)$ , 长度为  $N$ , 设循环周期为  $p$ , 计算其  $T$  点 DFT  $X_T(\omega_k)$ .

2) 计算归一化的双谱相干统计量<sup>[12]</sup>

$$|\gamma(m, n, M)|^2 = \frac{\left| \sum_{k=0}^{M-1} X_T(\omega_{m+k}) X_T^*(\omega_{n+k}) \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^{M-1} X_T(\omega_{m+k}) \right|^2 \left| \sum_{k=0}^{M-1} X_T^*(\omega_{n+k}) \right|^2}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

其中,  $m, n$  称为双频指数 (bifrequency index),  $0 < m, n \leq N$ , 选择正整数  $M \leq N$ ,  $M$  为滑动窗的长度,  $\omega_k = 2\pi k/N$ ;  $0 \leq |\gamma(m, n, M)|^2 \leq 1$ .

3) 选择置信水平  $P_0$ , 如 99% 或 95%, 通过下式计算阈值  $|\gamma_0|^2$ :

$$P(|\gamma(m, n, M)|^2 > |\gamma_0|^2) = (1 - |\gamma_0|^2)^{M-1} = 1 - P_0. \quad (7)$$

4) 把超过阈值  $|\gamma_0|^2$  的  $|\gamma(m, n, M)|^2$  绘制在  $m-n$  平面上, 寻找双谱线上  $m-n$  的最小值  $d$ , 即相邻谱线的距离值.

5) 用下式估计信号周期:

$$\hat{p} = \lfloor T/d \rfloor, \quad (8)$$

其中, 符号  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示就近取整. 为了减小运算量, 我们可以只计算  $|\gamma(0, d, M)|^2$ , 从而在一维空间寻找  $d$ , 完成周期估计.

由(8)式可知, 若  $T$  的初始值 (可选为  $N$ ) 正好等于循环周期  $p$  的整数倍, 则两两相邻谱线的距离值序列  $\{d_1, d_2, \dots\}$  都相等, 该方法没有误差. 然而, 实际中我们无法保证这一点. 因此, 可进行如下处理: 谱线距离  $d$  取距离值序列  $\{d_1, d_2, \dots\}$  的均值, 计算得到  $\tilde{p}$ , 然后选取相邻的两个整数作为备选周期, 即在可能的集合  $\{\tilde{p}-1, \tilde{p}, \tilde{p}+1\}$  中进行进一步验证, 以得到真正的周期估计. 具体方法是, 对任何一个备选周期  $p$ , 通过计算  $T_1 = T - \text{mod}(T, p)$  重新确定 DFT 运算的点数, 使得  $T_1$  为  $p$  整数倍, 重新执行算法的步骤 1) 到步骤 4), 得到相应的双谱图和  $\{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots\}$  序列. 最后选择值相等的那组距离序列所对应的  $p$  为最终的周期估计.

在低信噪比下, 如果两两相邻两条谱线的距离不完全相等, 那么可以把出现次数最多的相同距离值作为最佳的谱线距离进行检验.

## 4. 实验和性能分析

首先我们用本文方法来处理单脉冲特征的脉冲星信号. 选择 PSR J0437-4715, 其脉冲辐射的周期约为 5.757 ms. 数据通过澳大利亚 Parks 射电观测站的 512 通道接收机观测得到, 接收机总带宽为 256 MHz, 第一通道的中心观测频率为 1517.75 Hz, 采样间隔约为 0.08 ms, 则一个周期的采样点数为 72 个. 分别处理两段信噪比不同的消色散后的观测信号 (如图 3(a), (b) 所示), 考察其在确定脉冲星辐射周期时的性能.

观测数据包含 648 个采样点,  $T$  取 648, 滑动窗的长度  $M$  取 64, 对数据进行去直流分量处理后, 信噪比分别约为 5 dB, -30 dB. 图 4(a), (b) 为两种信噪比下, 基于一维 FFT 频域算法的频率(周期)估计结果, 图 5(a), (b) 为双谱相干统计量的周期估计结果. 可以看到, 频谱估计法在高信噪比下可通过设定阈值实现正确的估计(如图中虚线所示), 检测得到信号频率为 0.1733 kHz, 周期为 5.7703 ms,

估计误差主要由离散傅立叶变换的栅栏效应引起. 但信噪比为 -30 dB 时, FFT 频谱法已无法实现频率识别了. 而本文所提的方法在两种情况下都能够得到正确的估计(相邻谱线间的距离为 9,  $\lfloor 648/9 \rfloor = 72$ ), 尽管随着信噪比的降低, 其估计性能也逐步下降. 我们可通过估计的周期进行原时域信号的折叠累加, 重构脉冲轮廓, 计算其信噪比从而检验该周期的正确性.

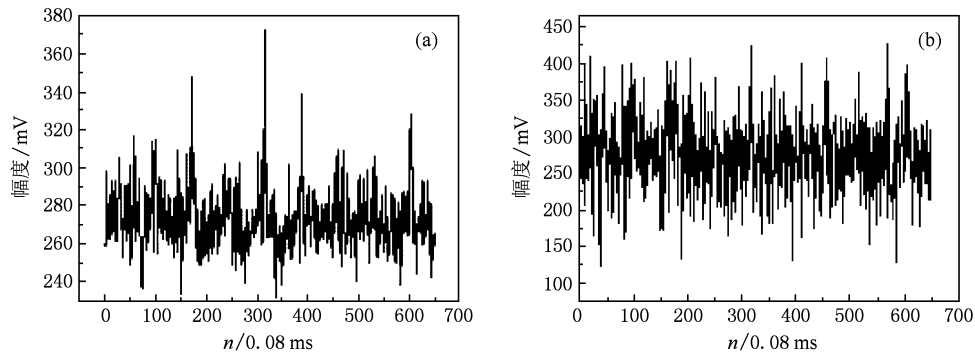


图 3 观测数据 (a) 信噪比为 5 dB; (b) 信噪比为 -30 dB

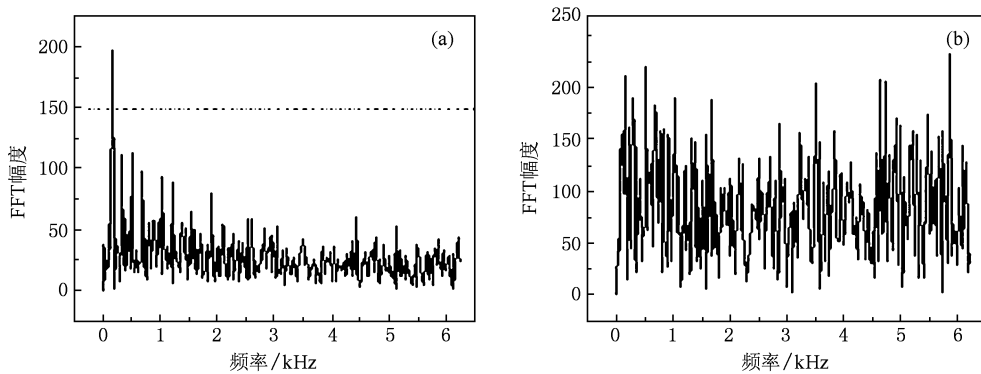


图 4 FFT 频谱法周期估计结果 (a) 信噪比为 5 dB; (b) 信噪比为 -30 dB

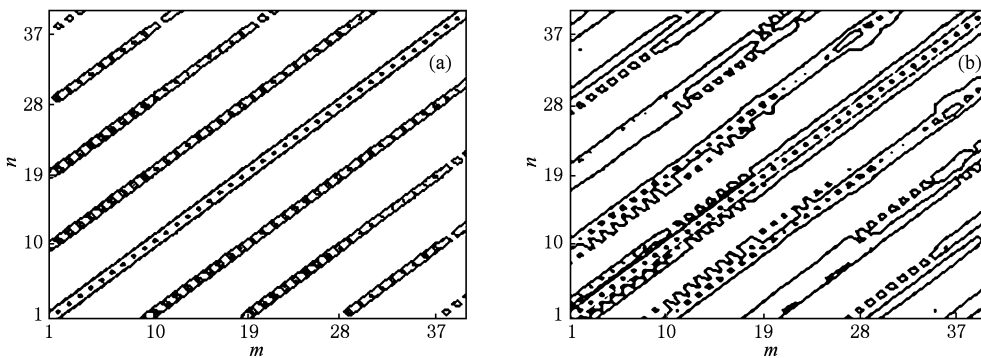


图 5 双谱统计量法周期估计结果 (a) 信噪比为 5 dB; (b) 信噪比为 -30 dB

当然,基于双谱特征的周期识别性能的提高,是以花费更多的运算量为代价的.可通过以下方式降低计算量,1)只计算  $m-n$  平面的下三角或上三角部分;2)固定  $n$  或  $m$ ,只计算一维谱线(如  $|\gamma(0,d,N)|^2$ ),然而在低信噪比情况下,这样做又会使估计性能降低.表 1 为本实验中三种方法的计算时间.

表 1 是三种策略的计算时间(单位:s)

傅里叶频谱法	双谱统计量法	$m$ 固定的一维谱线法
0.2511	1.2662	0.0349

若  $T$  不等于信号周期的整数倍时,设分别为 592,603,620,我们来验证所提方法的可行性.为方便分析和对比, $m$  的取值范围为  $[0,60]$ ,即选取前几条谱线, $n$  取 2,只计算一维的  $|\gamma(m,2,M)|^2$ .表 2 为本文所提策略的估计过程和相应计算结果.图 6 为不同备选周期对应的谱线图,从图中可以看到,只有周期为 72 时,相邻谱线距离相等,都为 9.因此,即使数据量不是信号周期的整数倍,该方法总是可以在备选周期中有效地搜索到真正的周期.

表 2 估计过程和计算结果

$T$	谱线距离序列	平均谱线距离	备选周期	调整数据量
592	{8,9,8,8,8}	8.2	{71,72,73}	{568,576,584}
603	{8,8,9,9,8}	8.4	{71,72,73}	{568,576,584}
620	{9,8,9,9,8}	8.6	{71,72,73}	{568,576,584}

表 3 脉冲轮廓参数

$l_1$	$\omega_1$	$t_1$	$l_2$	$\omega_2$	$t_2$
2.3278	$8.3404 \times 10^{-4}$	$8.3404 \times 10^{-4}$	5.6764	$3.7475 \times 10^{-5}$	$2.2128 \times 10^{-3}$

令采样时间为  $1 \times 10^{-5}$  s,则一个周期的采样点为 305 个,模拟产生如图 7(a) 所示的含噪信号,数据量为 1220.图 7(b) 为该数据经 FFT 变换后的各谐波分量,横坐标采用对数坐标以提高较低频率处的显示分辨率.可以看到,在 327 Hz 附近并没有出现峰值明显的基波分量,不能采用阈值估计,而相干统计量却可以简单有效的得到周期估计(图 7(c) 所示),图中,相邻两条谱线的距离为 4,则周期为  $\lfloor 1220/4 \rfloor = 305$ .不同强度的谱线(等高线)代表谐波成分.表明该方法同样适用于具有双脉冲辐射特征的脉冲星的自转周期估计.

为了综合考察该算法的性能,我们还对图 3(a) 中的数据中插入了 150 个连续的数据“0”,用以模拟此时间段没有观测数据的情况(如图 8(a)).结果发现本文方法仍可进行正确的周期估计(如图 8(b),谱线间的距离为 9).

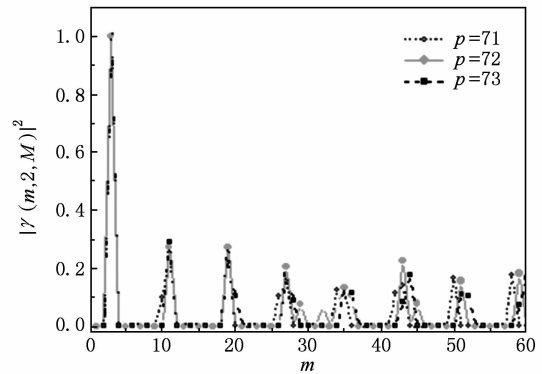


图 6 不同备选周期对应的谱线图

下面我们来处理具有双脉冲特征的脉冲星信号.以脉冲星 PSR B1821-24 为原型,其周期为 3.05 ms(自转频率为 327.87 Hz),信号较弱.为了控制信噪比,我们利用 B1821-24 的解析轮廓仿真产生观测数据,其模型为

$$h(t) = l_1 \exp\left[-\frac{(t-t_1)^2}{2\omega_1^2}\right] + l_2 \exp\left[-\frac{(t-t_2)^2}{2\omega_2^2}\right], \quad (9)$$

其中,拟合参数由表 3 所示<sup>[13]</sup>.

## 5. 结 论

当前,脉冲星研究领域一个重要的任务是开展巡天观测,我国正在加紧研制 500 m 口径射电望远镜 FAST<sup>[14]</sup>,X 射线脉冲星观测卫星的研制也必将提上日程.无论是观测射电脉冲星还是 X 射线脉冲星,对信号周期的正确估计是必然需求.实验表明,根据脉冲星的自转特性,用循环平稳模型来描述脉冲星的辐射信号是可行的.经典的快速傅里叶变换法虽然计算速度较快,但低信噪比下性能有限,需要进行多次的谐波累加操作,而本文提出的方法基于循环平稳模型,计算频域的双谱估计量,在图样和识别上具有直观、灵活、高效的特点,研究表明,即使在信噪比低于 -30 dB 时仍然可以得到循环周期,这对于微弱脉冲星信号的周期估计具有重要意

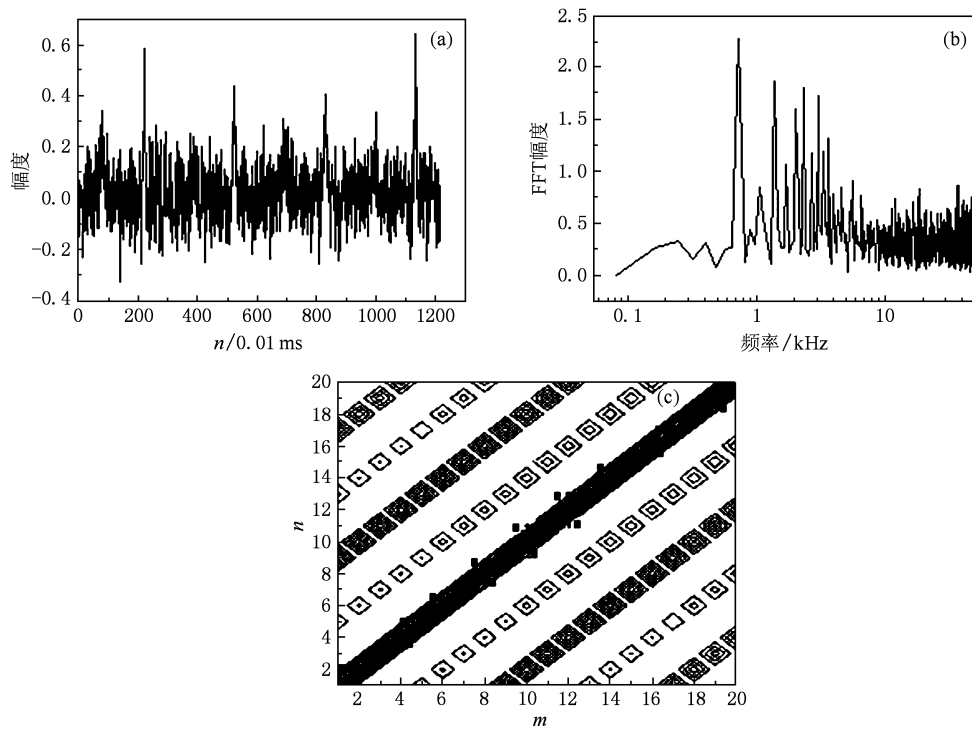


图7 双脉冲脉冲星的周期估计 (a) 仿真信号; (b) FFT 频谱法; (c) 本文方法

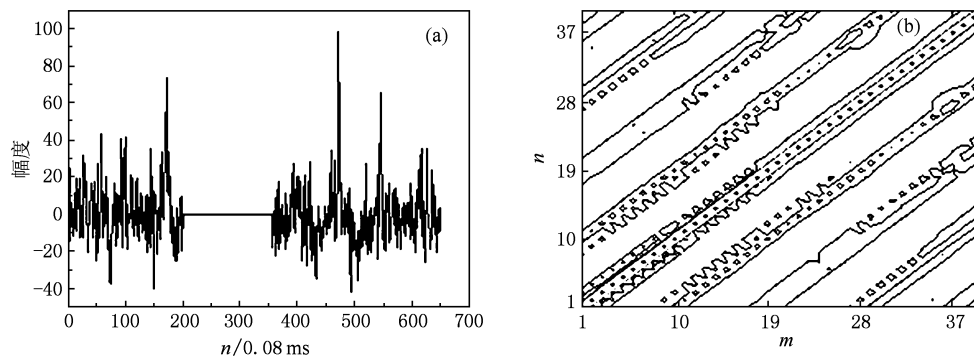


图8 非连续观测数据下的周期估计 (a) 观测信号; (b) 双谱相干统计量法

义. 尽管增加了运算复杂度, 但该方法为周期估计提供了一种新途径、新选择, 或将有助于我们更加灵活地对各种方法进行综合, 也适用于事后从海量的天文观测数据中挖掘脉冲星目标数据.

在国家天文台举办的 2009 年脉冲星学习班以及 2010 年脉冲星研究进展研讨会上, 对众多专家在脉冲星搜索问题上给予的指导表示感谢.

- [1] Li J X, Ke X Z 2009 *Science in China G* **52** 303  
 [2] Zhong C X, Yang T G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6157 (in Chinese) [仲崇霞、杨廷高 2007 物理学报 **56** 6157]  
 [3] Zhang L, Bian X, Mei D C 2001 *Chin. Phys.* **10** 662  
 [4] Belczynski K, Kalogera V M, Bulik T 2002 *Astrophys. J.* **572** 407

- [5] Stairs I H 2006 *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **32** 259  
 [6] Joseph H, Taylor J R 1993 *Class. Quantum Grav.* **10** 167  
 [7] Xie Z H, Xu L P, Ni G R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6683 (in Chinese) [谢振华、许录平、倪广仁 2008 物理学报 **57** 6683]  
 [8] Lorimer D R 1998 arXiv: 9801091 [astro-ph]

- [9] Lorimer D R, Kramer M 2005 *Handbook of Pulsar Astronomy* (Cambridge:Cambridge University Press) p127 [张海滨、蒋伟康、万 泉 2009 物理学报 **58** 333]
- [10] Zhang H B, Jiang W K, Wan Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 313 (in Chinese)[张海滨、蒋伟康、万 泉 2008 物理学报 **57** 313]
- [11] Zhang H B, Jiang W K, Wan Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 333
- [12] Hurd H L, Gerr N L 1991 *J. Times Ser. Anal.* **12** 337
- [13] John E Hanson, Suneel I Sheikh, Paul H Gravenche 2008 *IEEE-ION\_PLANS Symposium*, Monterey, May 5 - 8, 2008 p704
- [14] Nan R D 2006 *Science in China G* **49** 129

## Period estimation method for weak pulsars based on coherent statistic of cyclostationary signal

Li Jian-Xun<sup>†</sup> Ke Xi-Zheng

(Automation and Information Engineering School, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

(Received 3 April 2010; revised manuscript received 20 April 2010)

### Abstract

The importance of period estimation for pulsars in pulsar searching was discussed. In the paper, the radiation signal from pulsars was modeled as second-order cyclostationary process, and corresponding simulation was done to verify its reasonableness. Based on the model, a novel method was proposed to estimate pulsars' cyclo-period by the coherent statistic of bispectrum, and then one robust strategy for periodicity searches was provided in order to eliminate its sensitivity to data amount. Using the method, the period of PSR J0437-4715 with single pulse was estimated based on original signal, and the period of PSR B1821-24 with double pulses was also estimated based on simulated signal. Results show that, compared with the classical Fourier-transform method, the algorithm is intuitive, effective, of good performance even in case of lower SNR, and also appropriate for the noncontinuous observing data. The method, though with higher computation complexity, can provide a powerful reference for period estimation of weak pulsar signal.

**Keywords:** pulsars, pulsar searching, period estimation, cyclostationary signal

**PACC:** 9760G, 9575M, 9570

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61004122), the Science Foundation in Province, China (Grant No. 2010JQ8002) and the Science Foundation for Specialists With High Education Level of University (Grant No. 105-210919).

<sup>†</sup> E-mail: Ljx088@xaut.edu.cn