第 59 卷 第 12 期 2010 年 12 月
1000-3290/2010/59(12)/8326-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 12, December, 2010

Whittaker 方程的 Hamilton 化

丁光涛†
(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)
(2010 年 4 月 7 日收到;2010 年 4 月 13 日收到修改稿)

引入 Whittaker 方程的 Birkhoff 表示,构造与该表示对应的 Hamilton 函数,并利用 Hamilton-Poisson 方法得到 Whittaker 方程的解. 指出上述 Hamilton 函数与传统分析力学中 Hamilton 函数的区别.

关键词: Whittaker 方程, Hamilton 化, Birkhoff 表示, 分析力学逆问题
PACC: 0320

1. 引　　言

传统的 Lagrange 力学中,已知系统 Lagrange 函数可以列出运动微分方程,Lagrange 方程是二阶常微分方程组;Lagrange 力学逆问题研究运动微分方程满足何种条件时可以表示成 Lagrange 方程形式,以及如何构造相应的 Lagrange 函数[1,2]. 有些微分方程结构很简单却不能表示成传统的 Lagrange 方程形式,如 Whittaker 方程[2—4],对这样一些方程,可以部分 Lagrange 化[3],可以引入分数导数 Lagrange 函数[4]. 实际上,可以将原二阶微分方程变换成一阶微分方程,再导出其一阶 Lagrange 函数,或者是导出其 Birkhoff 表示再求解. 此外,还可以利用其他分析力学方法求解这样的微分方程[5—9]. 在传统分析力学中,微分方程若不能构造成对应的 Lagrange 函数,也就不能利用 Legendre 变换导出 Hamilton 函数,但是,对这种微分方程仍有可能从新的途径实现 Hamilton 化. 本文在引入 Whittaker 方程 Birkhoff 表示后,利用文献[10]中的方法构造出 Hamilton 函数,并利用 Hamilton-Poisson 方法解出 Whittaker 方程. 最后,对这种 Hamilton 化进行讨论,指出得到的 Hamilton 函数与传统 Hamilton 函数之间的实质区别.

2. Whittaker 方程的 Birkhoff 表示

Whittaker 方程如下[2—5]:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - x = 0, \\ &\ddot{y} - \dot{x} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

引入 Birkhoff 变量

$$\begin{aligned} a^1 &= x, \\ a^2 &= y, \\ a^3 &= \dot{x}, \\ a^4 &= \dot{y}, \end{aligned} \tag{2}$$

将方程(1)写成等价的一阶方程组

$$\begin{aligned} \dot{a}^1 &= \sigma^1 = a^3, \\ \dot{a}^2 &= \sigma^2 = a^4, \\ \dot{a}^3 &= \sigma^3 = a^1, \\ \dot{a}^4 &= \sigma^4 = a^3. \end{aligned} \tag{3}$$

设方程(3)的 Birkhoff 表示中函数 B 为

$$B = R_\mu \sigma^\mu \qquad (\mu = 1,2,3,4), \tag{4}$$

其中 R_μ 为 Birkhoff 函数组,由下列方程确定[5]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{\partial R_1}{\partial a^1}a^3 + \frac{\partial R_1}{\partial a^2}a^4 + \frac{\partial R_1}{\partial a^3}a^1 + \frac{\partial R_1}{\partial a^4}a^3 + R_3 = 0, \\ &\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial a^1}a^3 + \frac{\partial R_2}{\partial a^2}a^4 + \frac{\partial R_2}{\partial a^3}a^1 + \frac{\partial R_2}{\partial a^4}a^3 = 0, \\ &\frac{\partial R_3}{\partial t} + \frac{\partial R_3}{\partial a^1}a^3 + \frac{\partial R_3}{\partial a^2}a^4 + \frac{\partial R_3}{\partial a^3}a^1 + \frac{\partial R_3}{\partial a^4}a^3 + R_1 + R_4 = 0, \\ &\frac{\partial R_4}{\partial t} + \frac{\partial R_4}{\partial a^1}a^3 + \frac{\partial R_4}{\partial a^2}a^4 + \frac{\partial R_4}{\partial a^3}a^1 + \frac{\partial R_4}{\partial a^4}a^3 + R_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

上述方程的一组解为

† E-mail: dgt695@sina.com

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{1}{2}a^2,\\
R_2 &= \frac{1}{2}(a^1 - a^4),\\
R_3 &= \frac{1}{2}a^4,\\
R_4 &= \frac{1}{2}(a^2 - a^3).
\end{aligned} \tag{6}
$$

将(6)式代入(4)式得

$$
B = \frac{1}{2}[2a^1a^4 - (a^3)^2 - (a^4)^2]. \tag{7}
$$

由(6)式可得 Birkhoff 张量的分量为

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \Omega_{24} = -\Omega_{42} = -\Omega_{34} = \Omega_{43} = 1,\\
&\Omega_{13} = \Omega_{31} = \Omega_{14} = \Omega_{41} = \Omega_{23} = \Omega_{32} = 0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

其行列式

$$
\det(\Omega_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) = 1, \tag{9}
$$

故导出的 Birkhoff 系统是规则的，Birkhoff 张量的非对角零分量有 6 个.

3. Whittaker 方程的 Hamilton 化

由文献[10]可知，(6)和(7)式的 Birkhoff 系统可以 Hamilton 化. 首先，选取 Birkhoff 规范变换函数

$$
G = \frac{1}{2}(a^1a^2 - a^2a^4 + a^3a^4). \tag{10}
$$

利用 Birkhoff 规范变换

$$
\begin{aligned}
R'_\mu &= R_\mu + \frac{\partial G}{\partial a^\mu},\\
B' &= B - \frac{\partial G}{\partial t},
\end{aligned} \tag{11}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
R'_1 &= 0,\\
R'_2 &= a^1 - a^4,\\
R'_3 &= a^4,\\
R'_4 &= 0;
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
B' = B = \frac{1}{2}[2a^1a^4 - (a^3)^2 - (a^4)^2]. \tag{13}
$$

其次，引入正则变量

$$
\begin{aligned}
q^1 &= a^2,\\
q^2 &= a^3;\\
p_1 &= a^4 - a^1,\\
p_2 &= -a^4.
\end{aligned} \tag{14}
$$

解出

$$
\begin{aligned}
a^1 &= -(p_1 + p_2),\\
a^4 &= -p_2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

得到 Hamilton 函数

$$
H = -B' = \frac{1}{2}(q^2)^2 - p_1p_2 - \frac{1}{2}(p_2)^2. \tag{16}
$$

不难直接验证，由 H 列出的正则方程变换回变量 a^μ 后可以得到方程(3)，再变换回原始变量 x 和 y 后可导出方程(1).

在得到(16)式中 H 函数后，有多种方法求正则方程积分，这里利用 Hamilton-Poisson 方法[1,3]. 第一积分的 Poisson 条件是

$$
\frac{\partial I}{\partial t} + [I,H] = 0, \tag{17}
$$

式中 $[I,H]$ 是 Poisson 括号. 将(16)式代入(17)式，得

$$
\frac{\partial I}{\partial t} - p_2\frac{\partial I}{\partial q^1} - 0\frac{\partial I}{\partial p_1} - (p_1 + p_2)\frac{\partial I}{\partial q^2} - q^2\frac{\partial I}{\partial p_2} = 0. \tag{18}
$$

与偏微分方程(18)对应的常微分方程组是

$$
\frac{\mathrm{d}t}{1} = -\frac{\mathrm{d}q^1}{p_2} = -\frac{\mathrm{d}p_1}{0} = -\frac{\mathrm{d}q^2}{p_1 + p_2} = -\frac{\mathrm{d}p_2}{q^2}. \tag{19}
$$

上述方程组的 4 个独立积分如下：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(q^2)^2 - p_1p_2 - \frac{1}{2}(p_2)^2 = C_1,\\
&p_1 = C_2,\\
&q^2 - q^1 + tp_1 = C_3,\\
&[q^2 - (p_1 + p_2)]\mathrm{e}^{-t} = C_4,
\end{aligned} \tag{20}
$$

式中 C_1, C_2, C_3 和 C_4 为积分常数. 将(14)式代入(20)式后可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(a^3)^2 + \frac{1}{2}(a^4)^2 - a^1a^4 = C_1,\\
&a^4 - a^1 = C_2,\\
&a^3 - a^2 + t(a^4 - a^1) = C_3,\\
&(a^1 + a^3)\mathrm{e}^{-t} = C_4.
\end{aligned} \tag{21}
$$

将(2)式代入(21)式后解得

$$
\begin{aligned}
x &= A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t},\\
y &= A\mathrm{e}^t - B\mathrm{e}^{-t} + C_3t - C_2.
\end{aligned} \tag{22}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}C_4,\\
B &= \frac{1}{2C_4}(C_2^2 - 2C_1).
\end{aligned} \tag{23}
$$

4. 关于 Whittaker 方程 Hamilton 函数的讨论

在上述 Hamilton 化过程中,选取不同的规范变换函数可以使不同的 R'_μ 为零,因而使引入的正则变量发生改变,导出的 Hamilton 函数也随之改变,但是这些不同的正则变量和 Hamilton 函数都是 Whittaker 方程的 Hamilton 表示. 从这个意义上看,它们是等效的. 必须指出,由于 Ω_{12},Ω_{24} 和 Ω_{34} 为非零分量,故不能通过规范变换使 R_1 和 R_2,或 R_2 和 R_4,或 R_3 和 R_4 同时变换为零. 这说明,在引入正则变量时,不能同时选择 a^3 和 a^4,或 a^1 和 a^3,或 a^1 和 a^2 为正则坐标变量.

(16)式中 H 函数形式上与传统分析力学中的 Hamilton 函数一致,但是存在实质的区别,即其中的两个正则“坐标”变量 q^1 和 q^2 分别是 a^2 和 a^3,还原为原始变量就是 y 和 $\dot{x}$,y 是坐标变量,而 $\dot{x}$ 是速度变量. 以上已经指出,选择不同的规范变换都不可能使 R_3 和 R_4 同时为零,不能同时选择 a^1 和 a^2 为正则坐标变量,即不可能使两个正则坐标变量 q^1 和 q^2 同时为原始坐标变量 x 和 y. 这种限制很重要,是与 Whittaker 方程不能表示成传统的 Lagrange 方程紧密相关的.

如果将(16)式中 H 函数通过 Legender 变换,可导出相应的 Lagrange 函数[1]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 - \dot{q}^1\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(q^2)^2, \tag{24}$$

列出 Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} \ddot{q}^1 - \ddot{q}^2 &= 0, \\ -\ddot{q}^1 + q^2 &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

从形式上看,函数(24)式和方程(25)与传统的 Lagrange 函数和方程没有区别,但是将原始变量 x 和 y 代入方程(25)时会得到

$$\begin{aligned} \ddot{y} - \ddot{x} &= 0, \\ -\ddot{y} + \dot{x} &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

方程(26)不是方程(1),方程(1)经过求微商运算才能导出方程(26). 换言之,函数(24)式和方程(25)不是方程(1)传统的 Lagrange 表示.

顺便指出,Whittaker 方程没有传统的 Lagrange 表示,却有一阶 Lagrange 表示,即以(6)和(7)式中 R_μ 和 B,写出一阶 Lagrange 函数[2]

$$\begin{aligned} L &= -R_\mu \dot{a}^\mu + B \\ &= \frac{1}{2}a^2\dot{a}^1 - \frac{1}{2}(a^1 - a^4)\dot{a}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}a^4\dot{a}^3 - \frac{1}{2}(a^2 - a^3)\dot{a}^4 \\ &\quad + \frac{1}{2}[2a^1a^4 - (a^3)^2 - (a^4)^2], \end{aligned} \tag{27}$$

就可以得到与方程(1)等价的一阶 Lagrange 方程.

5. 结　　论

本文研究了 Whittaker 方程的分析力学化求解问题. 虽然这个方程不能表示成传统的 Lagrange 方程形式,但是通过构造它的 Birkhoff 表示,可实现其 Hamilton 化,并利用 Hamilton-Poisson 方法求出其积分. 利用这种方法得到的 Hamilton 函数与传统的 Hamilton 函数虽然在形式上相同,但它们之间却有本质上的区别.

[1] Goldstein H, Poole C, Safko J 2002 *Classical Mechanics* (3rd ed) (Redwood City: Addison-Wesley)

[2] Santillli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* (Ⅰ) (New York: Springer-Verlag)

[3] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 2845

[4] Riewe F 1997 *Phys. Rev.* E **55** 3581

[5] Ge W K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 10 (in Chinese) [葛伟宽 2006 物理学报 **55** 10]

[6] Guo Y X, Mei F X, Shang M 2007 *Chin. Phys.* **16** 292

[7] Zhang R C, Wang L H, Yue C Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3050 (in Chinese) [张睿超、王连海、岳成庆 2007 物理学报 **56** 3050]

[8] Ding G T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7415 (in Chinese) [丁光涛 2008 物理学报 **57** 7415]

[9] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京:北京理工大学出版社)]

[10] Ding G T 2010 *J. Dynam. Contr.* **8** 8 (in Chinese) [丁光涛 2010 动力学与控制学报 **8** 8]

Hamiltonization of Whittaker equations

Ding Guang-Tao†

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

(Received 7 April 2010; revised manuscript received 13 April 2010)

Abstract

A Birkhoffian representation of Whittaker equations is introduced. A Hamiltonian corresponding to the Birkhoffian representation is constructed. The Whittaker equations are solved by using the Hamilton-Poisson method. The difference between the above Hamiltonian and the Hamiltonians of traditional analytical mechanics is pointed.

Keywords: Whittaker equations, Hamiltonization, Birkhoffian representation, inverse problem of analytical mechanics

PACC: 0320

† E-mail: dgt695@sina.com