

弹性压扭直杆的 Greenhill 公式对精确模型的推广*

薛 纭[†] 翁德玮

(上海应用技术学院机械工程学院, 上海 200235)
(2010 年 2 月 9 日收到; 2010 年 6 月 8 日收到修改稿)

将圆截面 Kirchhoff 弹性压扭直杆的 Greenhill 公式推广到精确模型. 基于平面截面假定, 在弯扭的基础上增加了拉压和剪切变形, 将弹性杆的位形表达为截面的弧坐标历程. 由弹性杆精确模型的平衡微分方程, 得到了两端受力螺旋作用时对应于直线平衡状态的特解, 导出了线性化扰动方程及其通解, 再根据两端为铰支时的边界条件以及积分常数存在非零解的条件导出弹性直杆精确模型的 Greenhill 公式. 结果表明, 由力螺旋表示的稳定域为一对称的封闭区域, 拉压和剪切对稳定性的影响取决于拉压柔度与剪切柔度之差、抗弯刚度和杆长这三个因素.

关键词: Greenhill 公式, 弹性细杆精确模型, 力螺旋, Euler 稳定性

PACC: 0320, 0340D

1. 引 言

研究脱氧核糖核酸 (DNA) 等生物大分子超螺旋结构的分子行为以及一类杆状细菌、植物中的卷须和根茎的生长规律等是经典弹性细杆力学新的研究和应用领域^[1,2]. 早期研究是基于 Kirchhoff 模型, 忽略了杆的拉压和剪切变形, 近期是以精确模型为主, 在平面截面假定下考虑了杆的全部变形, 这在理论上更为精确, 也更符合 DNA 等一类软物质的特性^[3-6]. 但是, 对于同一对象这两种模型对平衡和稳定性方面究竟有何异同^[7-10]? 研究表明经典的结论需要推广.

压扭弹性细杆的稳定性是经典的力学问题. Greenhill 在 1883 年导出了计算圆截面弹性细杆两端为铰支时力螺旋 (F_0, M_0) 临界值的 Greenhill 公式^[11-13]

$$x^2 + y^2 \leq \pi^2. \quad (1)$$

这里 x 和 y 为力螺旋的无量纲化参量,

$$x = M_0 L / (2B_1),$$

$$y = F_0 L^2 / B_1,$$

其中 B_1 为抗弯刚度, L 为杆长. (1) 式是基于 Kirchhoff 模型导出的, 忽略了实际存在的拉压和剪切变形. 对于压扭 Kirchhoff 弹性直杆, 作者曾讨论

了非圆截面对 Lyapunov 稳定性、不同端部约束对 Euler 稳定性的影响^[14-16].

本文基于弹性杆的精确模型, 除弯扭外还考虑拉压和剪切变形, 研究两端铰支的圆截面弹性细杆在力螺旋作用下直线平衡状态的 Euler 稳定性问题. 将 Greenhill 公式推广到精确模型.

2. 弹性细杆精确模型的平衡微分方程

用 Cardano 角表示截面的姿态^[17]. 设 $O-\xi\eta\zeta$ 为惯性参照系, 在横截面的形心 P 建立 $P-\xi\eta\zeta$ 坐标系, 此坐标系依次绕轴 ξ, y_1, z_2 按右手规则转过 α, β, γ 角, 转动过程为 $P-\xi\eta\zeta \xrightarrow{\xi, \alpha} P-x_1y_1z_1 \xrightarrow{y_1, \beta} P-x_2y_2z_2 \xrightarrow{z_2, \gamma} P-x_3y_3z_3$, 如图 1 所示. 这里最后的坐标系 $P-x_3y_3z_3$ 为与截面固结的主轴坐标系, 其单位基矢量为 e_1, e_2, e_3 , 其中 e_3 为截面的外法矢.

精确模型有如下的变形几何关系^[18]:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

其中 \mathbf{r} 为截面形心的矢径, 在 $O-\xi\eta\zeta$ 中的坐标阵为 $\underline{r} = (\xi \ \eta \ \zeta)^T$, 下划线表示列阵; 撇号表示对原始弧坐标 s 的导数; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为截面的平移应变矢量, 即截面形心的应变矢量. (2) 式表明, 截面的平移应变也是导致中心线弯曲的重要因素. 弹性杆轴线的弧坐

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972143) 和上海应用技术学院科学技术发展基金 (批准号: KJ2008-10) 资助的课题.

[†] E-mail: xy@sit.edu.cn

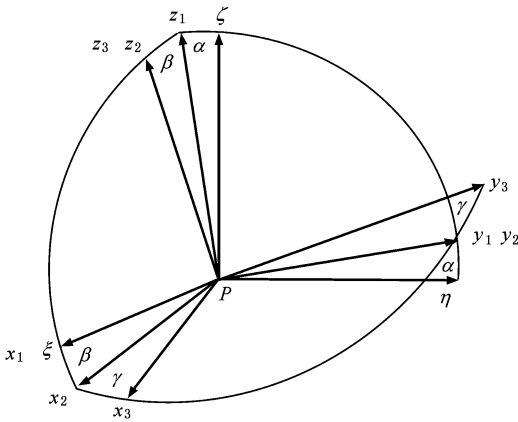


图1 截面的主轴坐标系及其姿态的 Cardano 角

标在变形后为 \bar{s} , 存在如下关系:

$$\frac{d}{d\bar{s}} = \frac{1}{\varepsilon_3 + 1} \frac{d}{ds}, \quad (3)$$

$$\bar{s} = s + \int_0^s \varepsilon_3 ds, \quad (4)$$

其中 $\varepsilon_3 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_3$. 设截面的主矢 \boldsymbol{F} 和平移应变矢 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、主矩 \boldsymbol{M} 和关于原始弧坐标的弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 满足下列线性弹性本构关系:

$$\underline{\boldsymbol{F}} = \underline{\boldsymbol{K}} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5)$$

或

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{R}} \underline{\boldsymbol{F}}; \quad (6)$$

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \underline{\boldsymbol{B}} \underline{\boldsymbol{\omega}}. \quad (7)$$

这里下划线表示坐标列阵, $\underline{\boldsymbol{K}}$, $\underline{\boldsymbol{R}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{B}}$ 分别为拉剪的刚度矩阵、柔度矩阵和弯扭的刚度矩阵, 在截面主轴坐标系下表示为

$$\underline{\boldsymbol{K}} = \text{diag}(K_1 \quad K_2 \quad K_3), \quad (8)$$

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \underline{\boldsymbol{K}}^{-1}, \quad (9)$$

$$\underline{\boldsymbol{B}} = \text{diag}(B_1 \quad B_2 \quad B_3), \quad (10)$$

其中 K_1, K_2 和 B_1, B_2 分别为截面关于主轴 $P-x_3, P-y_3$ 的抗剪刚度和抗弯刚度, K_3 和 B_3 分别为截面关于主轴 $P-z_3$ 的抗拉压刚度和抗扭刚度. 在(5)和(7)式中, 我们假定弹性杆无原始变形且是直杆.

弹性细杆精确模型的平衡微分方程为^[3]

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{ds} + \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0, \quad (12)$$

其中 \boldsymbol{F}_0 为作用于杆端且沿两端点的连线作用. (2), (5), (7), (11) 和 (12) 式, 连同弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 的坐标表达式^[12] 共 18 个标量方程关于变量 $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{F}$ 封闭. 杆的挠曲线微分方程由(2)式

给出.

考察圆截面杆, 即 $K_1 = K_2, B_1 = B_2$. 取惯性坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 中 ζ 轴与 \boldsymbol{F}_0 方向平行. (11) 式向 $P-x_2y_2z_2$ 的坐标轴投影, 导出

$$B_1\alpha''\cos\beta + [B_3\gamma' - (2B_1 - B_3)\alpha'\sin\beta]\beta' - F_2[1 + (R_3 - R_1)F_3] = 0, \quad (13a)$$

$$B_1\beta'' - [B_3\gamma'\cos\beta - (B_1 - B_3)\alpha'\sin\beta\cos\beta]\alpha' + F_1[1 + (R_3 - R_1)F_3] = 0, \quad (13b)$$

$$\gamma' + \alpha'\sin\beta = \frac{m_3^0}{B_3}, \quad (13c)$$

其中积分常数 $m_3^0 = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{e}_3, R_i = 1/K_i (i = 1, 2, 3)$, $F_i (i = 1, 2, 3)$ 为截面内力主矢依次在坐标轴 $P-x_2, P-y_2, P-z_2$ 上的投影. F_i 的具体表达式为

$$F_1 = F_0 \cos\alpha \sin\beta, \quad (14a)$$

$$F_2 = -F_0 \sin\alpha, \quad (14b)$$

$$F_3 = -F_0 \cos\alpha \cos\beta. \quad (14c)$$

(2) 式在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中的投影式为

$$\xi' = [1 + F_0(R_1 - R_3)\cos\alpha\cos\beta]\sin\beta, \quad (15a)$$

$$\eta' = -[1 + F_0(R_1 - R_3)\cos\alpha\cos\beta]\sin\alpha\cos\beta, \quad (15b)$$

$$\zeta' = \cos\alpha\cos\beta + F_0[(R_1 - R_3)\cos^2\alpha\cos^2\beta - R_1]. \quad (15c)$$

3. 直杆特解、线性化扰动方程及其通解

方程组(13)和(14)存在下列常值特解:

$$\alpha_s = \beta_s = 0, \quad (16a)$$

$$\gamma_s = \frac{M_0}{B_3}s, \quad (16b)$$

$$F_{1s} = F_{2s} = 0, \quad (16c)$$

$$F_{3s} = -F_0, \quad (16d)$$

其中 s 为弧长, F_0 和 M_0 为弹性杆发生压扭变形时沿轴线作用于杆两端的力(左)螺旋. (16) 式表达的是杆的直线平衡状态, 中心线方程为

$$\xi_s = \eta_s = 0, \quad (17)$$

$$\zeta_s = \left(1 - \frac{F_0}{K_3}\right)s \quad (0 \leq s \leq L).$$

这表明在力螺旋作用下弹性杆的精确模型和 Kirchhoff 模型都存在(16)式表示的直线平衡特解, 不同之处在于前者发生了压缩变形.

定义扰动量 $x_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为

$$x_1 = \alpha - \alpha_s, \quad (18a)$$

$$x_2 = \beta - \beta_s, \quad (18b)$$

$$x_3 = \gamma - \gamma_s, \quad (18c)$$

$$x_4 = \xi - \xi_s, \quad (18d)$$

$$x_5 = \eta - \eta_s, \quad (18e)$$

$$x_6 = \zeta - \zeta_s. \quad (18f)$$

将(18)式代入(13)式,略去二阶微量,导出线性化扰动方程

$$B_1 x_1'' + M_0 x_2' + f_1 F_0 x_1 = 0, \quad (19a)$$

$$B_1 x_2'' - M_0 x_1' + f_1 F_0 x_2 = 0, \quad (19b)$$

$$x_3' = 0, \quad (19c)$$

其中 $f_1 = [1 + (R_1 - R_3)F_0]$, 在一次近似下 $M_0 = m_3^0$. 将(18)式代入(2)式导出挠曲线的扰动方程

$$x_4' = f_1 x_2, \quad (20a)$$

$$x_5' = -f_1 x_1, \quad (20b)$$

$$x_6' = f_2. \quad (20c)$$

其中 $f_2 = 1 - R_3 F_0$. 引进复变量

$$u = x_1 + ix_2, \quad (21a)$$

$$v = x_4 + ix_5, \quad (21b)$$

可将(19a)和(19b), (20a)和(20b)式化作下列复微分方程:

$$B_1 u'' - iM_0 u' + f_1 F_0 u = 0, \quad (22a)$$

$$w' = -i f_1 u. \quad (22b)$$

方程(22a)的特征方程为

$$\lambda^2 - ia\lambda + b = 0, \quad (23)$$

其中 $a = M_0/B_1, b = f_1 F_0/B_1$. 方程(23)的特征根为纯虚根 $i\lambda_1, i\lambda_2$, 其中

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad (24a)$$

$$\lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad (24b)$$

皆为实数. 方程(22a)的通解为

$$u = \sum_{j=1}^2 C_j e^{i\lambda_j s}, \quad (25)$$

其中 C_1, C_2 为积分常数, 由杆的边界条件确定. 将(25)式代入方程(22b), 积分后得挠曲线方程

$$w = -f_1 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{C_j}{\lambda_j} e^{i\lambda_j s} \right) + C_3. \quad (26)$$

4. 边界条件及其临界载荷

在弹性杆的两端为铰支的情况下, 挠曲线在两端点的位移边界条件为

$$(\xi \quad \eta \quad \zeta)^T \Big|_{s=0} = (0 \quad 0 \quad 0)^T, \quad (27a)$$

$$(\xi \quad \eta \quad \zeta)^T \Big|_{s=L} = (0 \quad 0 \quad \zeta_L)^T. \quad (27b)$$

两端面的力边界条件为

$$(F_\xi \quad F_\eta \quad F_\zeta)^T \Big|_{s=0} = (0 \quad 0 \quad -F_0)^T, \quad (28a)$$

$$(F_\xi \quad F_\eta \quad F_\zeta)^T \Big|_{s=L} = (0 \quad 0 \quad -F_0)^T, \quad (28b)$$

$$(M_\xi \quad M_\eta \quad M_\zeta)^T \Big|_{s=0} = (0 \quad 0 \quad M_0)^T, \quad (28c)$$

$$(M_\xi \quad M_\eta \quad M_\zeta)^T \Big|_{s=L} = (0 \quad 0 \quad M_0)^T. \quad (28d)$$

将(5)和(7)式代入边界条件(27)和(28)式并注意(18)和(21)式, (28a)和(28b)式成为恒等式. 将扰动变量的边界条件化作复数形式,

$$w \Big|_{s=0} = 0, \quad (29a)$$

$$w \Big|_{s=L} = 0, \quad (29b)$$

$$(M_0 u + iB_1 u') \Big|_{s=0} = 0, \quad (29c)$$

$$(M_0 u + iB_1 u') \Big|_{s=L} = 0. \quad (29d)$$

显然, 特解(16)式的 Euler 稳定性取决于(19), (20)和(29)式的边值问题是否存在非零解, 即(29)式关于积分常数 $C_j (j = 1, 2, 3)$ 的代数方程是否存在非零解. 为寻求最小非零解, 将(25)和(26)式代入(29a), (29b)和(29c)式, 并写成矩阵形式

$$\underline{AC} = 0, \quad (30)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} M_0 - B_1 \lambda_1 & M_0 - B_1 \lambda_2 & 0 \\ (M_0 - B_1 \lambda_1) e^{i\lambda_1 L} & (M_0 - B_1 \lambda_2) e^{i\lambda_2 L} & 0 \\ -\frac{f_1}{\lambda_1} & -\frac{f_1}{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

(30)式存在非零解的条件是 $\det(A) = 0$, 即

$$\det(A) = (M_0 - B_1 \lambda_1)(M_0 - B_1 \lambda_2) \times (e^{i\lambda_1 L} - e^{i\lambda_2 L}) = 0. \quad (31)$$

(31)式等价于

$$\sin \sqrt{x^2 + f_1 y} = 0, \quad (32)$$

其中 $x = M_0 L / (2B_1), y = F_0 L^2 / B_1$. 注意到 f_1 的定义, (32)式化作

$$x^2 + (1 + \sigma y)y \leq \pi^2, \quad (33)$$

其中 $\sigma = B_1(R_1 - R_3)/L^2$. (32)式也可化作

$$\left(\frac{M_0 L}{2B_1} \right)^2 + \left[1 + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_3} \right) F_0 \right] \frac{F_0 L^2}{B_1} \leq \pi^2. \quad (34)$$

(33) 和(34)式就是压扭圆截面弹性直杆两端铰支时稳定的临界载荷应该满足的条件,是 Greenhill 公式(1)对精确模型的推广. 当不计杆的拉压和截面的剪切变形时,即为 Kirchhoff 模型,此时刚度由 $K_1 \rightarrow \infty, K_3 \rightarrow \infty$ 或柔度 $R_1 \rightarrow 0, R_3 \rightarrow 0$ 得到 $\sigma \rightarrow 0$, (33)和(34)式退化为(1)式. 稳定域即(33)式在参数 σ 取不同值时的情形见图 2. 从图 2 可以看到:曲线是关于 y 轴对称,这表明力偶的转向对杆的稳定性没有影响. 当 $\sigma = 0$ 时曲线为开口向下的抛物线,在 y 轴的正向有一个顶点,表明压力存在一个临界值,这就是 Euler 临界力. 当 $\sigma > 0$ 时曲线为一条封闭曲线,表明即使仅受拉力作用,杆也可能失稳,这似有悖常理,原因是精确模型也是弹性杆的简化模型,可以根据实际情况舍去(33)式中 y 的负根. 当 $\sigma > 0$ 时,图 2 中 $O-xy$ 平面上的稳定域随 σ 的增大而缩小. 力螺旋 (F_0, M_0) 的临界值与杆长的平方成反比,其中主矢的临界值还与抗弯刚度成反比,而主矩与抗弯刚度的平方成反比,表明杆的细长性是失稳的重要因素,这与 Greenhill 公式相同. 与(1)式相比,(33)式多了无量纲力的平方项,系数 σ 可化为

$$\sigma = \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_3} \right) \frac{B_1}{L^2} = \left(\frac{E}{kG} - 1 \right) \left(\frac{d}{4L} \right)^2, \quad (35)$$

其中 d 为截面的直径, E 和 G 分别为材料的拉压弹性模量和剪切弹性模量, k 的值取为^[19] 15/17. 对常用的金属材料(如低碳钢), $E = 200$ GPa, $G =$

80 GPa, 则 $\sigma = 0.115(d/L)^2$, 因 $d \ll L$, 故(33)式中的 σ 项完全可以忽略,而当 $E \gg G$, 且 $k \ll 1$ 时, σ 项必须考虑.

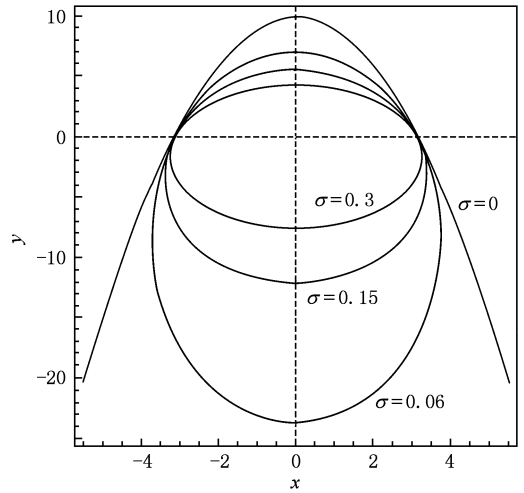


图 2 $x^2 + (1 + \sigma y)y = \pi^2$ 随参数 σ 的变化

5. 结 论

推广的 Greenhill 公式(33)或(34)表明,经典的 Greenhill 公式仅适合不计弹性杆的拉压变形和截面的剪切变形情形,即 $R_3 = R_1 = 0$ 情形和 σ 为小量的情形. 拉压和剪切变形对由力螺旋表示的稳定域的影响取决于柔度差 $(R_1 - R_3)$ 、抗弯刚度和杆长. 利用本文方法还可讨论弹性杆精确模型在其他支座(如两端固定、一端固定一端自由、一端铰支一端固定)约束下受力螺旋作用时的 Euler 稳定性问题.

[1] Traversl A A, Thompson J M T 2004 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **362** 1265
 [2] Liu Y Z 2003 *Mech. Eng.* **25**(1) 1 (in Chinese) [刘延柱 2003 力学与实践 **25**(1) 1]
 [3] Liu Y Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1
 [4] Healey T J, Mehta P G 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 949
 [5] Cao D Q, Tucker R W 2008 *Int. J. Sol. Struc.* **45** 460
 [6] He X S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1428 (in Chinese) [和兴锁 2010 物理学报 **59** 1428]
 [7] Liu Y Z, Xue Y, Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]
 [8] Xue Y, Chen L Q, Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 4029]

[9] Liu Y Z 2002 *Mech. Eng.* **24**(4) 56 (in Chinese) [刘延柱 2002 力学与实践 **24**(4) 56]
 [10] Xue Y, Chen L Q 2004 *Mech. Eng.* **26**(5) 71 (in Chinese) [薛 纭、陈立群 2004 力学与实践 **26**(5) 71]
 [11] Timoshenko S P, Gere J M 1965 *Theory of Elastic Stability* (2nd ed) (Beijing: Science Press) p169 (in Chinese) [铁摩辛柯 S P、盖莱 J M 1965 弹性稳定理论(第二版)(中译本)(北京:科学出版社)第 169 页]
 [12] Liu Y Z 2006 *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod: Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA* (Beijing: Tsinghua University Press, Springer) pp14, 61, 89 (in Chinese) [刘延柱 2006 弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础(北京:清华大学出版社, Springer)第 14, 61, 89 页]

- [13] Wu J K, Su X Y 1994 *Stability of Elastic System* (Beijing: Science Press) p103 (in Chinese) [武际可、苏先馥 1994 弹性系统的稳定性 (北京: 科学出版社) 第 103 页]
- [14] Liu Y Z, Xue Y 2005 *Mech. Eng.* **27**(1) 64 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭 2005 力学与实践 **27**(1) 64]
- [15] Xue Y, Chen L Q 2008 *J. Dyn. Contr.* **6** 198 (in Chinese) [薛 纭、陈立群 2008 动力学与控制学报 **6** 198]
- [16] Xue Y, Liu Y Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 61 (in Chinese) [薛 纭、刘延柱 2009 物理学报 **58** 61]
- [17] Liu Y Z 2001 *Advanced Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p96 (in Chinese) [刘延柱 2001 高等动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 96 页]
- [18] Xue Y, Weng D W, Chen L Q 2009 *Chin. Quart. Mech.* **30** 116 (in Chinese) [薛 纭、翁德玮、陈立群 2009 力学季刊 **30** 116]
- [19] Hu H C 1981 *Variational Principles of Elastic Mechanics and Their Applications* (Beijing: Science Press) p145 (in Chinese) [胡海昌 1981 弹性力学的变分原理及其应用 (北京: 科学出版社) 第 145 页]

Greenhill formula for an exact model of elastic rod^{*}

Xue Yun[†] Weng De-Wei

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

(Received 9 February 2010; revised manuscript received 8 June 2010)

Abstract

Greenhill formula for Kirchhoff elastic rod is extended to that of exact model of the rod. Under the assumption of the plane cross section, the configuration of an extensible and shearable elastic rod is expressed as a history of the cross section with arc coordinate. A special solution which describes equilibrium in straight line state of the rod is obtained from a differential equilibrium equation. A linear perturbation equation is derived and its general solution is obtained in which the integral constants are determined by constrained conditions at two ends of the rod. The condition for a non zero solution of the integral constants to exist leads to the Greenhill formula of exact elastic rod model, which shows that the boundary of stable area of the force screw is a closed curve and of symmetry and the inference of extensible and shearable to stability of the rod is dependent on three factors: the difference in flexibility between shear and extension of a section of the rod, the bending stiffness, and the length of the rod.

Keywords: Greenhill formula, exact model of elastic rod, force screw, Euler stability

PACC: 0320, 0340D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972143) and the Science and Technology Development Foundation of Shanghai Institute of Technology, China (Grant No. KJ2008-10).

[†] E-mail: xy@sit.edu.cn