

# 一类非线性色散 Boussinesq 方程的隐式孤立波解\*

江 波<sup>1)2)†</sup> 韩修静<sup>2)</sup> 毕勤胜<sup>2)</sup>

1) (江苏技术师范学院数理学院, 常州 213001)

2) (江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2009 年 11 月 29 日收到; 2010 年 7 月 8 日收到修改稿)

用动力系统分岔方法研究了一类非线性色散 Boussinesq 方程. 在不同的参数条件下, 给出了该方程具有隐函数形式的孤立波解的解析表达式. 数值模拟进一步验证了所得结果的正确性.

**关键词:** 非线性色散 Boussinesq 方程, 分岔方法, 同宿轨道, 隐式孤立波解

**PACC:** 0340K, 0290

## 1. 引 言

孤立波理论在诸如流体力学、非线性光学、生物化学、地球物理学等许多科学与工程领域具有广泛的应用. 因此, 探求孤立波解成为研究非线性波动方程的重要内容之一. 多年来, 许多数学家和物理学家提出了探求非线性波动方程的孤立波解的各种有效方法, 例如反散射法<sup>[1]</sup>、Hirota 双线性法<sup>[2]</sup>、Painlevé 截断展开法<sup>[3]</sup>、Bäcklund 变换法<sup>[4]</sup>、齐次平衡法<sup>[5]</sup>、同伦分析法<sup>[6]</sup>、动力系统分岔方法<sup>[7-10]</sup>及各种基于符号计算的代数方法<sup>[11-15]</sup>等. 当所求方程的孤立波解的表达式较为复杂甚至无法用显函数表达时, 动力系统分岔方法较其他方法具有明显优势.

色散、耗散、扩散等非线性波动现象对于深刻理解非线性波动方程起到了关键作用. 为了理解非线性色散项对非线性波动现象的影响, Zhang 等<sup>[16]</sup>提出了一类广义 Boussinesq 方程

$$u_{tt} + a(u^m)_{xx} + b(u^n)_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

其中  $m, n \in \mathbb{R}$  且  $a, b$  是不为零的方程参数. 许多学者针对  $a, b$  的特殊情形运用各种方法探讨过方程(1)的孤立波解<sup>[17-21]</sup>. Zhang 等<sup>[16]</sup>利用直接积分方法给出了方程(1)丰富的精确行波解, 尤其是当  $m = n = 2$  时的紧孤立波解、孤立尖波解和周期尖波解. 遗憾的是, 这些解并不全面. 因此, 本文将继续考虑

方程(1)当  $m = n = 2$  时的情形, 即

$$u_{tt} + a(u^2)_{xx} + b(u^2)_{xxxx} = 0, \quad (2)$$

利用动力系统分岔方法获得了方程(2)具有隐函数形式的孤立波解, 从而扩展和丰富了文献[16]的结果.

## 2. 方程(2)的隐式孤立波解

为了用动力系统分岔方法研究方程(2)的孤立波解, 对方程(2)作行波变换  $u(x, t) = u(\xi) = u(x - ct)$  得

$$c^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + a \frac{d^2(u^2)}{d\xi^2} + b \frac{d^4(u^2)}{d\xi^4} = 0, \quad (3)$$

其中  $c$  表示波速. 方程(3)关于变量  $\xi$  积分两次并令第一次积分的积分常数为零得

$$c^2 u + au^2 + b \frac{d^2(u^2)}{d\xi^2} = g, \quad (4)$$

其中  $g$  为第二次积分的积分常数.

进一步令  $\frac{du}{d\xi} = y$ , 可将方程(4)化成如下平面动力系统:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} &= y, \\ \frac{dy}{d\xi} &= \frac{g - c^2 u - au^2 - 2by^2}{2bu}. \end{aligned} \quad (5)$$

系统(5)的首次积分为

$$H(u, y) = u^2 \left( by^2 + \frac{a}{4} u^2 + \frac{c^2}{3} u - \frac{g}{2} \right)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10872080)资助的课题.

† E-mail: jib@jstu.edu.cn

$$=h, \tag{6}$$

其中  $h$  为常数.

注意系统(5)存在奇直线  $u = 0$  及可能的奇点  $(u_1, 0)$  和  $(u_2, 0)$ , 其中

$$u_1 = -\frac{c^2}{2a} - \frac{\sqrt{c^4 + 4ag}}{2a}, \tag{7}$$

$$u_2 = -\frac{c^2}{2a} + \frac{\sqrt{c^4 + 4ag}}{2a}. \tag{8}$$

根据平面动力系统理论<sup>[22]</sup>, 可得系统(5)的奇点有如下性质: 当  $a > 0, b < 0, -\frac{c^4}{4a} < g < -\frac{2c^4}{9a}$  时

或当  $a < 0, b > 0, -\frac{2c^4}{9a} < g < -\frac{c^4}{4a}$  时, 系统(5)存在奇点  $(u_1, 0)$  和  $(u_2, 0)$ , 其中  $(u_1, 0)$  是鞍点,  $(u_2, 0)$  是中心; 当  $a < 0, b < 0, 0 < g < -\frac{c^4}{4a}$  时或当  $a > 0, b > 0, -\frac{c^4}{4a} < g < 0$  时, 系统(5)存在奇点  $(u_1, 0)$  和  $(u_2, 0)$ , 其中  $(u_1, 0)$  是中心,  $(u_2, 0)$  是鞍点.

系统(5)在不同参数情形下的相图如图 1 所示.

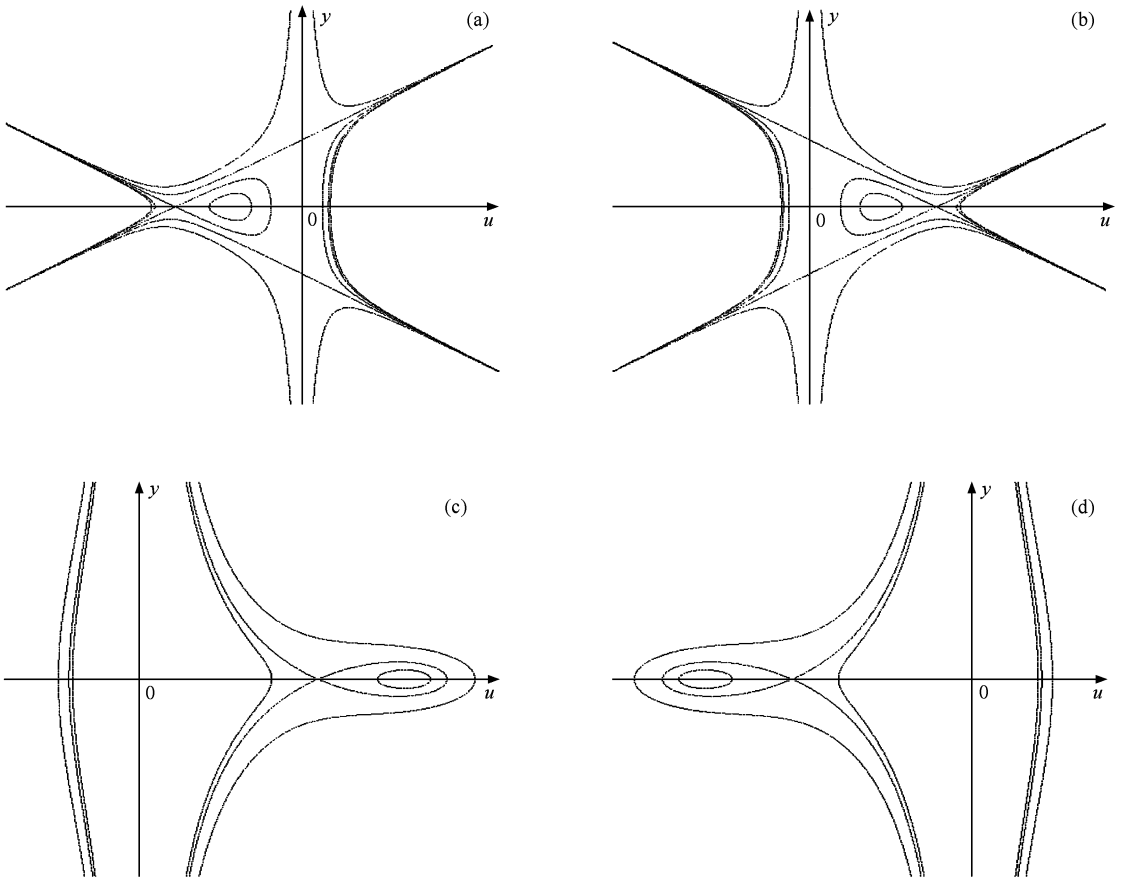


图 1 系统(5)在不同参数情形下的相图 (a)  $a > 0, b < 0, -\frac{c^4}{4a} < g < -\frac{2c^4}{9a}$ ; (b)  $a < 0, b > 0, -\frac{2c^4}{9a} < g < -\frac{c^4}{4a}$ ; (c)  $a < 0, b < 0, 0 < g < -\frac{c^4}{4a}$ ; (d)  $a > 0, b > 0, -\frac{c^4}{4a} < g < 0$

通常情况下, 方程(2)的一个孤立波解对应系统(5)的一条同宿轨道. 对应于图 1(a)和(b), 经过鞍点  $(u_1, 0)$  的同宿轨道分别表示为

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a}{4b} \frac{(u - u_1) \sqrt{(\bar{u}_1 - u)(u_1^* - u)}}{u}} \tag{9}$$

$(a > 0, b < 0, u_1 < u < \bar{u}_1)$

和

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a}{4b} \frac{(u - u_1) \sqrt{(u - \bar{u}_1)(u - u_1^*)}}{u}} \tag{10}$$

$(a < 0, b > 0, \bar{u}_1 < u < u_1)$

对应于图 1(c)和(d), 经过鞍点  $(u_2, 0)$  的同宿轨道分别表示为

$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{4b}} \frac{(u - u_2) \sqrt{(\bar{u}_2 - u)(u - u_2^*)}}{u} \quad (a < 0, b < 0, u_2 < u < \bar{u}_2) \quad (11)$$

和

$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{4b}} \frac{(u - u_2) \sqrt{(u - \bar{u}_2)(u_2^* - u)}}{u} \quad (a > 0, b > 0, \bar{u}_2 < u < u_2), \quad (12)$$

其中

$$\bar{u}_1 = -\frac{c^2}{6a} + \frac{\sqrt{c^4 + 4ag}}{2a} - \frac{\sqrt{c^4 - 3c^2\sqrt{c^4 + 4ag}}}{3a}, \quad (13)$$

$$u_1^* = -\frac{c^2}{6a} + \frac{\sqrt{c^4 + 4ag}}{2a} + \frac{\sqrt{c^4 - 3c^2\sqrt{c^4 + 4ag}}}{3a}, \quad (14)$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{c^2}{6a} - \frac{\sqrt{c^4 + 4ag}}{2a} - \frac{\sqrt{c^4 + 3c^2\sqrt{c^4 + 4ag}}}{3a}, \quad (15)$$

$$u_2^* = -\frac{c^2}{6a} - \frac{\sqrt{c^4 + 4ag}}{2a} + \frac{\sqrt{c^4 + 3c^2\sqrt{c^4 + 4ag}}}{3a}. \quad (16)$$

将(9)—(12)式代入系统(5)的第一方程并沿相应的同宿轨道积分得

$$\int_u^{\bar{u}_1} \frac{\sigma}{(\sigma - u_1) \sqrt{(\bar{u}_1 - \sigma)(u_1^* - \sigma)}} d\sigma = -\sqrt{\frac{-a}{4b}} |\xi| \quad (a > 0, b < 0, u_1 < u < \bar{u}_1), \quad (17)$$

$$\int_{\bar{u}_1}^u \frac{\sigma}{(\sigma - u_1) \sqrt{(\sigma - \bar{u}_1)(\sigma - u_1^*)}} d\sigma$$

$$= -\sqrt{\frac{-a}{4b}} |\xi| \quad (a < 0, b > 0, \bar{u}_1 < u < u_1), \quad (18)$$

$$\int_u^{\bar{u}_2} \frac{\sigma}{(\sigma - u_2) \sqrt{(\bar{u}_2 - \sigma)(\sigma - u_2^*)}} d\sigma = \sqrt{\frac{a}{4b}} |\xi| \quad (a < 0, b < 0, u_2 < u < \bar{u}_2), \quad (19)$$

$$\int_{\bar{u}_2}^u \frac{\sigma}{(\sigma - u_2) \sqrt{(\sigma - \bar{u}_2)(u_2^* - \sigma)}} d\sigma = \sqrt{\frac{a}{4b}} |\xi| \quad (a > 0, b > 0, \bar{u}_2 < u < u_2). \quad (20)$$

完成(17)—(20)式中的积分可得方程(2)的四个隐式孤立波解的解析表达式. (1) 当  $a > 0, b < 0, -\frac{c^4}{4a}$

$< g < -\frac{2c^4}{9a}$  时, 方程(2)的峰型隐式孤立波解为

$$F(u) = F(\bar{u}_1) \exp\left(-\sqrt{\frac{-a}{4b}} |\xi|\right). \quad (21)$$

(2) 当  $a < 0, b > 0, -\frac{2c^4}{9a} < g < -\frac{c^4}{4a}$  时, 方程(2)的谷型隐式孤立波解为

$$F(\bar{u}_1) = F(u) \exp\left(-\sqrt{\frac{-a}{4b}} |\xi|\right). \quad (22)$$

(3) 当  $a < 0, b < 0, 0 < g < -\frac{c^4}{4a}$  时, 方程(2)的峰型隐式孤立波解为

$$G(u) = G(\bar{u}_2) - \sqrt{\frac{-a}{4b}} |\xi|. \quad (23)$$

(4) 当  $a > 0, b > 0, -\frac{c^4}{4a} < g < 0$  时, 方程(2)的谷型隐式孤立波解为

$$G(\bar{u}_2) = G(u) - \sqrt{\frac{-a}{4b}} |\xi|. \quad (24)$$

这里

$$F(u) = \frac{(2\sqrt{p_1}\sqrt{u^2 - (\bar{u}_1 + u_1^*)u + \bar{u}_1u_1^*} + q_1u + r_1)^{s_1}}{(2\sqrt{u^2 - (\bar{u}_1 + u_1^*)u + \bar{u}_1u_1^*} + 2u - (\bar{u}_1 + u_1^*))^{s_1}}, \quad (25)$$

$$p_1 = u_1^2 - (\bar{u}_1 + u_1^*)u_1 + \bar{u}_1u_1^*, \quad (26)$$

$$q_1 = 2u_1 - (\bar{u}_1 + u_1^*), \quad (27)$$

$$r_1 = 2\bar{u}_1u_1^* - u_1(\bar{u}_1 + u_1^*), \quad (28)$$

$$s_1 = \frac{u_1}{\sqrt{p_1}}, \quad (29)$$

$$G(u) = \arcsin \frac{2u - (\bar{u}_2 + u_2^*)}{\sqrt{(\bar{u}_2 + u_2^*)^2 - 4\bar{u}_2 u_2^*}} - \frac{u_2}{\sqrt{p_2}} \operatorname{artanh} \frac{q_2 u + r_2}{2\sqrt{p_2} \sqrt{-u^2 + (\bar{u}_2 + u_2^*)u - \bar{u}_2 u_2^*}}, \quad (30)$$

$$p_2 = -u_2^2 + (\bar{u}_2 + u_2^*)u_2 - \bar{u}_2 u_2^*, \quad (31)$$

$$q_2 = (\bar{u}_2 + u_2^*) - 2u_2, \quad (32)$$

$$r_2 = u_2(\bar{u}_2 + u_2^*) - 2\bar{u}_2 u_2^*. \quad (33)$$

方程(2)在不同参数条件下  $\xi$ - $u$  平面上的隐式

孤立波解如图 2 所示.

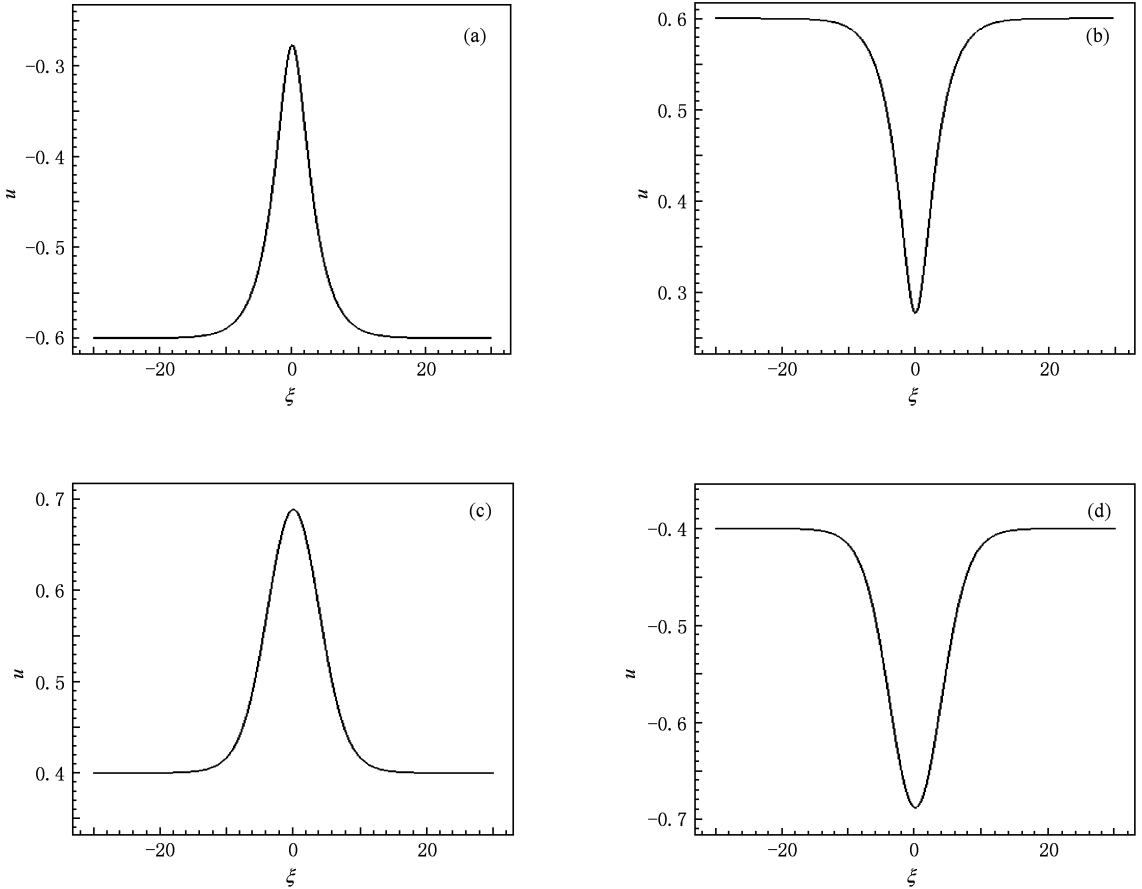


图 2 方程(2)在不同条件下  $\xi$ - $u$  平面上的隐式孤立波解 (a)  $a = 1, b = -1, c = 1, g = -0.24$ ; (b)  $a = -1, b = 1, c = 1, g = 0.24$ ; (c)  $a = -1, b = -1, c = 1, g = 0.24$ ; (d)  $a = 1, b = 1, c = 1, g = -0.24$

### 3. 结 论

本文用动力系统分岔方法研究一类广义非

线性色散的 Boussinesq 方程,并成功获得了该方程的具有隐函数形式的孤立波解.这将有助于深刻认识实际非线性波动模型的物理意义及运动规律.

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Wu Y Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1403 (in Chinese) [吴勇旗 2010 物理学报 **59** 1403]

[3] Huang W H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3163

- [4] Zeng X, Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1476 (in Chinese)[曾 昕、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1476]
- [5] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
- [6] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 67 (in Chinese)[石玉仁、杨红娟 2010 物理学报 **59** 67]
- [7] Li J B, Zhan Y 2009 *Nonlinear Anal. : Real World Appl.* **10** 2502
- [8] Guo B L, Liu Z R 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1451
- [9] Shen J W, Xu W, Lei Y M 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 117
- [10] Bi Q S 2005 *Phys. Lett. A* **344** 361
- [11] Li Z B, Zhang S Q 1997 *Acta Math. Sci.* **17** 81 (in Chinese)[李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]
- [12] Yan Z Y 2003 *Chaos Solitons Fract.* **18** 299
- [13] Wazwaz A M 2004 *Appl. Math. Comput.* **154** 713
- [14] Fan E G 2000 *Phys. Lett. A* **277** 212
- [15] Gao L, Xu W, Tang Y N, Shen J W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1860 (in Chinese)[高 亮、徐 伟、唐亚宁、申建伟 2007 物理学报 **56** 1860]
- [16] Zhang L J, Chen L Q, Huo X W 2007 *Nonlinear Anal.* **67** 3276
- [17] Yan Z Y 2002 *Chaos Solitons Fract.* **14** 1151
- [18] Zhu Y 2006 *Nonlinear Anal.* **64** 901
- [19] Zhu Y 2005 *Chaos Solitons Fract.* **26** 897
- [20] Zhu Y 2007 *Chaos Solitons Fract.* **32** 768
- [21] Zhu Y 2006 *Chaos Solitons Fract.* **30** 1238
- [22] Guckenheimer J, Holmes P J 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag)

## Implicit solitary wave solutions for a class of nonlinear dispersive Boussinesq equation\*

Jiang Bo<sup>1)2)†</sup> Han Xiu-Jing<sup>2)</sup> Bi Qin-Sheng<sup>2)</sup>

1) (College of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China)

2) (Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 29 November 2009; revised manuscript received 8 July 2010)

### Abstract

By applying the bifurcation method of dynamical systems to a class of nonlinear dispersive Boussinesq equations, the analytic expressions of implicit solitary wave solutions are obtained under different parameter conditions. Numerical simulations are given to show the correctness of our results.

**Keywords:** nonlinear dispersive Boussinesq equation, bifurcation method, homoclinic orbit, implicit solitary wave solutions

**PACC:** 0340K, 0290

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872080).

† E-mail: jb@jstu.edu.cn