

# 单参数 Lorenz 混沌系统的电路设计与实现\*

孙克辉<sup>†</sup> 杨静利 丁家峰 盛利元

(中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

(2010 年 1 月 26 日收到; 2010 年 7 月 7 日收到修改稿)

为了研究混沌系统的性质及其应用, 采用分立元件设计并实现了单参数 Lorenz 混沌系统, 系统参数与电路元件参数一一对应. 通过调节电路中的可变电阻, 观察到了该单参数系统的极限环、叉式分岔、倍周期分岔和混沌等动力学现象, 以及该系统由倍周期分岔进入混沌的过程. 研究了分数阶单参数 Lorenz 系统存在混沌的必要条件, 找出了分数阶单参数 Lorenz 系统出现混沌的最低阶数以及最低阶数随系统参数变化的一般规律. 电路仿真与电路实现研究表明, 单参数 Lorenz 系统具有物理可实现性、丰富的动力学特性以及理论分析与实验结果的一致性.

**关键词:** 混沌, 分数阶微积分, Lorenz 系统, 电路设计

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

由于混沌具有伪随机性、对初始值敏感等特性, 且可以控制和同步, 使得它在诸如保密通信、信息加密等工程领域具有广阔的应用前景, 而混沌应用都需要混沌信号, 由此激发了人们对混沌系统以及混沌系统电路实现的研究兴趣, 并成为近年来非线性学科的研究热点之一.

自 1963 年 Lorenz 发现第一个混沌吸引子以来<sup>[1]</sup>, 人们研究了多个变形的 Lorenz 混沌系统<sup>[2-4]</sup>. 对于这些变形的 Lorenz 混沌系统的电路实现已有报道<sup>[5-7]</sup>, 但大多数工作仅仅是取某一组或几组特定的参数来证实系统为混沌的, 并未就系统的整个参数空间或系统的混沌特性进行讨论. 另一方面, 随着对混沌理论研究的深入, 人们发现当系统的微分算子阶数为分数时也能出现混沌状态<sup>[8-10]</sup>, 且其更能反映系统呈现的工程物理现象. 虽然分数阶混沌系统的电路实现已有报道<sup>[11-13]</sup>, 但还有很多系统的混沌现象未被研究, 如文献[14]中的单参数简化 Lorenz 系统.

本文以单参数简化 Lorenz 系统为研究对象, 设计并实现了该系统的硬件电路. 通过调节可变电阻即改变系统参数, 观察到了混沌系统典型的动力学现象(如极限环、叉式分岔、倍周期分岔、混沌)以及

系统经倍周期分岔进入混沌的过程等. 在整数阶简化 Lorenz 系统电路的基础上, 对分数阶简化 Lorenz 系统进行了电路设计与实现. 得到了分数阶简化 Lorenz 系统出现混沌的必要条件, 给出了微分算子阶数相同与不同时的吸引子相图. 理论分析、动态仿真与硬件电路实现表明了单参数简化 Lorenz 系统电路设计的有效性.

## 2. 整数阶单参数 Lorenz 系统的电路设计与实现

### 2.1. 简化 Lorenz 系统模型

简化 Lorenz 系统的动力学方程为<sup>[14]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= (24 - 4c)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - 8z/3, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $c$  为系统参数, 当  $c \in (-1.59, 7.75)$  时, 系统是混沌的. 根据 Vaněček 和 Čelikovský 在文献[15]中的定义, 若系统在原点的线性化产生  $3 \times 3$  矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ , 则  $a_{12}a_{21}$  的不同符号可以区分不同的拓扑结构. 根据这一标准可知, 对于系统(1), 当  $c < 6$  时,  $a_{12}a_{21} > 0$ ; 当  $c = 6$  时,  $a_{12}a_{21} = 0$ ; 当  $c > 6$  时,  $a_{12}a_{21} < 0$ . 所以该系统包括了 3 个

\* 国家自然科学基金(批准号:60672041)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: kehui@csu.edu.cn

不同的拓扑结构,具有丰富的动力学特性,是混沌理论与应用研究的新模型.当系统参数  $c = -1$  时,

该系统变为经典的 Lorenz 系统,图 1 为  $c = 3.4$  时吸引子相图.

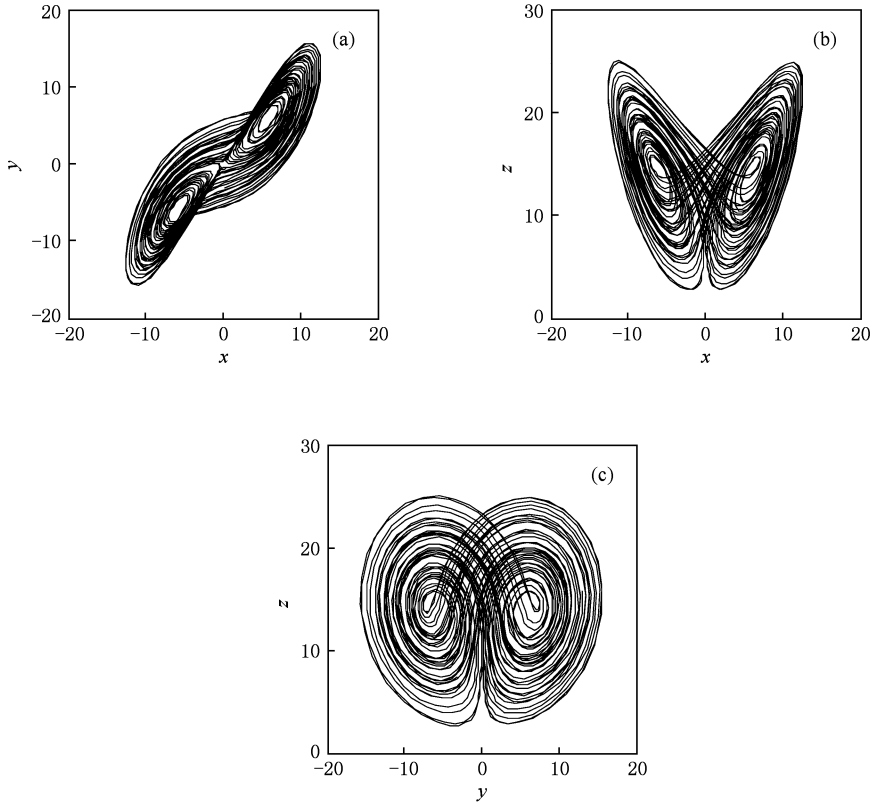


图 1 系统(1)吸引子相图 (a)x-y 平面, (b)x-z 平面, (c)y-z 平面

### 2. 2. 简化 Lorenz 系统电路设计

系统(1)中的非线性部分通过采用运放 LM741 和乘法器 AD633 来实现.由系统的仿真图可知,其状态变量的变化范围均超出了运放、乘法器的电源电压提供范围,故系统的状态变量不能直接作为电压变量,在具体电路实现时需将系统的状态变量进行适当的比例变换.

令

$$x' = \frac{1}{4}x,$$

$$y' = \frac{1}{4}y,$$

$$z' = \frac{1}{4}z,$$

则系统(1)变换为

$$\dot{x}' = 10(y' - x'),$$

$$\dot{y}' = (24 - 4c)x' - 4x'z' + cy',$$

$$\dot{z}' = 4x'y' - 8z'/3.$$

(2)

根据数学模型与基本的运算电路(加减、反相求和、积分),设计出与系统(2)相对应的电路如图 2 所示.设图 2 中  $V_1, V_2, V_3$  分别表示输出端点对地的电压,根据电路理论知识可以得到与图 2 所对应的电路状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{R_5 C_1} \left( \frac{R_3}{R_1} V_2 - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \frac{R_1 + R_3}{R_1} V_1 \right), \\ \dot{V}_2 &= \frac{1}{R_{17} C_2} \left( \frac{R_{16}}{R_8} V_1 - \frac{R_{16}}{R_9} \frac{R_7}{R_6} 0.1 V_1 V_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_{16} R_{14}}{R_{15}} \left( \frac{1}{R_{12}} \frac{R_{11}}{R_{10}} V_2 - \frac{1}{R_{13}} V_1 \right) \right), \\ \dot{V}_3 &= \frac{1}{R_{22} C_3} \left( \frac{R_{20}}{R_{18}} 0.1 V_1 V_2 - \frac{R_{21}}{R_{21} + R_{19}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{R_{18} + R_{20}}{R_{18}} V_3 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

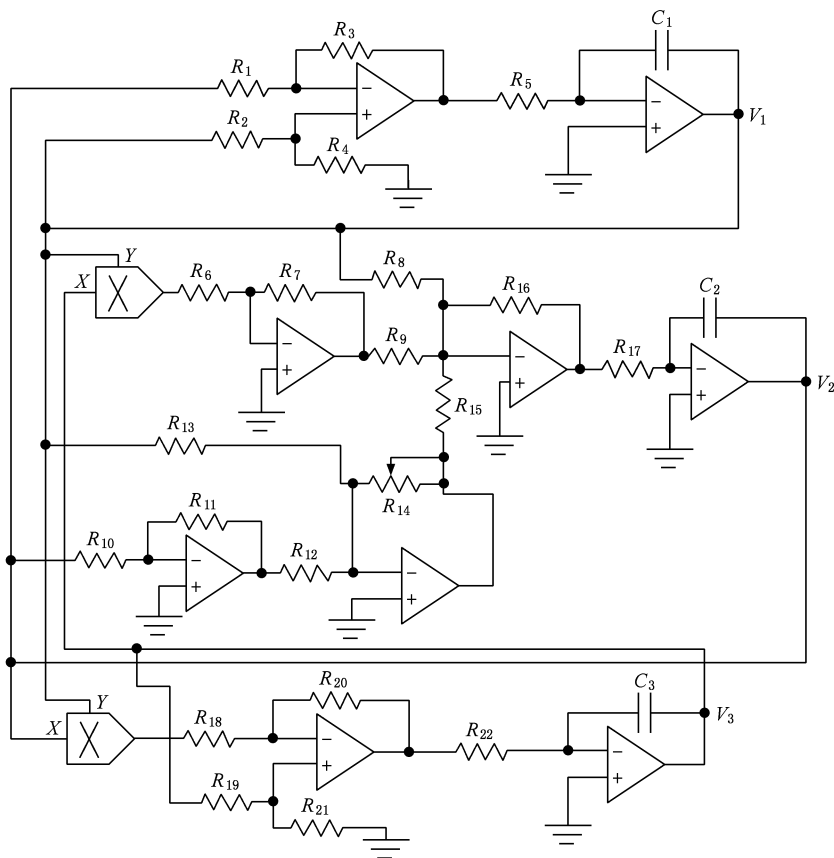


图2 电路原理图

比较系统(2)与系统(3),可得各元件的取值为  $R_i = 10 \text{ k}\Omega (i = 1, 2, 6, 10, 11, 18)$ ,  $R_i = 1 \text{ k}\Omega (i = 3, 4, 5, 17, 21, 22)$ ,  $R_7 = R_{20} = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = R_{15} = R_{16} = 6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{12} = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_8 = R_{13} = 25 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{14} = c \text{ k}\Omega$ ,  $R_{19} = 51.5 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = 10 \text{ }\mu\text{F}$ . 特别是  $R_{14} = c \text{ k}\Omega$ , 其中  $c$  为系统(1)的系统参数, 这样改变  $R_{14}$  的值等价于改变系统参数  $c$  的值。

### 2.3. 实验结果及动力学特性分析

依图2所示电路原理图制作实际的硬件电路。在实验过程中, 开始采用普通的模拟示波器观察, 但只看到有一个移动的点, 并不能看到电子工作平台(EWB)仿真时完整的吸引子相图。经分析后发现, 相对于人的视觉暂留时间, 信号的频率太小。因此, 为了能够在示波器上看到完整、轨迹连续的吸引子相图, 需要提高输出信号的频率, 即减小系统的时间常数  $R_5 C_1 = R_{17} C_2 = R_{22} C_3$  的值, 也就是减小

电容  $C_1, C_2, C_3$  (或电阻  $R_5, R_{17}, R_{22}$ ) 的值。在本设计中采用将电容  $C_1, C_2, C_3$  减小为  $1 \text{ nF}$ 。

图2中电阻  $R_{14}$  为连续可调电阻, 其最大值为  $10 \text{ k}\Omega$ 。通过调节电阻  $R_{14}$  的值, 可以看到系统呈现出不同的动力学现象。通过示波器可以观察到, 当系统参数  $c \in (5.926, 10)$  时, 系统呈现为周期的; 当系统参数  $c \in (0, 5.926)$  时, 除一些小的周期窗口外系统是混沌的。当系统参数  $c \in (0, 10)$  时, 将电阻  $R_{14}$  的值逐渐减小, 通过示波器可以看到极限环, 叉式分岔, 倍周期分岔到混沌的变化过程, 如图3所示。随着电阻  $R_{14}$  值的逐渐减小, 系统由不动点变为极限环(图3(a)), 然后依次出现叉式分岔(图3(b)), 倍周期分岔(图3(c)), 四周期(图3(d)), 直至系统出现混沌(图3(e), (f))。当系统参数  $c \in (0, 5.926)$  时, 如  $c \in (5.365, 5.384)$ ,  $c \in (4.146, 4.188)$ ,  $c \in (2.682, 2.759)$  等, 系统存在一些周期窗口, 如图4所示。显然, 在混沌保密通信的系统设

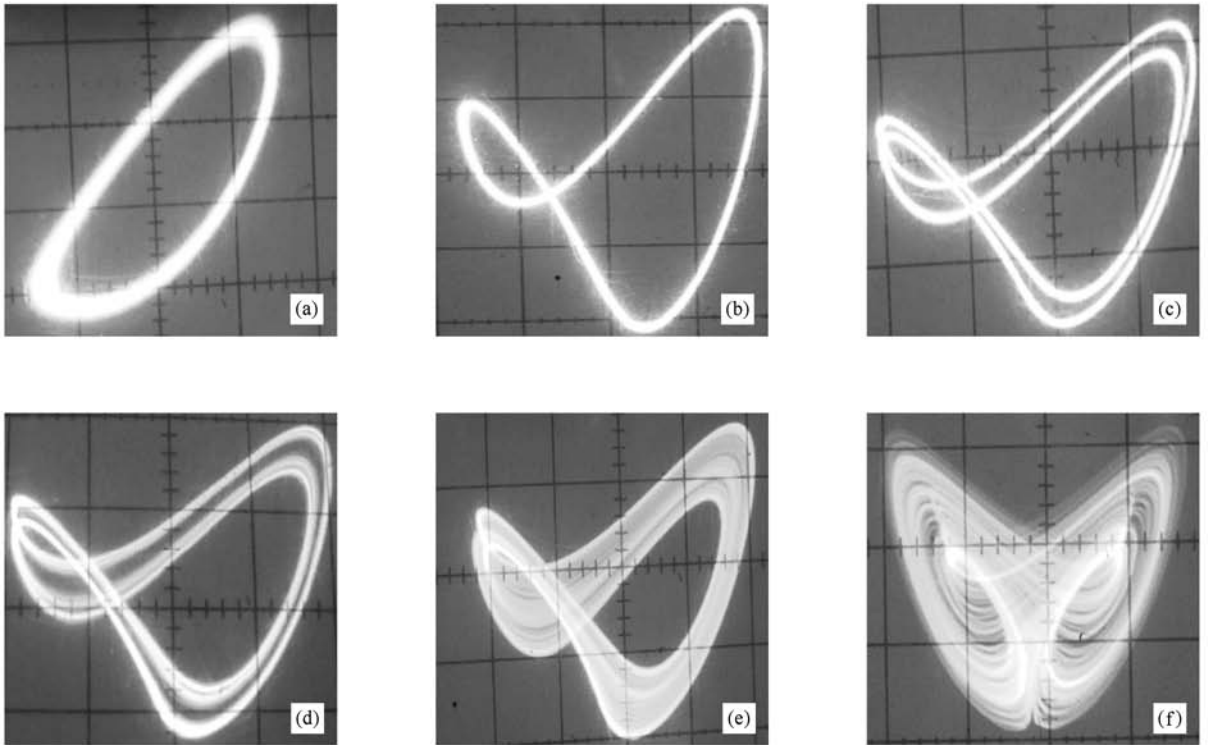


图3 参数  $c$  变化时系统(3)在  $x$ - $z$  平面的演化相图 (a)  $c=7.938$ , (b)  $c=6.932$ , (c)  $c=6.012$ , (d)  $c=5.986$ , (e)  $c=5.920$ , (f)  $c=4.678$

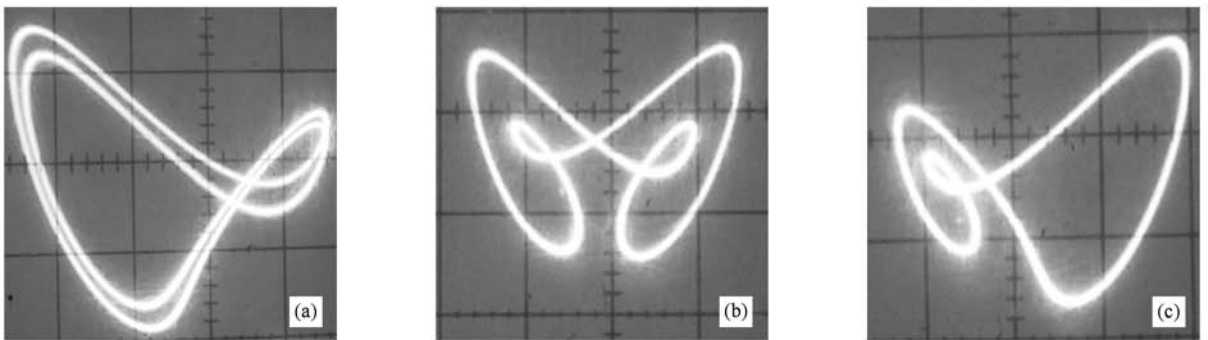


图4 参数  $c$  不同时系统(3)的周期窗口 (a)  $c=5.372$ , (b)  $c=4.153$ , (c)  $c=2.724$

计中应当避开这些周期窗口。

### 3. 分数阶单参数 Lorenz 系统的电路设计与实现

#### 3.1. 分数阶简化 Lorenz 系统

将分数阶微分算子替换简化 Lorenz 系统中的整数阶微分算子,则分数阶简化 Lorenz 系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= 10(y - x), \\ \frac{d^\beta y}{dt^\beta} &= -xz + (24 - 4c)x + cy, \\ \frac{d^\gamma z}{dt^\gamma} &= xy - \frac{8}{3}z, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$  是系统状态变量的微分阶数,可取不同的值。

**引理**<sup>[16]</sup> 若系统  $\dot{x} = f(x)$  出现混沌,则分数阶系统  $\frac{d^q x}{dt^q} = f(x)$  仍然保持混沌的必要条件是平衡点

的稳定性保持不变, 即系统的 II 类不稳定鞍点的特征值  $\lambda$  需满足

$$q > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right). \quad (5)$$

系统(1)的平衡点分别为  $S_0 = (0, 0, 0), S_{1,2} = (\pm\sqrt{64 - 8c}, \pm\sqrt{64 - 8c}, 24 - 3c)$ , 由计算得到其对应的特征值可知,  $S_0$  是系统的 I 类鞍点,  $S_{1,2}$  是系统的 II 类鞍点. 当简化 Lorenz 系统参数  $c = 5$  时, 系统(1)的平衡点  $S_0 = (0, 0, 0)$  及其对应的特征值分别为  $\lambda_1 = -2.6667, \lambda_2 = 7.3107, \lambda_3 = -12.3107$ ; 对于平衡点  $S_{1,2} = (\pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{24}, 9)$ , 有  $\lambda_1 = 9.2447, \lambda_{2,3} = 0.7890 \pm i 7.1623$ . 因此, 系统参数  $c = 5$  时存在混沌吸引子的必要条件是

$$q > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{7.1623}{0.7890}\right) = 0.9302. \quad (6)$$

若取系统参数  $c \in (0, 7.75)$ , 则包括了整数阶简化 Lorenz 系统出现混沌的范围, 当系统阶数  $\alpha = \beta = \gamma = q$  时, 该系统出现混沌的最低阶数  $q$  随参数  $c$  变化的趋势如图 5 所示. 从图 5 可以看出, 随着参数  $c$  的增大, 系统出现混沌状态的最低阶数呈现先

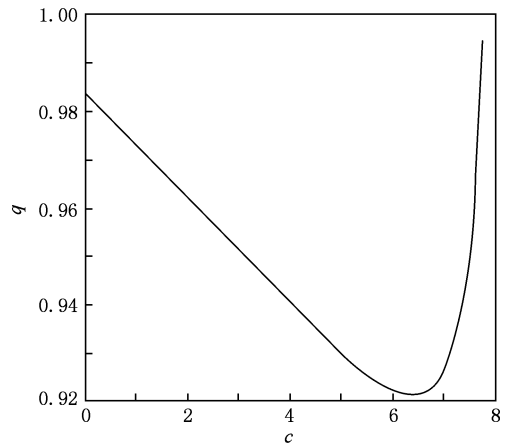


图 5 系统(4)出现混沌的最低阶数  $q$  随系统参数  $c$  的变化

减小再增大的规律, 当  $c \in (6.35, 6.45)$  时  $q$  出现最小值 0.9215, 即分数阶简化 Lorenz 系统出现混沌状态的最低阶数  $q = 2.7645$ .

当系统参数  $c = 5$ , 取  $q = 0.95, 0.9$  时, 对系统(4)进行动态仿真, 仿真结果如图 6 所示. 由图 6 可知,  $q = 0.95$  时系统是混沌的,  $q = 0.9$  时系统是不混沌的.

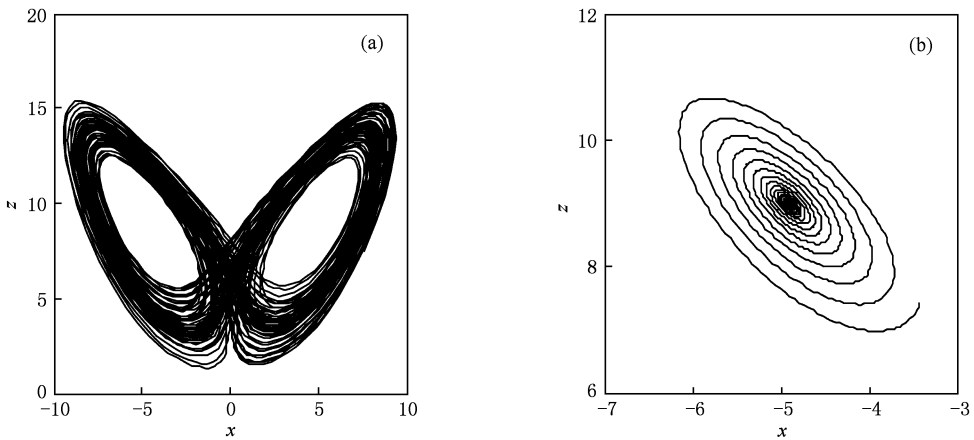


图 6 分数阶简化 Lorenz 系统  $x$ - $z$  相图 (a)  $q = 0.95$ , (b)  $q = 0.9$

### 3.2. 微分阶数相同时分数阶简化 Lorenz 系统电路设计与实现

在整数阶电路的基础上, 用分数阶积分单元等效电路代替相应积分电容, 即可实现对应的分数阶混沌电路. 设  $\alpha = \beta = \gamma = q = 0.95$ , 阶数为 0.95 的积分算子的传递函数近似式为<sup>[17]</sup>

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.95}} \approx \frac{1.2831s^2 + 18.6004s + 2.0833}{s^3 + 18.4738s^2 + 2.6547s + 0.003}. \quad (7)$$

与其相应的分数阶等效单元电路如图 7 所示<sup>[11]</sup>.

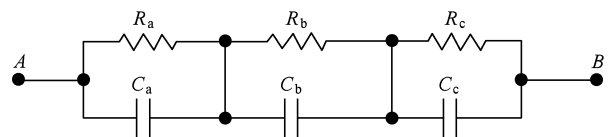
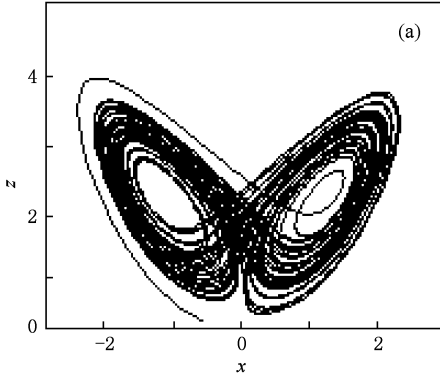


图 7 0.95 阶的积分单元等效电路

图 7 中的  $R_a = 15.1 \text{ k}\Omega, R_b = 1.51 \text{ M}\Omega, R_c =$

692.9 M $\Omega$ ;  $C_a = 3.616 \mu\text{F}$ ,  $C_b = 4.602 \mu\text{F}$ ,  $C_c = 1.267 \mu\text{F}$ . 由于 0.95 阶单元电路中  $R_c$  太大, 需要订做, 故采用在 EWB 上仿真. 将 0.95 阶单元电路代替整数阶电路中的积分电容 ( $C_1, C_2, C_3$ ), 仿真图如图 8(a) 所示. 取系统阶数  $\alpha = \beta = \gamma = q = 0.9$ , 将 0.9 阶



单元电路代替整数阶电路中的积分电容 ( $C_1, C_2, C_3$ ), 仿真图如图 8(b) 所示. 从图 8 可见, 当  $q = 0.95$  时系统是混沌的,  $q = 0.9$  时系统是不混沌的. 显然, 这与得到的分数阶简化 Lorenz 系统存在混沌的必要条件相符.

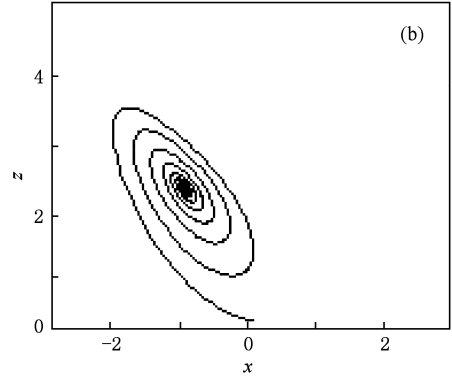


图 8  $c=5$  时分数阶简化 Lorenz 系统在  $x-z$  平面的相图 (a)  $q=0.95$ , (b)  $q=0.9$

### 3.3. 微分阶数不同时分数阶简化 Lorenz 系统电路设计与实现

取系统阶数  $\alpha = 0.9, \beta = \gamma = 1$ , 将 0.9 阶单元电路代替整数阶电路中的积分电容  $C_1$ , 0.9 阶单元电路的形式与图 7 一致, 其中  $R_a = 62.84 \text{ M}\Omega$ ,  $R_b = 250 \text{ k}\Omega$ ,  $R_c = 2.5 \text{ k}\Omega$ ;  $C_a = 1.232 \mu\text{F}$ ,  $C_b = 1.84 \mu\text{F}$ ,  $C_c = 1.1 \mu\text{F}$ . 考虑到实际的元器件精度, 取  $R_a = 62 \text{ M}\Omega$ ,  $C_a = 1.2 \mu\text{F}$ ,  $C_b = 1.8 \mu\text{F}$ , 其他不变. 同样, 为了能在普通的模拟示波器中观察到吸引子相图, 必需提高信号的频率, 故将电容  $C_a, C_b, C_c$  的值分别减小为 1.2, 1.8, 1.1 nF. 在示波器上观察到的吸引子相图如图 9(a) 所示, 图 9(b) 为对应的动态仿真图, 显然

它们的结果是一致的. 取系统阶数  $\alpha = \beta = 0.9, \gamma = 1$ , 将 0.9 阶单元电路代替整数阶电路中的积分电容  $C_1, C_2$ , 在示波器上观察到的吸引子相图如图 10(a) 所示, 图 10(b) 为对应的仿真图, 显然它们的结果也是一致的.

由图 9(a) 和图 10(a) 可知, 当系统参数  $c=5$  时, 系统总的阶数分别为  $\alpha + \beta + \gamma = 2.9$  和  $\alpha + \beta + \gamma = 2.8$ , 均大于系统出现混沌的最低阶数 2.7906, 分数阶简化 Lorenz 系统亦存在混沌现象. 所以可推测系统阶数不同时, 存在混沌吸引子的必要条件为  $\alpha + \beta + \gamma > 3q$ , 其中  $q$  为阶数相同时系统存在混沌吸引子的最低阶数.

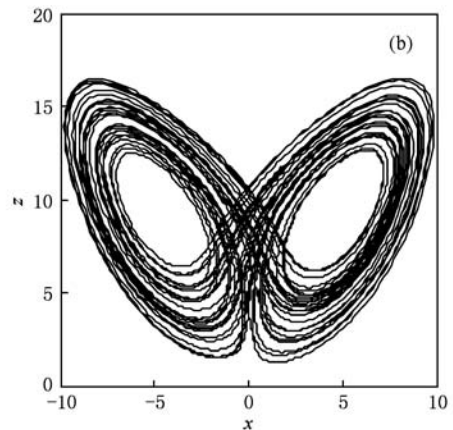
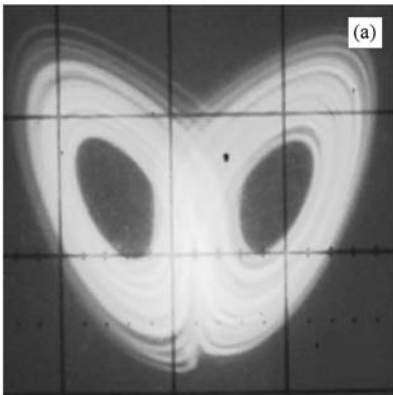


图 9  $\alpha=0.9, \beta=\gamma=1$  时系统电路实现与动态仿真图 (a) 示波器显示的  $x-z$  平面吸引子, (b)  $x-z$  平面动态仿真图

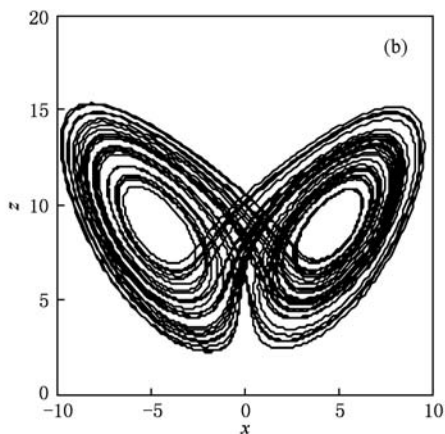
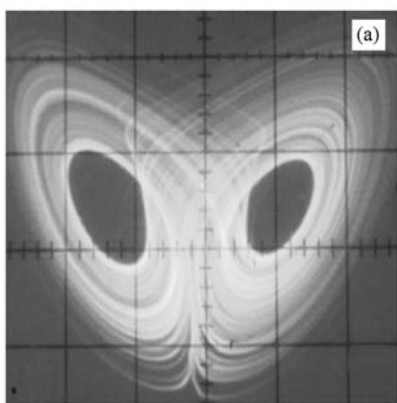


图 10  $\alpha=\beta=0.9, \gamma=1$  时系统电路实现与动态仿真图 (a) 示波器显示的  $x-z$  平面吸引子, (b)  $x-z$  平面动态仿真图

## 4. 结 论

本文采用分立元器件对整数阶与分数阶的单参数简化 Lorenz 系统进行了电路设计与实现, 给出了分数阶简化 Lorenz 系统存在混沌的必要条件. 电路参数与系统参数是一一对应的, 改变系统参数,

通过模拟示波器可以观察到非线性系统产生的不同动力学现象以及由倍周期分岔进入混沌的过程. 电路实验结果与分数阶系统存在混沌的必要条件相一致, 说明分数阶简化 Lorenz 系统确实存在混沌现象, 为实现混沌保密通信的应用研究奠定了实验基础. 下一步工作是研究混沌系统的同步问题, 同时也应开展基于混沌电路的保密通信的应用研究.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 113
- [2] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [3] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [4] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [5] Li Y X, Tang W K S, Chen G R 2006 *Proceedings International Conference on Communications Circuits and Systems* (Vol. 4) (Guilin: Guilin University of Electronic Technology) p2569
- [6] Wang G Y, Qiu S S, Chen H, Cui J D 2008 *J. Circ. Syst.* **13** 58 (in Chinese) [王光义、丘水生、陈 辉、崔佳冬 2008 电路与系统学报 **13** 58]
- [7] Tang L R, Li J, Fan B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1446 (in Chinese) [唐良瑞、李 静、樊 冰 2009 物理学报 **58** 1446]
- [8] Ahmad W, Sprott J C 2003 *Chaos Solitons Fract.* **16** 339
- [9] Arena P, Caponetto R, Fortuna L, Porto D 1997 *Proceedings of the European Conference on Circuit Theory and Design* (Budapest: Budapest University of Technology) p1259
- [10] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 549
- [11] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [12] Chen X R, Liu C X, Wang F Q 2008 *Chin. Phys.* **17** 1664
- [13] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [14] Sun K H, Sprott J C 2009 *Int. J. Bifur. Chaos* **19** 1357
- [15] Vančček A, Čelikovský S 1996 *Control Systems: From Linear Analysis to Synthesis of Chaos* (London: Prentice-Hall)
- [16] MoMmmad S T, Mohammed H 2007 *Phys. Lett. A* **367** 102
- [17] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55

# Circuit design and implementation of Lorenz chaotic system with one parameter<sup>\*</sup>

Sun Ke-Hui<sup>†</sup> Yang Jing-Li Ding Jia-Feng Sheng Li-Yuan

(*School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China*)

(Received 26 January 2010; revised manuscript received 7 July 2010)

## Abstract

To study the characteristics of the chaotic systems and their applications, an electronic circuit of simplified Lorenz chaotic system with one parameter is designed and experimented with discrete components. The system parameters correspond to the circuit element parameters. By regulating the variable resistor in the circuit, dynamic behaviors including limit cycle, pitchfork bifurcation, period-doubling bifurcation, chaos, and route to chaos by period-doubling bifurcation, are observed. The necessary condition for the existence of chaos in the fractional-order simplified Lorenz system is deduced. The lowest order of the fractional-order simplified Lorenz system and the variation law of the lowest order with system parameters are determined. Circuit simulations and experiments show that the simplified Lorenz system has rich dynamic characteristics, and that theoretical analysis and circuit experiment are accordant with each other.

**Keywords:** chaos, fractional-order calculus, Lorenz system, circuit design

**PACC:** 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60672041).

<sup>†</sup> E-mail: kehui@csu.edu.cn