

# 电流反馈型 Buck 变换器二维分段光滑系统 边界碰撞和分岔研究\*

谢 帆<sup>1)</sup> 杨 汝<sup>1)†</sup> 张 波<sup>2)</sup>

1)(广州大学物理与电子工程学院, 广州 510006)

2)(华南理工大学电力学院, 广州 510640)

(2010 年 2 月 9 日收到; 2010 年 4 月 23 日收到修改稿)

最近几年, 边界碰撞分岔已经引起了越来越多的关注. 以不连续导通模式下的电流反馈型 Buck 变换器为例, 推导出两个边界三段形式的分段光滑系统的离散映射模型. 数值仿真得到以参考电流为分岔参数的分岔图, 然后具体分析定点的稳定存在域、分叉图中各段的映射构成和边界碰撞点处工作模式的转换. 最后软件仿真和实验验证了二维分段光滑系统边界碰撞和分岔行为的正确性.

**关键词:** Buck 变换器, 边界碰撞点, 分岔, 稳定存在域

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

分岔与混沌这些非线性现象在电力电子变换器电路中是经常可见的. 在过去的 30 年中, 人们对电力电子变换器进行了深入的研究<sup>[1,2]</sup>. 尤其是对直流-直流 (DC-DC) 变换器的研究 (包括 Boost 变换器、Buck 变换器和 Buck-Boost 变换器等) 更是形成了一系列有效的研究方法<sup>[3-6]</sup>. 比如采用数值迭代建立一维和二维 DC-DC 变换器的离散模型、利用最大 Lyapunov 指数和庞加莱截面判断周期态和混沌态及基于雅可比矩阵的 DC-DC 变换器稳定性判别等. 这些研究理论指导了开关电源的发展.

传统分析分岔演化行为的方法通常只是分析定点的稳定性. 分岔行为可以分为倍周期分岔、霍普夫分岔以及鞍结分岔等, 这些都是以定点稳定性的改变为特征, 称为标准分岔. 但是在分段光滑系统中, 会发生从周期态直接跃变到混沌态或从混沌态跃变到周期态等分岔行为, 这种分岔行为在全局光滑系统中不能观察到, 也是传统的标准分岔理论所不能解释的. 这种不标准的分岔行为, 称为边界碰撞分岔 (BCB)<sup>[7-10]</sup>. 同样, 在电力电子变换器中也存在着边界碰撞分岔行为<sup>[11-14]</sup>. Banerjee

等<sup>[9,11,12]</sup>以一个边界为例, 从标准方程出发, 分别对一维、二维和三维的边界碰撞分岔进行分析总结. 边界碰撞分岔的条件随着分段系统的微妙变化而大不相同, 只能是对具体系统做具体分析, 因而还没有完整的理论解释. 但是, DC-DC 变换器分段光滑系统的边界碰撞行为及其分岔已经受到越来越多的关注<sup>[15-19]</sup>.

如上所述, 标准分岔是由于系统定点的稳定性随着参数的改变而改变. 但是, 在开关变换器中边界碰撞及其分岔是由于变换器工作模式的转换产生的. 以往对分段光滑系统的研究, 通常是以一维形式具体解释定点稳定存在域及碰撞点<sup>[14]</sup>, 二维的情况却很少有人解释; 抑或是运用文献<sup>[11]</sup>中分析二维边界碰撞的方法分析雅可比矩阵特征值的变化情况<sup>[16,18]</sup>, 却没有说明碰撞的机理和主要原因. 而且大部分的研究都是以一个边界为例说明边界碰撞行为, 即只是在 DC-DC 变换器工作在连续导通模式 (CCM) 下分析边界碰撞, 这就减少了研究的现实意义. 因此, 本文将以电流反馈型 Buck 变换器为例, 对两个边界三段形式的二维分段光滑系统, 即是不连续导通模式 (DCM) 下定点的稳定存在域进行理论解释以及定点和边界点相碰撞时变换器工作模式如何转换进行具体分析. 本文首先根据文献<sup>[4]</sup>

\* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 50937001) 和国家自然科学基金 (批准号: 50877028, 50777009) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: Lisayang702@yahoo.com.cn

以矩阵形式建立 Buck 变换的离散映射模型,用 Matlab 进行数值仿真,给出分岔图. 然后运用离散形式的非线性动力学<sup>[20]</sup>理论说明分岔图的构成,具体分析定点的稳定存在域,并对分岔行为和变换器工作模式转换关系进行解释. 最后,软件仿真和实验验证二维分段光滑系统边界碰撞和分岔行为.

2. 电流反馈型 Buck 变换器分段光滑系统的离散模型

典型的 Buck 变换器电感电流反馈控制模型如

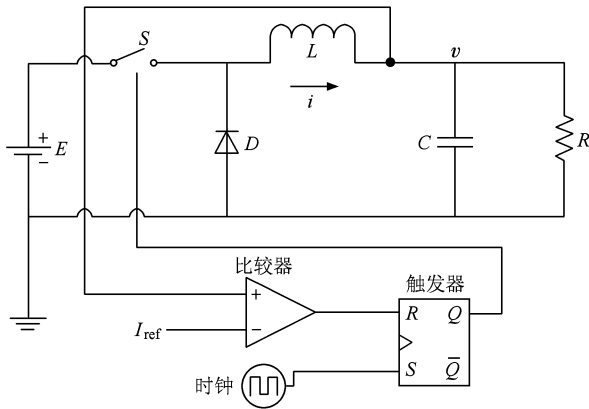


图1 电流反馈型 Buck 变换器模型

变换器工作在任一模态时,其动力学方程均可以表示为以下矩阵形式:

$$\dot{X} = A_k X(t) + B_k E$$
$$(t_k \leq t \leq t'_k; k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

式中  $k$  为开关模态,  $[t_k, t'_k]$  为第  $k$  个开关模态的工作时间. 解(1)式并运用矩阵指数积分运算规则可得

$$X(t'_k) = f(X(t_k), t)$$
$$= e^{A_k(t'_k - t_k)} X(t_k) + \int_{t_k}^{t'_k} e^{A_k(t'_k - s)} B_k E ds$$
$$= e^{A_k \Delta t_k} X(t_k) + (e^{A_k \Delta t_k} - I) A_k^{-1} B_k E, \tag{2}$$

式中

$$A_1 = A_2$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix},$$

图1所示. 图1中  $S$  为电路开关,  $D$  为续流二极管,  $i$  为电感  $L$  上流过的电流,  $v$  为电容上的电压,  $I_{ref}$  为电感电流反馈控制给定的参考电流,  $E$  为输入电压, 时钟是控制电流环的脉冲.  $S$  由比较器与触发器组成的反馈控制环控制. 在每一个时钟周期开始时,  $S$  导通,  $i$  上升, 同时  $D$  关断, 变换器工作在模态1. 当  $i = I_{ref}$  时,  $S$  关断,  $i$  下降, 如果  $i \neq 0$  时,  $D$  导通, 变换器工作在模态2; 当  $i = 0$  时,  $S$  与  $D$  均关断, 变换器工作在模态3. 模态1和模态2中,  $i \neq 0$ , 称变换器工作在 CCM 下; 模态3中,  $i = 0$ , 变换器工作在 DCM 下.

$$X = \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix},$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$B_2 = B_3$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_1^{-1} = A_2^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{L}{R} & C \\ L & 0 \end{pmatrix}.$$

根据凯莱-哈密顿定理可精确解得

$$e^{A_1 \Delta t_1} = \begin{pmatrix} a(\Delta t_1) & -\frac{b(\Delta t_1)}{L} \\ \frac{b(\Delta t_1)}{C} & c(\Delta t_1) \end{pmatrix},$$

$$e^{A_1 \Delta t_2} = \begin{pmatrix} a(\Delta t_2) & -\frac{b(\Delta t_2)}{L} \\ \frac{b(\Delta t_2)}{C} & c(\Delta t_2) \end{pmatrix},$$

$$e^{A_1 \Delta t_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\alpha \Delta t_3} \end{pmatrix},$$

其中

$$a(\Delta t) = \frac{e^{-\alpha \Delta t}}{\omega} [\alpha \sin(\omega \Delta t) + \omega \cos(\omega \Delta t)],$$

$$b(\Delta t) = \frac{e^{-\alpha \Delta t}}{\omega} \sin(\omega \Delta t),$$

$$c(\Delta t) = \frac{e^{-\alpha \Delta t}}{\omega} [\omega \cos(\omega \Delta t) - \alpha \sin(\omega \Delta t)],$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L} - \frac{1}{4R^2 C^2}},$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}.$$

对 Buck 变换器每一个时钟周期开始时进行一次状态变量采样, 并设变换器在一个周期中经历  $m$  种开关模态, 则可由 (2) 式得到一个从  $X_n = (i_n, v_n)$  到  $X_{n+1} = (i_{n+1}, v_{n+1})$  的离散映射

$$X_{n+1} = f_m(f_{m-1}(\cdots f_1(X_n, \Delta t_1), \Delta t_{m-1}), \Delta t_m). \quad (3)$$

电感电流在一个时钟周期内可能的变化情况如图 2 所示.

图 2(a) 和 (b) 分别给出了变换器工作时的边界情况. 因此, 电流反馈型 Buck 变换器从  $X_n$  到  $X_{n+1}$  将有三种可能的离散映射.

1) 当  $i_n \leq I_{b1}$  时, 在一个时钟周期内变换器只经历模态 1, 如图 2(c) 所示, 称此时为工作模式  $F_1$ . 由 (2), (3) 式可得

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= F_1(X_n) \\ &= e^{A_1 T} X_n + (e^{A_1 T} - I) A_1^{-1} B_1 E. \end{aligned} \quad (4)$$

2) 当  $I_{b1} \leq i_n \leq I_{b2}$  时, 变换器在一个时钟周期内分别经历了模态 1 和模态 2, 如图 2(d) 所示, 称此时为工作模式  $F_2$ . 由 (2), (3) 式可得

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= F_2(X_n) \\ &= e^{A_2 t_2} e^{A_1 t_1} X_n + e^{A_2 t_2} (e^{A_1 t_1} - I) A_1^{-1} B_1 E. \end{aligned} \quad (5)$$

变换器经历模态 1 所满足的条件为

$$\begin{pmatrix} I_{\text{ref}} \\ v_{t_1} \end{pmatrix} = e^{A_1 t_1} \begin{pmatrix} i_n \\ v_n \end{pmatrix} + (e^{A_1 t_1} - I) A_1^{-1} B_1 E. \quad (6)$$

(5) 式中的  $t_1$  可由 (6) 式解得,  $t_2 = T - t_1$ .

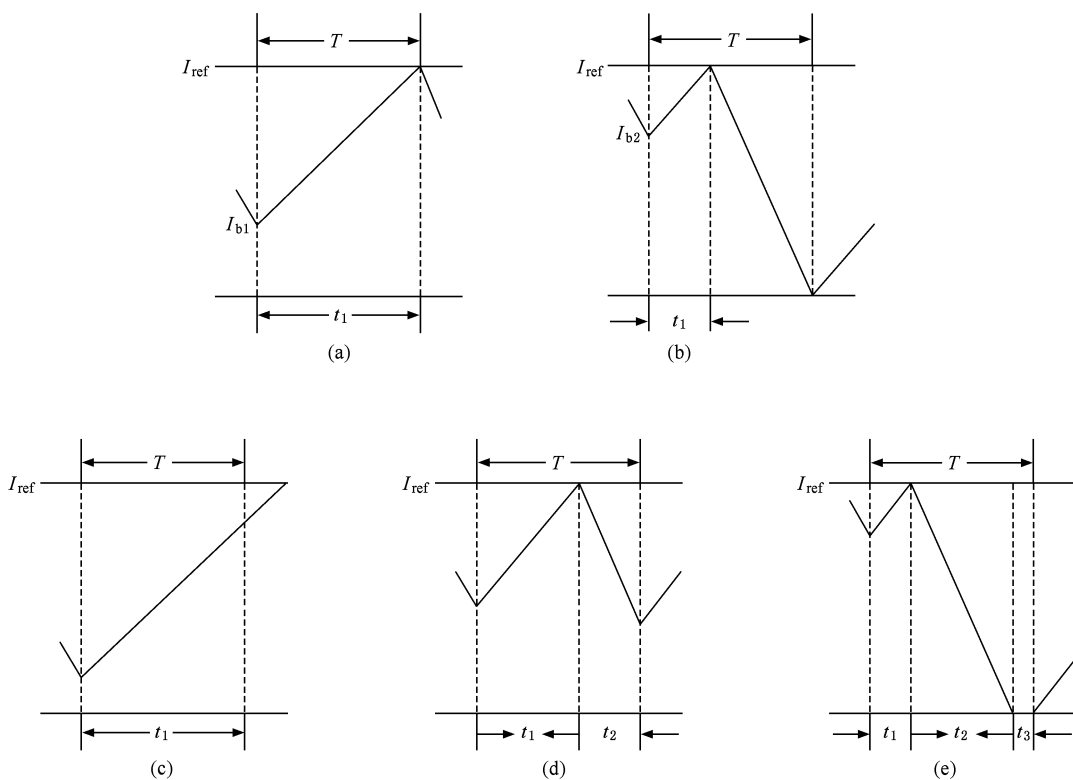


图 2 电感电流在一个时钟周期内可能的变化情况 (a) 边界情况  $I_{b1}$ , (b) 边界情况  $I_{b2}$ , (c) 经历模态 1, (d) 经历模态 1 和模态 2, (e) 经历三种模态

3) 当  $i_n \geq I_{b2}$  时, 在一个时钟周期内变换器依次经历了三种模态, 如图 2(e) 所示, 称此时为工作模式  $F_3$ . 由(2), (3)式可得

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= F_3(X_n) \\ &= e^{A_3t_3} e^{A_2t_2} e^{A_1t_1} X_n + e^{A_3t_3} e^{A_2t_2} (e^{A_1t_1} - I) A_1^{-1} B_1 E. \end{aligned}$$

(7)

变换器经历模态 2 所满足的条件为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{i_2} \end{pmatrix} = e^{A_2t_2} \begin{pmatrix} I_{ref} \\ v_{i_1} \end{pmatrix}.$$

(8)

(7) 式中的  $t_1$  和  $t_2$  可由(6), (8)式解得,  $t_3 = T - t_2 - t_1$ .

三种可能的离散映射由两个边界情况划分. 对于边界  $I_{b1}$ , 由图 2(a) 可知, 变换器只经历模态 1, 把  $i_{n+1} = I_{ref}$  和  $i_n = I_{b1}$  代入(4)式解得

$$I_{b1} = \frac{I_{ref}}{a(T)} + \frac{b(T)v_n}{La(T)} - \left[ \frac{1-a(T)}{R} + \frac{b(T)}{L} \right] \frac{E}{a(T)}.$$

(9)

对于边界  $I_{b2}$ , 由图 2(b) 可知, 变换器依次经历了模态 1 和模态 2, 把  $i_{n+1} = 0$  和  $i_n = I_{b2}$  代入(5)式解得

$$I_{b2} = \frac{I_{ref}}{a(t_1)} + \frac{b(t_1)v_n}{La(t_1)} - \left[ \frac{1-a(t_1)}{R} + \frac{b(t_1)}{L} \right] \frac{E}{a(t_1)},$$

(10)

式中  $t_1$  可由(6)式解得. 至此, 电流反馈型 Buck 变换器分段光滑系统的离散模型为

$$X_{n+1} = \begin{cases} F_1(X_n) & (i_n \leq I_{b1}), \\ F_2(X_n) & (I_{b1} \leq i_n \leq I_{b2}), \\ F_3(X_n) & (i_n \geq I_{b2}). \end{cases} \quad (11)$$

这里  $F_1(X_n)$ ,  $F_2(X_n)$  和  $F_3(X_n)$  分别由(4), (5)和(7)式表示, 边界  $I_{b1}$  和  $I_{b2}$  分别由(9)和(10)式表示.

3. 电流反馈型 Buck 变换器分段光滑系统的分岔行为

本文以  $I_{ref}$  为分岔参数, 其他电路参数为  $E = 20 \text{ V}$ ,  $L = 3.3 \text{ mH}$ ,  $C = 1000 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $R = 19 \text{ }\Omega$ ,  $T = 400 \text{ }\mu\text{s}$ . 根据(11)式, 运用 Matlab 进行数值仿真. 每个迭代点都从  $X_0 = (0, 0)$  开始, 迭代 5000 个点后把最后的 150 个点显示于图 3 所示的分岔图中.

从图 3 可以看出, 随着  $I_{ref}$  的增大, 在  $I_{ref} = 0.2779 \text{ A}$  处变换器从 DCM 的周期 1 转变到 CCM 的周期 1, 即从工作模式  $F_3$  突变到工作模式  $F_2$ . 当

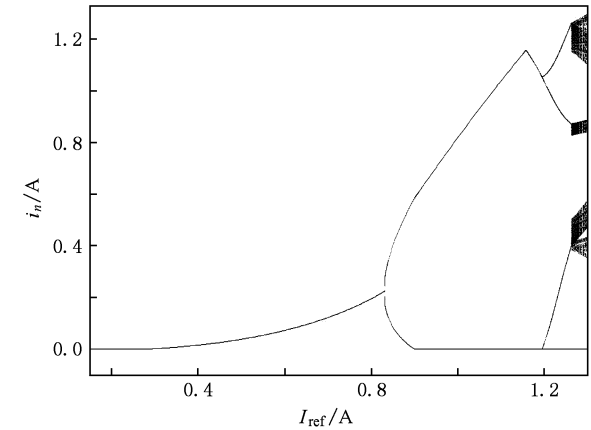


图 3 以  $I_{ref}$  为分岔参数的电感电流分岔图

$I_{ref} = 0.8296 \text{ A}$  时, 系统在 CCM 下发生了周期 1 到周期 2 的分岔, 分岔前的周期 1 轨道与分岔后的周期 2 轨道是近似垂直的, 这与全局光滑系统中的倍周期分岔相同. 当  $I_{ref}$  增大到  $0.9007 \text{ A}$  时, 周期 2 又从 CCM 进入到 DCM, 而且周期 2 的两个分支都存在着一定角度且并不光滑.  $I_{ref}$  继续增大, 采样点的  $i$  也随着增大. 在  $I_{ref} = 1.1578 \text{ A}$  处, 周期 2 的上分支向下折, 相应采样点的  $i$  也变得越来越小.  $I_{ref} = 1.1947 \text{ A}$  时, 周期 2 分岔为周期 4, 分岔前后的周期轨道并不近似垂直且存在着很大的角度. 当  $I_{ref} = 1.2625 \text{ A}$  时, 周期 4 轨道突然变为混沌轨道, 这是全局光滑系统中从没有出现过的情况. 全局光滑系统通常是由倍周期分岔的路径通向混沌, 此种从周期态突变到混沌态的现象只有在这种分段光滑系统中才能观察到. 下面将从最大 Lyapunov 指数(图 4)的角度来分析电流反馈型 Buck 变换器分段光滑系统的分岔行为. 在周期态时最大 Lyapunov 指数小于零, 一旦系统进入混沌态, Lyapunov 指数将大于零.

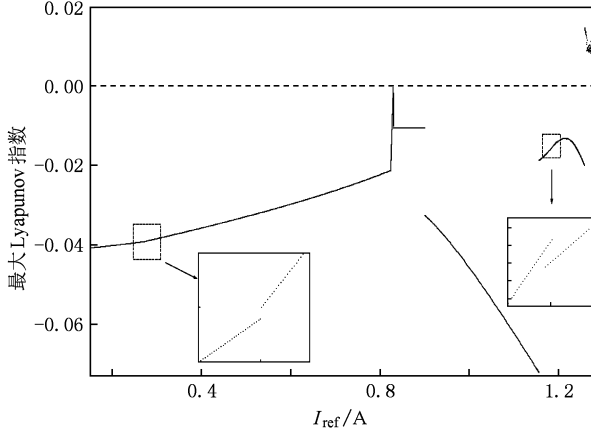


图 4 系统的最大 Lyapunov 指数

从图 4 可知,在分岔图中的各个突变点处,最大 Lyapunov 指数都是跳跃式的,然而光滑系统中的最大 Lyapunov 指数都是连续的. 在  $I_{\text{ref}} = 0.8296 \text{ A}$  处,最大 Lyapunov 指数等于零,说明系统发生了倍周期分岔,这和分岔图是对应的. 分岔图中,不管是周期态的转折还是从周期态直接进入混沌态,这些都是与分段光滑系统有关,这些突变点都是因为分段光滑系统所特有的边界碰撞所引起.

4. 电流反馈型 Buck 变换器分段光滑系统定点稳定存在域及边界碰撞分析

相平面中的点  $(i_n, v_n)$  必然可以由分段迭代映射(11)式得到下一个迭代点. 将满足  $F_1, F_2$  和  $F_3$  的迭代条件  $(i_n, v_n)$  的集合分别定义为区域 A、区域 B 和区域 C.

4.1. 周期 1

下面将研究三段迭代映射  $F_1, F_2$  和  $F_3$  各自周期 1 定点的存在性和稳定性,求得其稳定存在域.

4.1.1.  $F_1$  的周期 1

$F_1$  中的定点方程由(4)式决定,设  $F_1$  定点为  $X_1^* = (i_1^*, v_1^*)$ . 由  $F_1$  的存在条件可以得到  $i_1^*$  满足的条件为  $I_{\text{ref}} \geq I_{b2} \geq I_{b1} \geq i_1^*$ .  $X_1^*$  满足的方程如下:

$$X_1^* = e^{A_1 T} X_1^* + (e^{A_1 T} - I) A_1^{-1} B_1 E. \quad (12)$$

由于(5),(7)和(10)式都不存在解析解,因此本文中所解的方程都是随着参考电流  $I_{\text{ref}}$  而改变的数值解. 解(12)式并把解得的  $X_1^*$  代入(9)和(10)式计算出  $I_{b1}$  和  $I_{b2}$ , 得到它们随  $I_{\text{ref}}$  的变化关系,结果如图 5 所示. (12)式中的雅可比行列式与  $I_{\text{ref}}$  无关,为  $e^{A_1 T}$ , 所以图 5 中特征值的绝对值为一常数,  $|\lambda_{1,2}| = 0.9896$ . 如上所述,满足  $i_1^*$  的只能是在区域 A,但是  $i_1^*$  在区域 A 中的部分并不满足条件  $I_{\text{ref}} \geq I_{b2} \geq I_{b1}$ , 而是  $I_{\text{ref}} \leq I_{b2} \leq I_{b1}$ . 因此,  $F_1$  并不存在周期 1.

4.1.2.  $F_2$  的周期 1

设  $F_2$  定点为  $X_2^* = (i_2^*, v_2^*)$ , 定点方程由(5)式决定.  $i_2^*$  满足的条件是  $I_{\text{ref}} \geq I_{b2} \geq i_2^* \geq I_{b1}$ . 因此有

$$X_2^* = e^{A_2(T-t_1)} e^{A_1 t_1} X_2^* + e^{A_2(T-t_1)} (e^{A_1 t_1} - I) A_1^{-1} B_1 E. \quad (13)$$

解(13)式得  $i_2^*$ , 计算得出相应的  $I_{b1}, I_{b2}$  和雅可比矩

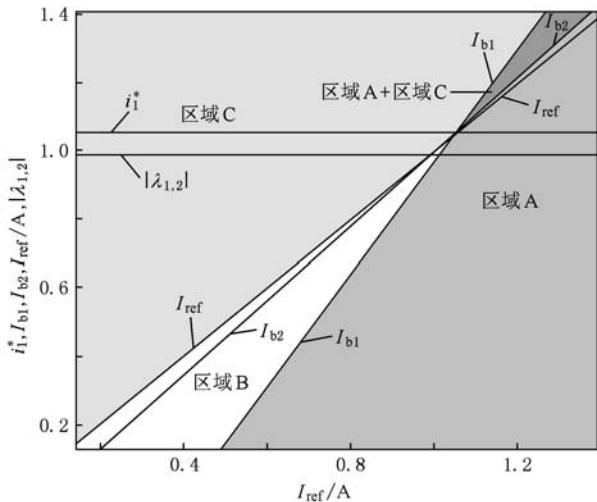


图 5  $F_1$  的周期 1 定点分析

阵的两个特征值,得到如图 6 所示的关系. 从图 6 可以看出,当  $I_{\text{ref}} \geq 0.2779 \text{ A}$  时,  $i_2^*$  进入区域 B,并在区域 B 中符合  $I_{\text{ref}} \geq I_{b2} \geq i_2^* \geq I_{b1}$  的条件. 但是从稳定性方面看,当  $I_{\text{ref}} \geq 0.8296 \text{ A}$  时,雅可比矩阵的一个特征值  $\lambda_1 < -1$ . 根据倍周期分岔理论,雅可比矩阵的特征值有一个等于 -1 时将会发生倍周期分岔. 此时,将会从  $F_2$  的周期 1 进入  $F_2$  的周期 2,我们称  $I_{\text{ref}} = 0.8296 \text{ A}$  为倍周期分岔点 BF1. 因此,分岔图中  $I_{\text{ref}}$  从 0.2779 到 0.8296 A 范围内应该是  $F_2$  的周期 1. 在  $I_{\text{ref}} = 0.2779 \text{ A}$  处,  $I_{b2}$  与  $i_2^*$  两条曲线重合,说明此时发生了边界碰撞且系统进入工作模式  $F_2$ , 称此碰撞点为 BCB1.  $I_{b2}$  把工作模式  $F_2$  和  $F_3$  加以区分,所以在 BCB1 还没进入  $F_2$  前变换器应该工作在

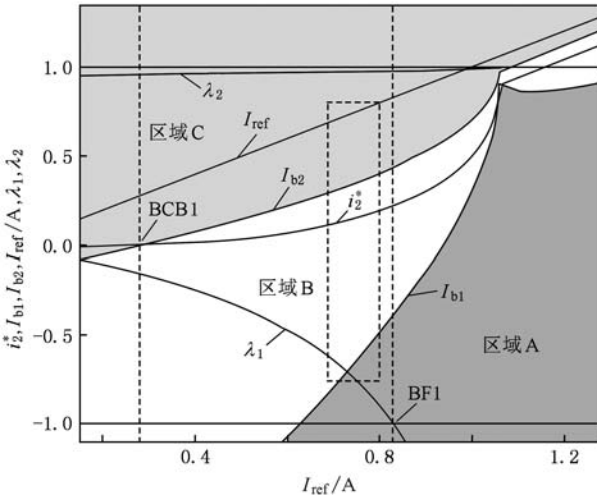


图 6  $F_2$  的周期 1 定点分析



模式  $F_3$ .

为了更好说明  $F_2$  的周期 1, 我们把图 6 中虚线框部分  $I_{\text{ref}} = 0.75 \text{ A}$  的电流波形示于图 7 中. 从图 7 可以看出, 变换器只经历模式 1 和模式 2, 因此是处于工作模式  $F_2$ .

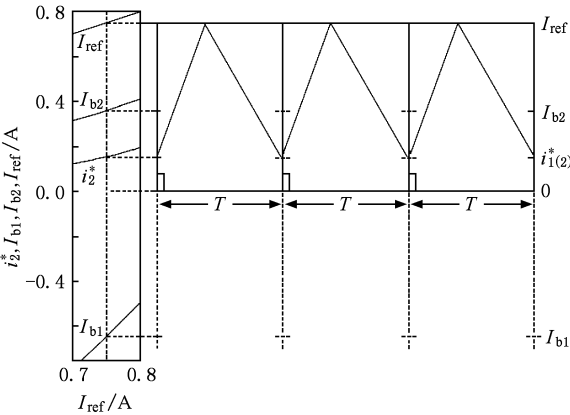


图 7  $F_2$  的周期 1 电感电流波形

4. 1. 3.  $F_3$  的周期 1

令  $F_3$  定点为  $X_3^* = (i_3^*, v_3^*)$ ,  $i_3^*$  符合的条件为  $I_{\text{ref}} \geq i_3^* \geq I_{b2} \geq I_{b1}$ . 根据 (7) 式可得

$$X_3^* = e^{A_3(T-t_1-t_2)} e^{A_2 t_2} e^{A_1 t_1} X_3^* + e^{A_3(T-t_1-t_2)} e^{A_2 t_2} (e^{A_1 t_1} - I) A_1^{-1} B_1 E. \quad (14)$$

对 (14) 式求解后代入 (9) 和 (10) 式, 计算得出  $I_{b1}$  和  $I_{b2}$ , 并将得到的雅可比矩阵的特征值示于图 8. 图 8

中的两个特征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  都在  $-1$  与  $1$  之间, 说明  $i_3^*$  在这个区间中都是稳定域. 另一方面, 在区域 C 中  $i_3^*$  满足条件  $I_{\text{ref}} \geq i_3^* \geq I_{b2} \geq I_{b1}$ , 所以  $i_3^*$  的存在域应该是  $i_3^*$  在区域 C 中的部分, 即为分岔图中  $I_{\text{ref}}$  从开始到  $0.2779 \text{ A}$  的那一段. 如上所述, 在  $I_{\text{ref}} = 0.2779 \text{ A}$  处发生了第一次边界碰撞, 并且是从工作模式  $F_3$  进入工作模式  $F_2$ . 在碰撞点处, 碰撞前后雅可比矩阵的特征值分别为  $-0.1544, 0.9618$  和  $0.0028, 0.9441$ , 这也说明碰撞前后各自的周期 1 都是稳定的. 图 8 的虚线框部分  $F_3$  的周期 1 和碰撞点处的电流波形示于图 9.

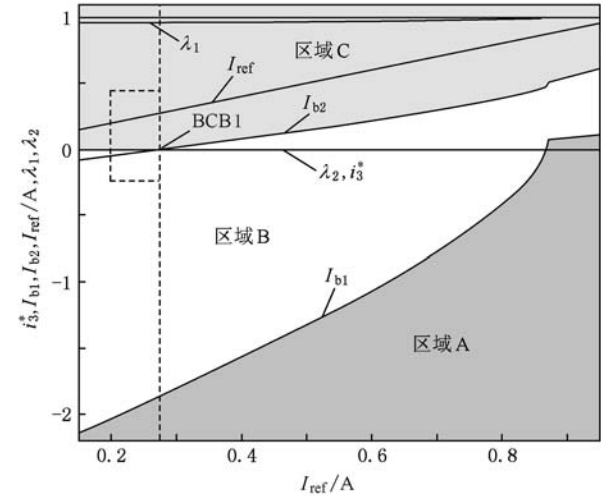


图 8  $F_3$  的周期 1 定点分析

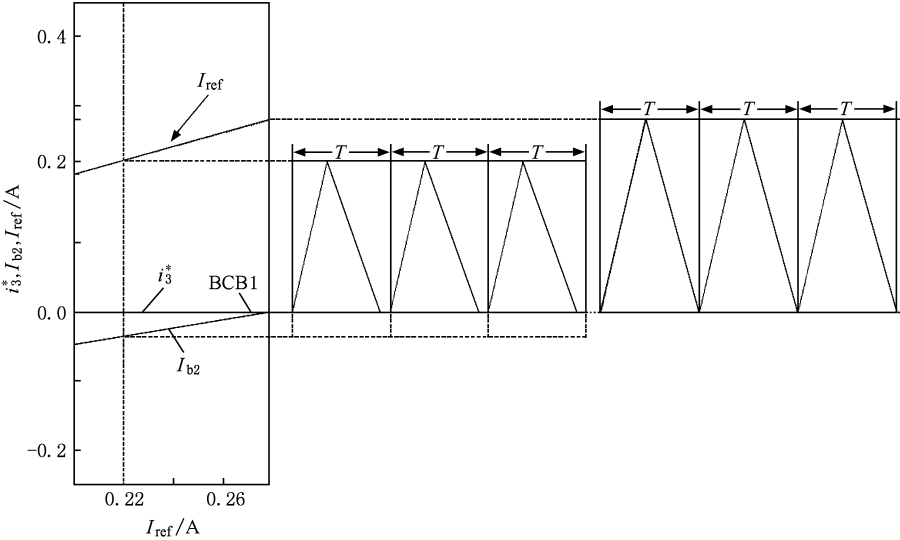


图 9  $F_3$  的周期 1 和碰撞点 BCB1 处电感电流波形

4.2. 周期 2

图 4 所示的最大 Lyapunov 指数说明各段的周期 2 在碰撞前后都是稳定的. 因为最大 Lyapunov 指数都小于零, 这同时也说明各周期 2 中的雅可比矩阵的最大特征值的绝对值应该都小于 1. 因此对于各段周期 2, 各自的存在域都是其稳定域, 下面将不再重复分析周期 2 的稳定域. 定义  $F_{ij}$  表示  $F_i$  与  $F_j$  组成的周期 2 迭代映射.

4.2.1.  $F_{22}$  周期 2

当  $I_{\text{ref}} = 0.8296 \text{ A}$  时,  $F_2$  周期 1 的雅可比矩阵最大特征值开始小于  $-1$ , 并且也没有发生边界碰撞的情况. 因此, 在  $I_{\text{ref}} = 0.8296 \text{ A}$  以后应该是由两个  $F_2$  组成的周期 2, 即是  $F_{22}$  周期 2. 设  $F_{22}$  周期 2 的两个定点为  $X_{22}^* = (i_{22}^*, v_{22}^*)$  和  $X_{22}^{*'} = (i_{22}^{*'}, v_{22}^{*'})$ , 根据周期 2 的定义<sup>[20]</sup>和(5)式可得

$$\begin{aligned} X_{22}^{*'} &= F_2(X_{22}^*) \\ &= F_2(F_2(X_{22}^{*'})), \\ X_{22}^* &= F_2(X_{22}^{*'}) \\ &= F_2(F_2(X_{22}^*)). \end{aligned} \tag{15}$$

令  $I_{\text{ref}} \in [0.82 \text{ A}, 0.915 \text{ A}]$ , 解(15)式并将解得的  $X_{22}^*$  代入边界方程, 计算得出的边界值示于图 10. 由于  $X_{22}^{*'}$  定点并没有发生边界碰撞的情况, 此处就没有得出其边界. 两个定点的  $v$  值相差很小, 导致相应的边界值也相差很小. 因此, 为了分析方便图 10 只给出  $X_{22}^*$  的边界. 在下面的分析图中都采用类似的

方法, 只给出下一个有边界碰撞情况发生的定点的边界值. 从图 10 可知, 在  $I_{\text{ref}} = 0.8296 \text{ A}$  前, 方程的解只有一个, 这就是  $F_2$  周期 1 的情况, 此后便在区域 B 中出现  $i_{22}^*$  和  $i_{22}^{*'}$  两个定点, 变换器工作在模式  $F_2$ . 在  $I_{\text{ref}} = 0.9007 \text{ A}$  处,  $i_{22}^*$  与  $I_{b2}$  碰撞, 称此点为边界碰撞点 BCB2. 碰撞后系统将进入其他的工作模式. 系统在  $F_{22}$  周期 2 和 BCB2 处的电感电流波形也示于图 10 中, 由此可知, 在 BCB2 处  $X_{22}^*$  开始进入工作模式  $F_3$ . 因此,  $F_{22}$  周期 2 的稳定存在域为  $I_{\text{ref}} \in [0.8296 \text{ A}, 0.9007 \text{ A}]$ .

4.2.2.  $F_{32}$  周期 2

系统经过 BCB2 后,  $X_{22}^*$  定点将从工作模式  $F_2$  进入工作模式  $F_3$ , 而  $X_{22}^{*'}$  将还是工作在模式  $F_2$ . 因此, 接下来的周期 2 应该是由  $F_3$  与  $F_2$  组成的  $F_{32}$  周期 2. 设  $F_{32}$  周期 2 的两个定点为  $X_{32}^* = (i_{32}^*, v_{32}^*)$  和  $X_{23}^* = (i_{23}^*, v_{23}^*)$ , 由迭代映射得

$$\begin{aligned} X_{23}^* &= F_2(X_{32}^*) \\ &= F_2(F_3(X_{23}^*)), \\ X_{32}^* &= F_3(X_{23}^*) \\ &= F_3(F_2(X_{32}^*)). \end{aligned} \tag{16}$$

在  $I_{\text{ref}} \in [0.85 \text{ A}, 1.2 \text{ A}]$  的范围内解(16)式, 得到的  $X_{32}^*$  及其边界值示于图 11. 从图 11 可以看出,  $i_{32}^*$  在  $I_{\text{ref}} = 1.1578 \text{ A}$  处与  $I_{b1}$  重叠, 这是系统发生的第三次边界碰撞, 称此点为 BCB3.  $F_{32}$  周期 2 和 BCB3 处的电感电流波形也示于图 11 中. 从图 11 中还可以看出, 在  $I_{\text{ref}} < 0.9007 \text{ A}$  处  $i_{23}^*$  不满足区域 C 的条

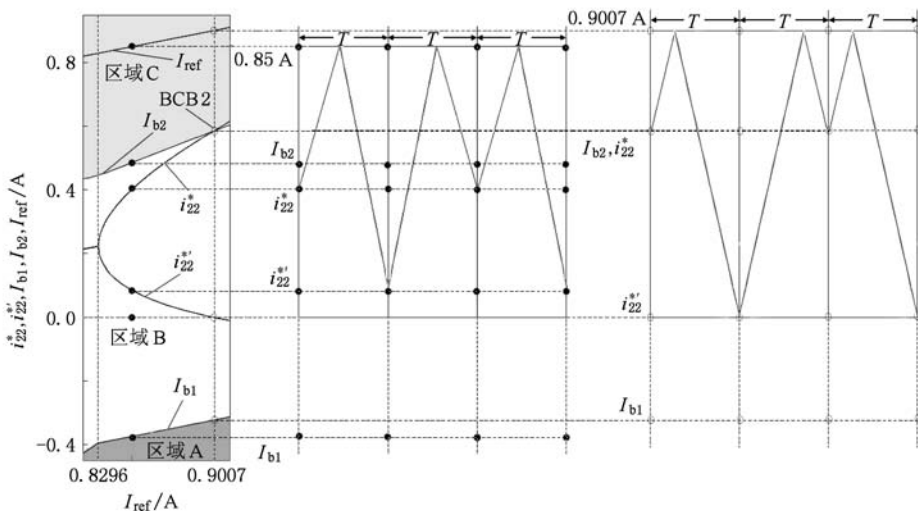


图 10  $F_{22}$  周期 2 定点分析与电感电流波形

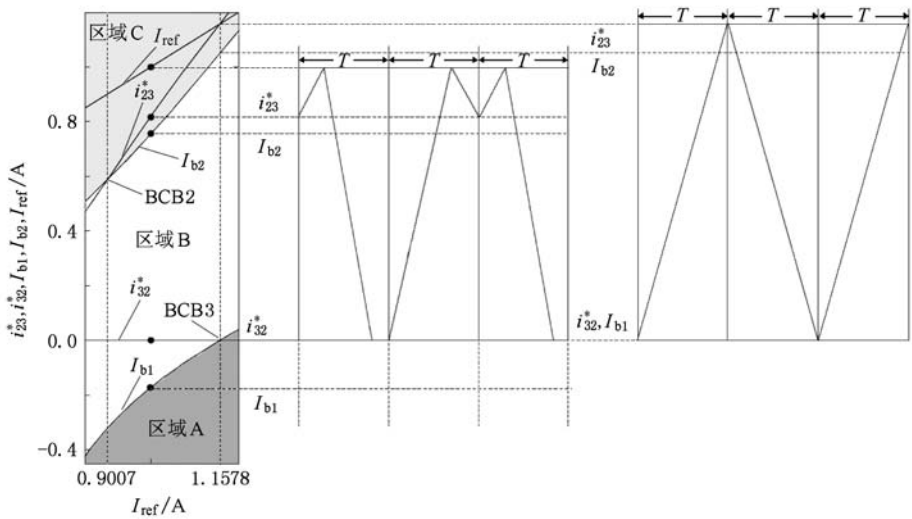


图 11  $F_{32}$  周期 2 定点分析与电感电流波形

件, 在  $I_{\text{ref}} > 1.1578 \text{ A}$  处  $i_{32}^*$  又不满足区域 B 的条件. 因此,  $F_{32}$  周期 2 的稳定存在域为  $I_{\text{ref}} \in [0.9007 \text{ A}, 1.1578 \text{ A}]$ .

4.2.3.  $F_{13}$  周期 2

在图 11 中,  $i_{32}^*$  与  $I_{b1}$  碰撞后  $i_{32}^*$  将从原来的工作模式  $F_2$  进入工作模式  $F_3$ . 因此, 周期 2 将从映射  $F_{32}$  转变为映射  $F_{13}$ . 设  $F_{13}$  周期 2 的两个定点为  $X_{13}^* = (i_{13}^*, v_{13}^*)$  和  $X_{31}^* = (i_{31}^*, v_{31}^*)$ , 因此有

$$\begin{aligned} X_{31}^* &= F_3(X_{13}^*) \\ &= F_3(F_1(X_{31}^*)), \\ X_{13}^* &= F_1(X_{31}^*) \\ &= F_1(F_3(X_{13}^*)). \end{aligned} \tag{17}$$

在  $I_{\text{ref}} \in [1.15 \text{ A}, 1.2 \text{ A}]$  范围内解 (17) 式, 并把解和  $X_{13}^*$  的边界值示于图 12. 从图 12 可知, 当  $I_{\text{ref}} = 1.1947 \text{ A}$  时,  $i_{13}^*$  就开始处于区域 B, 系统已经不符合  $F_{13}$  周期 2 的存在条件. 此时  $i_{13}^*$  与  $I_{b2}$  碰撞, 称  $I_{\text{ref}} = 1.1947 \text{ A}$  为 BCB4. 因此, 满足  $F_{13}$  周期 2 稳定存在域的范围是  $I_{\text{ref}} \in [1.1578 \text{ A}, 1.1947 \text{ A}]$ , 这正好也与分岔图中此段的图形一致. 此阶段的电感电流和 BCB4 的电感电流也显示于图 12 中.

4.3. 周期 4

从图 3 的分岔图可知, 在  $F_{13}$  的周期 2 之后, 变换器工作于周期 4 之中. 下面将分析构成周期 4 的工作模式顺序. 随着参考电流  $I_{\text{ref}}$  的增大, 定态时的电容电压  $v$  也会随着增大, 而电感电流上升的斜率正比于  $(E - v)/L$ . 因此, 随着  $I_{\text{ref}}$  的增大, 电感电流

上升的斜率将减小.  $i_{13}^*$  在与  $I_{b2}$  碰撞后将进入工作模式  $F_2$ , 由于上升电流斜率变小, 采样点的  $i$  将更远离  $I_{b2}$ . 经过工作模式  $F_2$  后, 电流将降低到小于  $I_{b1}$  不远处, 所以, 电感电流必须再经过工作模式  $F_1$ , 之后将上升到大于  $I_{b2}$  不远处. 因此,  $i$  又进入工作模式  $F_3$ . 工作模式  $F_3$  后,  $i = 0 \text{ A}$ ,  $i < I_{b1}$ , 变换器进入工作模式  $F_1$ , 然后又重新进入工作模式  $F_2$  进行循环. 周期 4 就是在  $F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_3 \rightarrow F_1$  的工作模式中循环变换. 设周期 4 的四个定点分别为  $X_{2131}^* = (i_{2131}^*, v_{2131}^*)$ ,  $X_{1213}^* = (i_{1213}^*, v_{1213}^*)$ ,  $X_{3121}^* = (i_{3121}^*, v_{3121}^*)$  和  $X_{1312}^* = (i_{1312}^*, v_{1312}^*)$ , 根据周期 4 的定义, 有

$$\begin{aligned} X_{1213}^* &= F_1(X_{2131}^*), \\ X_{3121}^* &= F_3(X_{1213}^*), \\ X_{1312}^* &= F_1(X_{3121}^*), \\ X_{2131}^* &= F_2(X_{1312}^*). \end{aligned} \tag{18}$$

令  $I_{\text{ref}} \in [1.19 \text{ A}, 1.27 \text{ A}]$ , 解 (18) 式并将  $X_{2131}^*$  的边界和 (18) 式的解示于图 13. 图 13 同时还示出了相关的电感电流波形. 如图 13 所示,  $F_{2131}$  周期 4 的稳定存在域为  $I_{\text{ref}} \in [1.1947 \text{ A}, 1.2625 \text{ A}]$ . 在  $I_{\text{ref}} = 1.2625 \text{ A}$  处,  $i_{2131}^*$  与  $I_{b1}$  产生边界碰撞, 碰撞后  $i_{2131}^*$  不再属于  $F_{2131}$  的周期 4, 称  $I_{\text{ref}} = 1.2625 \text{ A}$  为边界碰撞点 BCB5.

4.4. 混沌态

在周期 4 后期, 由于各个定点的  $v$  值相差越来越大, 导致各个定点的边界值相差也越来越大, 这也将导致更多的边界碰撞发生, 系统将更加复杂.



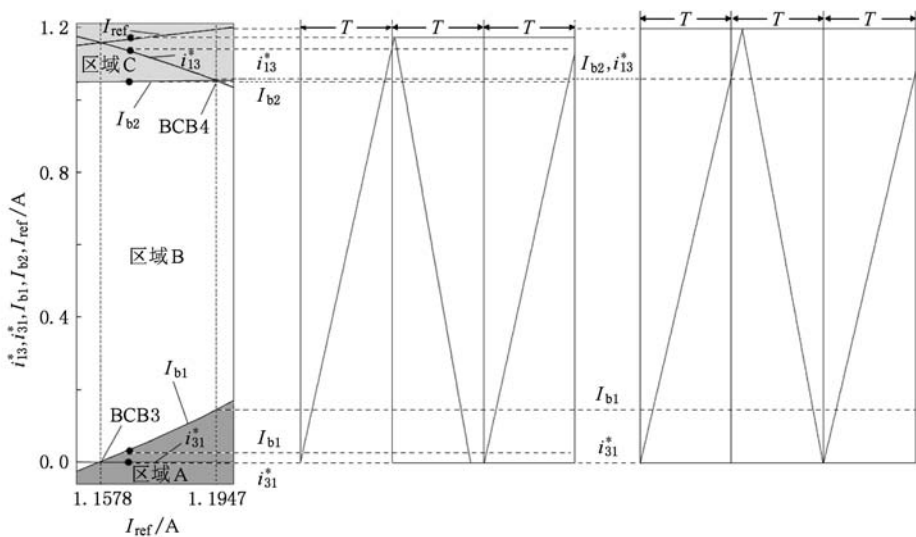


图 12  $F_{13}$  周期 2 定点分析与电感电流波形

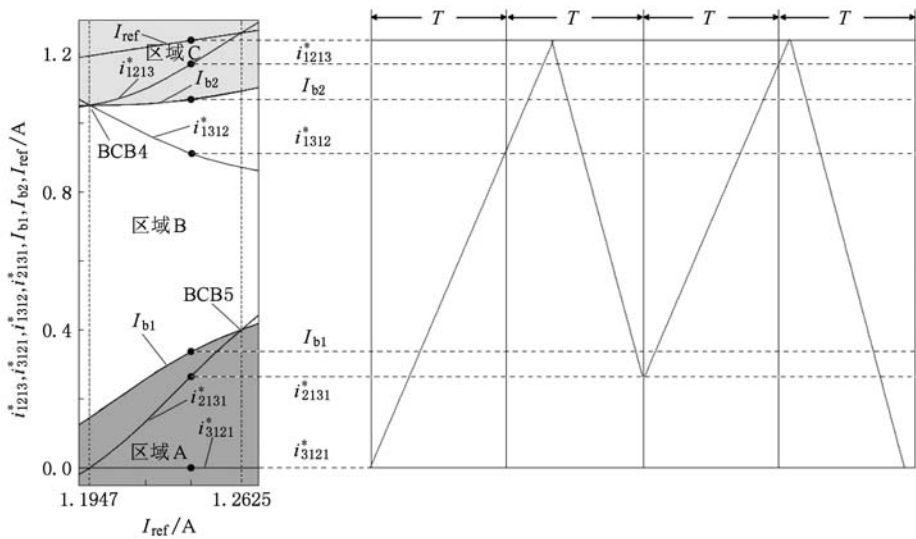


图 13 周期 4 分析与电感电流波形

当  $i_{2131}^*$  与  $I_{b1}$  碰撞后,系统将失去稳定性,因为碰撞后的最大 Lyapunov 指数开始大于零,此时的系统将具有不可预测性,说明系统已经处于混沌态.从分岔图也可以看出,当  $I_{\text{ref}} \geq 1.2625$  A 后变换器处于混沌态中,变换器工作模式将无顺序地在各个工作模式之间进行转换.

我们将以上分岔图中各段所属的定点、碰撞点及其碰撞边界、定点稳定存在域和工作模式都列于表 1.

### 5. 电流反馈型 Buck 变换器的电路仿真验证

利用 PSIM 仿真软件对电流反馈型 Buck 变换

器进行电路仿真验证.首先建立了如图 14 所示的 PSIM 仿真电路图,仿真电路中,运用电流传感器探测电感电流,并用电压探针读取电感电流  $i$ .测得的电感电流与作为参考电流的直流电压源  $V_{I_{\text{ref}}}$  比较后进入触发器并和频率为 2.5 kHz 的方波电压源  $V_s$  一起作为控制环控制电感电流.

仿真中,不断增大  $V_{I_{\text{ref}}}$ ,由电压探针读出的电感电流  $i$  也在不断发生变化.典型的仿真波形示于图 15.从图 15(a)到(g),峰值电流越来越大,同时在每一个脉冲开始时的  $i$  也在发生着变化,这种变化与上述理论计算是一致的,这也验证了理论分析的正确性.

表 1 分岔图各段分析

定点	碰撞点(碰撞边界)	稳定存在域 $I_{ref}/A$	工作模式
$i_3^*$	BCB1( $I_{b2}$ )	0.1500—0.2779	$F_3$
		0.2779	$F_3, F_2$
$i_2^*$	BF1	0.2779—0.8296	$F_2$
		0.8296	$F_2$
$i_{22}^*, i_{22}'$	BCB2( $I_{b2}$ )	0.8296—0.9007	$F_2$
		0.9007	$F_2, F_3$
$i_{23}^*, i_{32}^*$	BCB3( $I_{b1}$ )	0.9007—1.1578	$F_2 \Leftrightarrow F_3$
		1.1578	$F_2, F_1$
$i_{13}^*, i_{31}^*$	BCB4( $I_{b2}$ )	1.1578—1.1947	$F_1 \Leftrightarrow F_3$
		1.1947	$F_3, F_2$
$i_{1213}^*, i_{2131}^*$ $i_{3121}^*, i_{1312}^*$	BCB5( $I_{b1}$ )	1.1947—1.2625	$F_2 \rightarrow F_1$ $F_1 \leftarrow F_3$
		1.2625	$F_1, F_2$
混沌态		1.2625—1.300	$F_1, F_2, F_3$

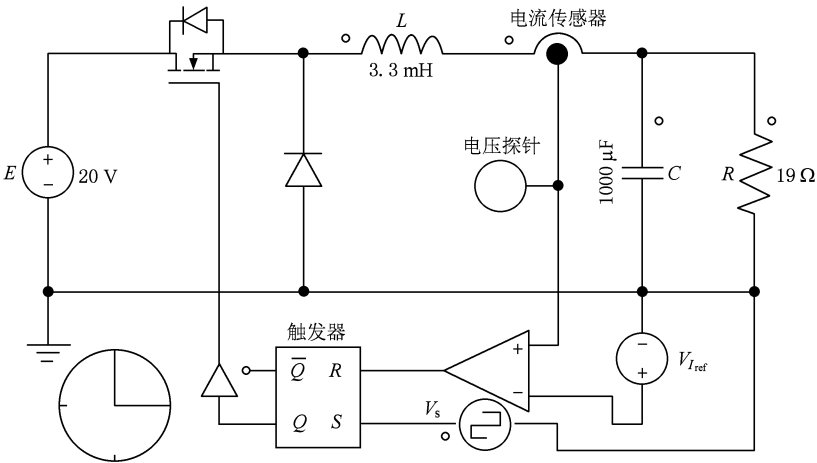


图 14 电流反馈型 Buck 变换器的 PSIM 仿真电路图

6. 电流反馈型 Buck 变换器实验电路验证

为了从实际中再次验证理论分析的正确性,根据图 1 和本文的电路参数搭建了图 16 所示的实验电路图. 实验中,开关管采用 IFR640 型金属氧化物半导体场效应晶体管,二极管用 MBR340 型快速恢复二极管,脉冲信号  $V_s$  用 NE555 型时基芯片产生,比较器和触发器分别运用 LM311 型集成运算放大器芯片和 CD4013 型双  $D$  触发芯片,驱动电路采用

TLP250 型专用驱动芯片并用 12 V 的独立直流电源单独供电. 电路中需要的其他电源用 20 V 直流干线电压源和 LM7812 型线性稳压芯片以及 ICL7660 型泵电源芯片转换而成.

实验中,电阻  $R_L=0.4\ \Omega$  用于电感电流采样,因此相应的参考电流和观测电流也应该减少为原来的  $2/5$ . 我们用  $R_L$  采样得到的电感电流随着参考电流不断增大的波形如图 17 所示. 实验结果表明,随着参考电流  $I_{ref}$  的增加,将会依次出现  $F_3$  周期 1、 $F_2$  周期 1、 $F_{22}$  周期 2、 $F_{32}$  周期 2、 $F_{13}$  周期 2、周期 4 和混沌现象,这与以上的理论分析完全符合.

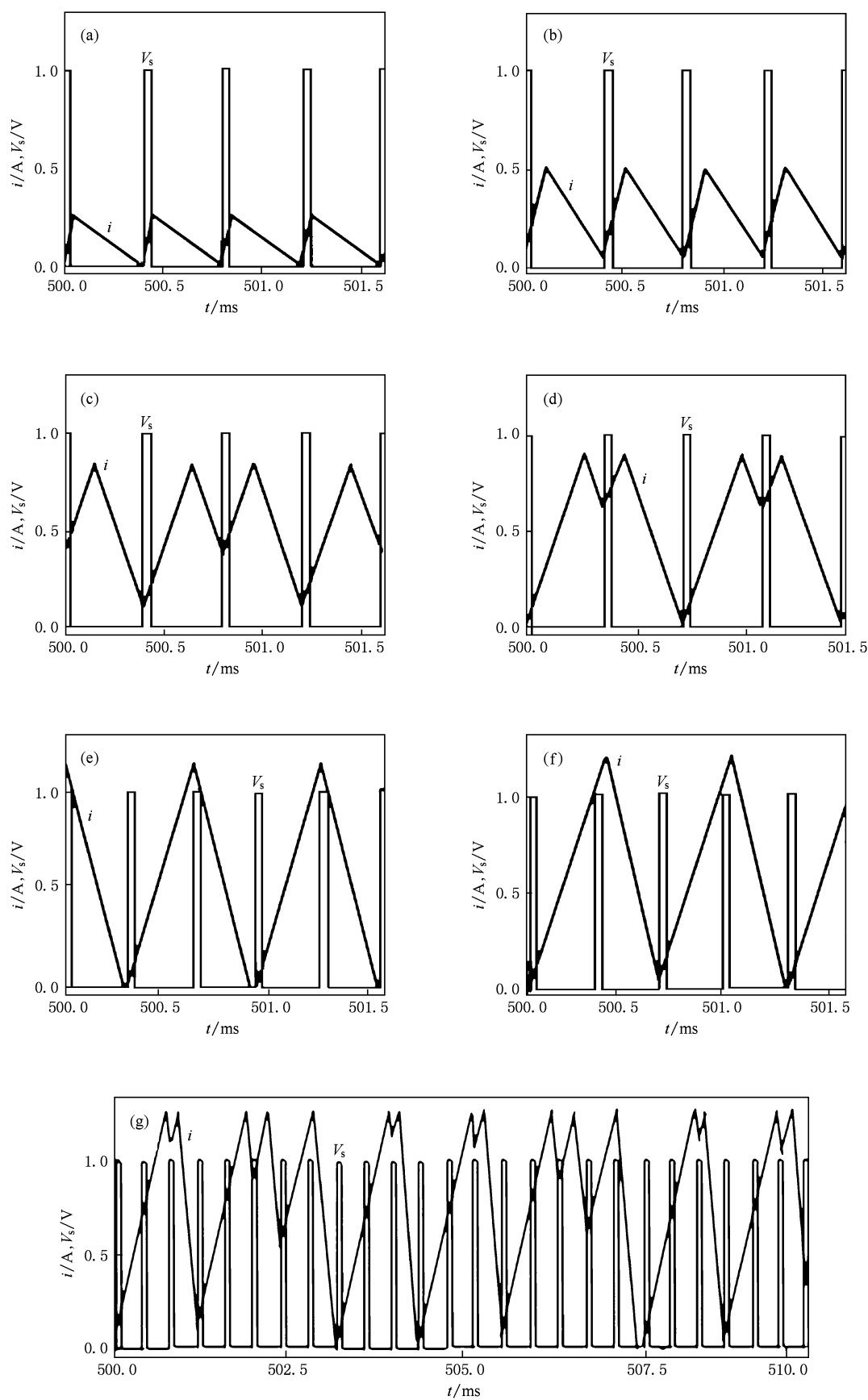


图 15 电流反馈型 Buck 变换器 PSIM 仿真波形 (a)  $F_3$  周期 1, (b)  $F_2$  周期 1, (c)  $F_{22}$  周期 2, (d)  $F_{32}$  周期 2, (e)  $F_{13}$  周期 2, (f) 周期 4, (g) 混沌态

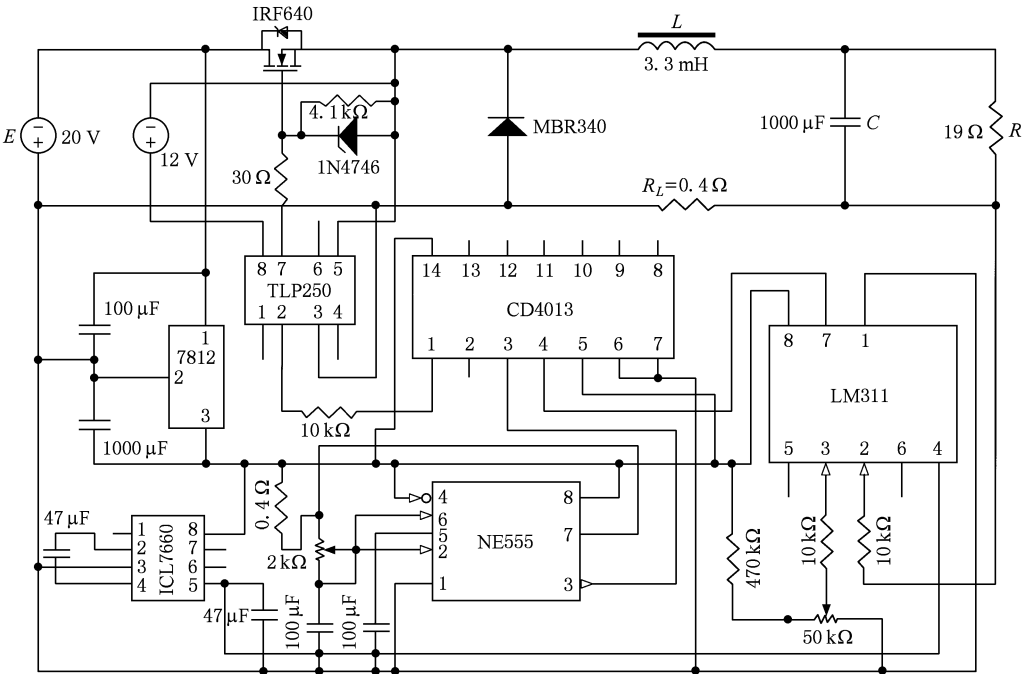


图 16 电流反馈型 Buck 变换器实验电路图

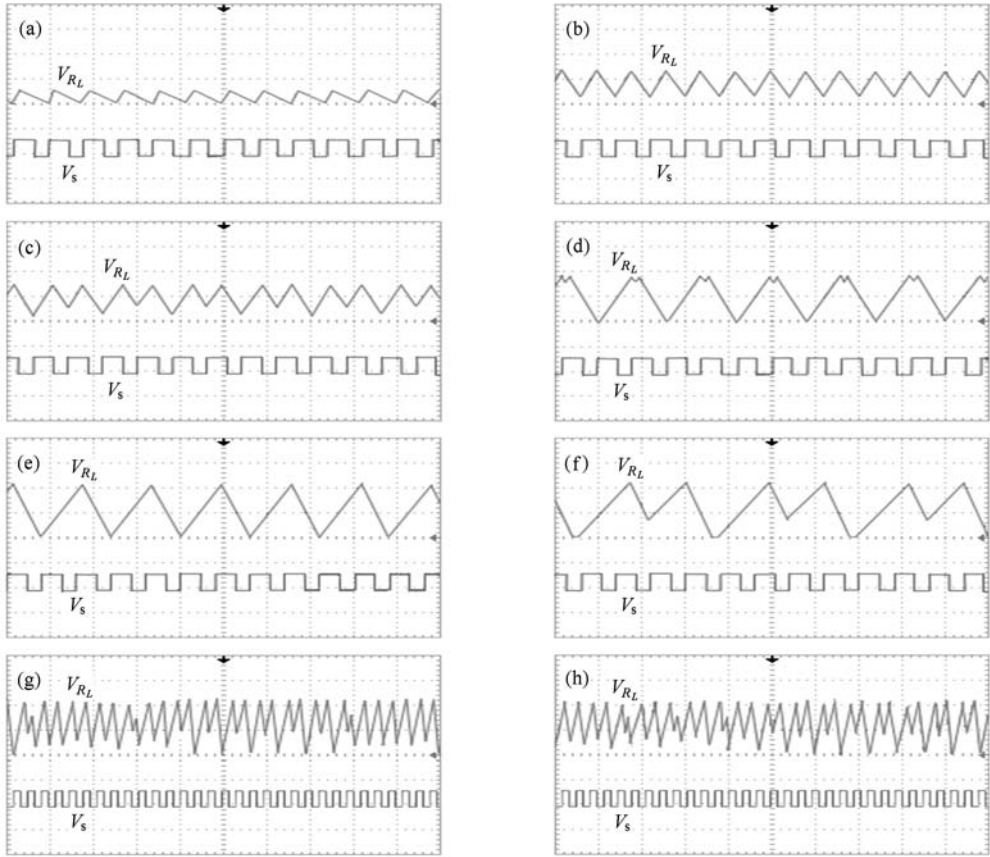


图 17 电流反馈型 Buck 变换器的实验波形 (a)  $F_3$  周期 1, (b)  $F_2$  周期 1, (c)  $F_{22}$  周期 2, (d)  $F_{32}$  周期 2, (e)  $F_{13}$  周期 2, (f) 周期 4, (g)  $I_{\text{ref}}=1.270\text{ A}$  时的混沌态, (h)  $I_{\text{ref}}=1.275\text{ A}$  时的混沌态

## 7. 结 论

本文对电流反馈型 Buck 变换器分段光滑系统的各种非线性行为进行了详细的研究和理论解释. 建立了两个边界三段形式的电流反馈型 Buck 变换器的离散模型; 根据离散模型, 利用 Matlab 进行了数值仿真, 给出了系统的分岔图; 运用离散形式的

非线性动力学理论分析了分岔图中各段定点的稳定存在域, 解释了分岔图的构成; 具体分析了边界碰撞点处变换器工作模式变换的情况, 进一步解释了边界碰撞的机理是变换器工作模式的转换. 仿真和实验结果都充分证明了理论分析的正确性. 本文拓宽了 DC-DC 变换器在分段光滑系统中的理论解释, 对 DC-DC 变换器在实际系统中的稳定性设计具有指导意义.

- 
- [1] Hamill D C, Jefferies D J 1988 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **35** 1059
  - [2] Deane J, Hamill D C 1990 *IEEE Trans. Power Electron.* **5** 260
  - [3] Luo X S, Wang B H, Chen G R, Quan H J, Fang J Q, Zou Y L, Jiang P Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 12 (in Chinese) [罗晓曙、汪秉宏、陈关荣、全宏俊、方锦清、邹艳丽、蒋品群 2003 物理学报 **52** 12]
  - [4] Zhang B, Qu Y 2003 *Proc. Chin. Soc. Electr. Eng.* **23** 99 (in Chinese) [张 波、曲 颖 2003 中国电机工程学报 **23** 99]
  - [5] Wang X M, Zhang B, Qiu D Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2728 (in Chinese) [王学梅、张 波、丘东元 2008 物理学报 **57** 2728]
  - [6] Yang R, Zhang B, Chu L L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2770 (in Chinese) [杨 汝、张 波、褚利丽 2008 物理学报 **57** 2770]
  - [7] Nusse H E, Ott E, Yorke J A 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1073
  - [8] Yang T, Jin Y H, Cheng S D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5224 (in Chinese) [杨 谈、金跃辉、程时端 2009 物理学报 **58** 5224]
  - [9] Banerjee S, Grebogi C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4052
  - [10] Roy I, Roy A R 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 577
  - [11] Banerjee S, Grebogi C, Ranjian P 2000 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **I** **47** 633
  - [12] Banerjee S, Karthik M S, Yuan G, Yorke J A 2000 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **I** **47** 389
  - [13] Wang X M, Zhang B 2009 *Proc. Chin. Soc. Electr. Eng.* **29** 22 (in Chinese) [王学梅、张 波 2009 中国电机工程学报 **29** 22]
  - [14] Robert B, Robert C 2002 *Int. J. Contr.* **75** 1356
  - [15] Maity S, Tripathy D, Bhattacharya K T, Banerjee S 2007 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **I** **54** 1120
  - [16] Zhusubaliyev Z T, Soukhoterlin E A, Mosekilde E 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **I** **50** 1047
  - [17] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2949 (in Chinese) [包伯成、许建平、刘 中 2009 物理学报 **58** 2949]
  - [18] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2729 (in Chinese) [戴 栋、马西奎、李小峰 2003 物理学报 **52** 2729]
  - [19] Li M, Ma X K, Dai D, Zhang H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1084 (in Chinese) [李 明、马西奎、戴 栋、张 浩 2005 物理学报 **54** 1084]
  - [20] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p268 (in Chinese) [刘秉正、彭建华 2004 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 268 页]



# Study on border collision and bifurcation of two-dimensional piecewise smooth systems in current mode controlled Buck converter<sup>\*</sup>

Xie Fan<sup>1)</sup> Yang Ru<sup>1)†</sup> Zhang Bo<sup>2)</sup>

1) (School of Physics and Electronic Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

2) (College of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

(Received 9 February 2010; revised manuscript received 23 April 2010)

## Abstract

Border collision bifurcations have received much attention in recent years. A class of piecewise smooth maps with two border and three zones is derived to describe the dynamics of a current-programmed Buck converter operating in a discontinuous mode. The numerical simulation is carried out and the bifurcation diagrams with the reference current as a parameter are obtained. Then, a concrete analysis of the stable existence condition of the fixed point is made, and the structure of bifurcation diagrams and a change in operation mode of the converter at the border collision point are studied. Finally, simulation and experimental results show that the theoretical analysis is correct.

**Keywords:** Buck converter, border collision point, bifurcations, stable existence condition

**PACC:** 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50937001) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50877028, 50777009).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: Lisayang702@yahoo.com.cn