

新的切换四涡卷超混沌系统及其电路实现*

刘扬正¹⁾ 林长圣^{1)†} 王忠林²⁾

1) (南京工程学院非线性物理研究所, 南京 211167)

2) (滨州学院物理与电子科学系, 滨州 256603)

(2010 年 3 月 11 日收到; 2010 年 6 月 25 日收到修改稿)

构建了新的包含 2 个子系统的切换四涡卷超混沌系统, 2 个子系统之间既相互关联又相互切换. 分析了 2 个子系统的分岔图、平衡点的稳定性、Lyapunov 指数以及动力学行为的演化过程. 设计了实现切换四涡卷超混沌系统的电路, 系统以时间依赖和状态依赖两种切换律进行任意切换和自主切换, 仅用一个电路就能实现 2 个子系统的切换功能.

关键词: 切换, 四涡卷混沌吸引子, 超混沌系统, 切换律

PACC: 0545

1. 引 言

由于多涡卷混沌系统具有动力学行为更为复杂和频谱更宽等特点, 多涡卷混沌系统的构建及其特性研究已成为近年来混沌理论和应用研究领域广泛关注的热点之一. 文献[1—4]利用光滑的二次非线性函数混沌系统产生了四涡卷混沌吸引子; 能够产生多方向多涡卷的混沌系统引起研究者的极大兴趣, 文献[5—12]利用多分段线性函数实现了多方向多涡卷混沌吸引子; 文献[13—16]研究了三次交叉乘积的非线性函数系统产生多涡卷吸引子, 文献[17]对多涡卷混沌系统的产生、电路实现及其应用做了详细的论述. 多涡卷混沌系统能产生频谱更宽的吸引子, 而超混沌系统拥有两个以上正的 Lyapunov 指数, 动力学行为更加复杂, 因此, 文献[18]提出了利用系统变量代换的方法, 使超混沌系统成倍产生多涡卷吸引子的方案.

包含多个子系统的切换混沌系统, 因产生的混沌信号具有多样性、选择性和灵活性的特点^[19], 逐渐引起人们的研究兴趣^[19—26]. 本文利用对原系统实施线性反馈控制和拓展系统变量方法, 构建了拥有 2 个子系统的新的切换四涡卷超混沌系统, 对每个子系统的分岔图、平衡点的稳定性、Lyapunov 指数

和分形维数以及动力学行为的演化过程进行了分析. 讨论了系统以时间依赖切换和状态依赖切换两种切换律进行切换的实现问题, 设计了实现新的切换四涡卷超混沌系统的电路, 仅用一个电路就能实现 2 个超混沌子系统的切换功能.

2. 系统的构成

2003 年, Liu 和 Chen^[1]构建了一个能产生 2 个双涡卷吸引子的新的三维自治混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - yz, \\ \dot{y} &= -by + xz, \\ \dot{z} &= -cz + xy.\end{aligned}\quad (1)$$

进一步的研究表明^[3], 对系统(1)实施线性反馈, 破坏系统的对称性能使系统产生四涡卷奇异吸引子

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - yz, \\ \dot{y} &= -by + xz, \\ \dot{z} &= -cz + xy + mx.\end{aligned}\quad (2)$$

深化系统(2)的构建思想, 因系统(1)的变量 x, y 满足对称性, 采用线性反馈控制和拓展系统变量方法^[21], 对系统(1)实施不同特性的系统变量线性反馈控制, 破坏其对称性^[3], 构建 2 个新的四维混沌系统

* 国家自然科学基金(批准号: 90405011)、江苏省高等学校自然科学基金(批准号: 07KJD120081)、山东省科技发展计划(批准号: 2009GG10001030)和南京工程学院自然科学基金(批准号: KXJ07068)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: cslin@njit.edu.cn

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + yz + z, \\ \dot{y} &= by - xz, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -cz + xy + w, \\ \dot{w} &= x - dw; \\ \dot{x} &= -ax + yz + z, \\ \dot{y} &= by - xz, \\ \dot{z} &= -cz + xy + w, \\ \dot{w} &= y - dw. \end{aligned} \quad (4)$$

系统(3)和(4)中正常数 a, b, c, d 为系统参数, x, y, z, w 为系统变量. 为了 2 个子系统之间切换操作能方便实现, 四维混沌系统(3)和(4)需满足以下两个条件: 一是保持系统的参数不变, 发生改变的是系统的变量; 二是系统参数的取值要保证所有子系统皆处于混沌状态. 系统(3)和(4)满足产生超混沌的条件(系统的维数不小于 4), 系统变量的线性反馈控制破坏了系统(1)的对称性, 能使系统产生多涡卷奇异吸引子.

一般而言, 切换系统由 N 个子系统和一组切换律构成, 连续切换系统用一组微分方程描述为^[27]

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad (5)$$

式中 $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ 为切换信号, $\{1, 2, \dots, N\}$ 表示与子系统顺序对应的序号集合. 切换系统按照切换律的性质一般有两种切换方式. 一种是时间依赖切换方式, 即 N 个子系统在人为控制的作用下任意地或按照某种规律随时间切换; 另一种是状态依赖切换方式, 即子系统的切换信号由系统的状态变量决定, 整个状态空间根据切换面划分为 N 个区域, 每个区域与一个子系统对应, N 个子系统随状态变化自主切换.

下面讨论以系统(3)和(4)为子系统, 在时间依赖切换和状态依赖切换两种切换律作用下, 切换四涡卷超混沌系统的特性和电路实现.

3. 系统的特性分析

子系统(3)的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & z & y+1 & 0 \\ -z & b & -x & 0 \\ y & x & -c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由系统(3)得到

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w}$$

$$= -a + b - c - d. \quad (7)$$

当系统参数的取值满足 $-a + b - c - d < 0$, 即保证系统(3)具有耗散性. 系统(3)有 5 个平衡点, 分别为 $P_0(0, 0, 0, 0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1, w_1)$, $P_2(-x_1, y_1, -z_1, -w_1)$, $P_3(x_2, y_2, z_2, w_2)$, $P_4(-x_2, y_2, -z_2, -w_2)$, 其中

$$x_1 = \sqrt{bc - b\sqrt{\frac{c}{a}}},$$

$$x_2 = -\sqrt{bc + b\sqrt{\frac{c}{a}}},$$

$$y_1 = \frac{x_1 z_1}{b},$$

$$y_2 = \frac{x_2 z_2}{b},$$

$$z_1 = \sqrt{ab - b\sqrt{\frac{a}{c}}},$$

$$z_2 = \sqrt{ab + b\sqrt{\frac{a}{c}}},$$

$$w_1 = \frac{x_1}{d},$$

$$w_2 = \frac{x_2}{d}.$$

当系统(3)的参数取值为 $a = 10, b = 2.5, c = 4, d = 1$ 时, 系统在平衡点 P_0 处的特征值为 $\lambda_1 = -9.9814, \lambda_2 = 2.5, \lambda_3 = -4.0551, \lambda_4 = -0.9636$, 4 个特征值皆为实数, 其中 3 个小于零, 1 个大于零, 因此平衡点 P_0 是不稳定的鞍点. 系统的 4 个非零平衡点恰好分布在 x - y 平面的 4 个象限, 即平衡点 $P_1(2.9014, 5.3243, 4.5877, 2.9014)$, 特征值为 $\lambda_1 = 0.3500 + i5.5196, \lambda_2 = 0.3500 - i5.5196, \lambda_3 = -12.1013, \lambda_4 = -1.0989$; 平衡点 $P_2(-2.9014, 5.3243, -4.5877, -2.9014)$, 特征值为 $\lambda_1 = -7.9196 + i5.8760, \lambda_2 = -7.9196 - i5.8760, \lambda_3 = 4.2573, \lambda_4 = -0.9192$; 平衡点 $P_3(-3.4031, -7.3243, 5.3808, -3.4031)$, 特征值为 $\lambda_1 = 0.5055 + i7.1075, \lambda_2 = 0.5055 - i7.1075, \lambda_3 = -12.5773, \lambda_4 = -0.9338$; 平衡点 $P_4(3.4031, -7.3243, -5.3808, 3.4031)$, 特征值为 $\lambda_1 = -8.2923 + i6.8205, \lambda_2 = -8.2923 - i6.8205, \lambda_3 = 5.1506, \lambda_4 = -1.0660$. 非零平衡点 P_1 和 P_3 的 4 个特征值中有 2 个实部大于零的复特征值, 非零平衡点 P_2 和 P_4 的 4 个特征值中有 1 个特征值为正实数, 因而 4 个非零平衡点都是不稳定的鞍焦点. 系统(3)的 Lyapunov 指数 $L_1 = 1.2340, L_2 = 0.1577, L_3 = 0, L_4$

$= -12.8402$, 有 2 个大于零的 Lyapunov 指数, 系统 (3) 处于超混沌状态. 由分形维数的计算公式

$$D_L = j + \frac{1}{|L_{(j+1)}|} \sum_{i=1}^j L_i$$

得到分形维数为 3.1167. 保持系统 (3) 的参数取值 $a = 10, c = 4, d = 1$ 不变, 得到系统变量 y 随参数 b 变化的分岔图 (图 1).

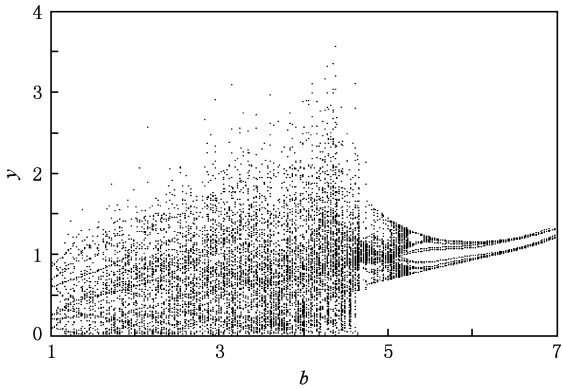


图 1 四涡卷超混沌系统 (3) 的分岔图

系统 (3) 随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 当参数 $b \in (2, 3.5)$ 系统有两个正的 Lyapunov 指数, 系统处于超混沌状态.

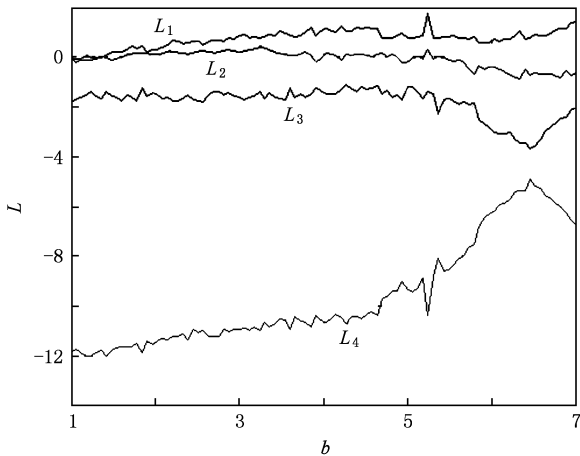


图 2 四涡卷超混沌系统 (3) 的 Lyapunov 指数谱

用同样的方法可以分析子系统 (4) 的特性. 系统 (4) 有 $P_0(0, 0, 0, 0), P_1(x_1, y_1, z_1, w_1), P_2(x_1, y_2, z_2, w_2), P_3(x_2, y_3, z_3, w_3), P_4(x_2, y_4, z_4, w_4)$ 5 个平衡点, 其中

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4bcd}}{2d},$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4bcd}}{2d},$$

$$y_{1,2} = \frac{x_1 z_{1,2}}{b},$$

$$y_{3,4} = \frac{x_2 z_{3,4}}{b},$$

$$z_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4abx_1^2}}{2x_1},$$

$$z_{3,4} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4abx_2^2}}{2x_2},$$

$$w_{1,2} = \frac{y_{1,2}}{d},$$

$$w_{3,4} = \frac{y_{3,4}}{d}.$$

系统 (4) 在平衡点 P_0 处的特征值为 $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = -c, \lambda_4 = -d$, 4 个特征值皆为实数, 其中 3 个小于零, 1 个大于零, 因此平衡点 P_0 是不稳定的鞍点. 当系统 (4) 的参数取值为 $a = 10, b = 2.5, c = 4, d = 1$ 时, 系统 4 个非零平衡点恰好分布在 $x-y$ 平面的 4 个象限, 即平衡点 $P_1(3.7016, 7.0642, 5.3491, 7.0642)$, 特征值为 $\lambda_1 = 1.1253 + i5.9823, \lambda_2 = 1.1253 - i5.9823, \lambda_3 = -13.8772, \lambda_4 = -0.8733$; 平衡点 $P_2(3.7016, -6.1723, -4.6737, -6.1723)$, 特征值为 $\lambda_1 = 1.2346 + i5.5770, \lambda_2 = 1.2346 - i5.5770, \lambda_3 = -14.1105, \lambda_4 = -0.8588$; 平衡点 $P_3(-2.7016, -4.1969, 4.5587, -4.1969)$, 特征值为 $\lambda_1 = 0.4056 + i4.3335, \lambda_2 = 0.4056 - i4.3335, \lambda_3 = -12.1029, \lambda_4 = -1.2038$; 平衡点 $P_4(-2.7016, 5.0489, -5.4841, 5.0489)$, 特征值为 $\lambda_1 = 0.1662 + i4.8992, \lambda_2 = 0.1662 - i4.8992, \lambda_3 = -11.6603, \lambda_4 = -1.1721$. 4 个非零平衡点的特征值中皆有 2 个实部大于零的复特征值, 因而 4 个非零平衡点都是不稳定的鞍焦点. 系统 (4) 的 Lyapunov 指数 $L_1 = 1.8840, L_2 = 0.3316, L_3 = 0, L_4 = -12.8786$, 有 2 个大于零的 Lyapunov 指数, 系统 (4) 同样处于超混沌状态, 分形维数为 3.1723.

4. 系统时间依赖切换功能的实现

讨论由子系统 (3) 和 (4) 在时间依赖切换律作用下构成的切换系统的实现和动力学行为的演化问题. 为了电路实现时满足乘法器和运算放大器对

电压的限制,对系统(3)和(4)实施系统变量的标度变换统一表述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + 10yz + z, \\ \dot{y} &= by - 10xz, \\ \dot{z} &= -cz + 10xy + w, \\ \dot{w} &= f(x, y) - dw. \end{aligned} \quad (8)$$

系统(8)包含2个子系统,当 $f(x, y) = x$ 时,为子系统 s_1 ;当 $f(x, y) = y$ 时,为子系统 s_2 . 时间依赖切换律

$\sigma: \{(t_i, s_i)\} (i = 1, 2)$, 时间段 t_1 对应子系统 s_1 , 时间段 t_2 对应子系统 s_2 . 根据系统(8)设计了实现四涡卷切换混沌系统的实际电路(图3). 通过对电路中切换控制器的操作可进行子系统间的切换,人为操作控制开关 K 选择线性反馈项 x 或 y , 利用图3中开关的任意切换,实现切换四涡卷超混沌系统随时间切换的功能.

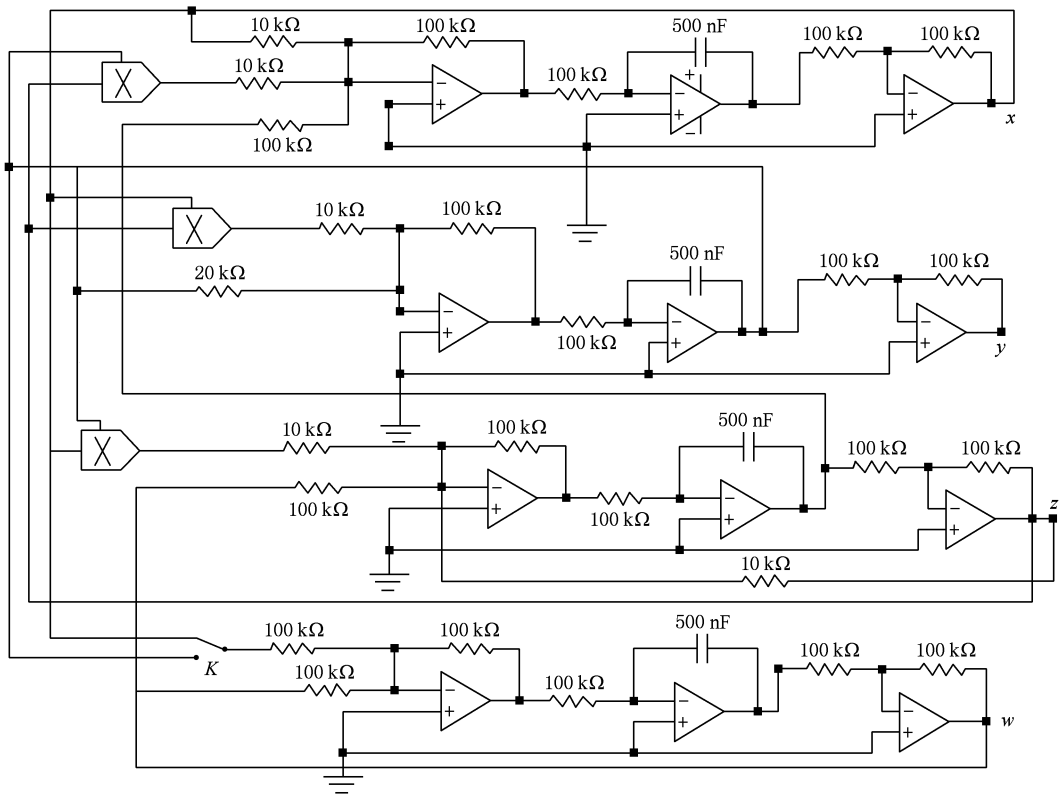


图3 切换四涡卷超混沌系统的电路图

利用图3所示的电路任意切换,四涡卷超混沌系统产生的二维相图如图4所示,图4(a)~(f)和(g)~(l)分别为子系统 s_1 和 s_2 产生的 $x-y, y-z, x-w, z-w, x-z, y-w$ 平面相图.

5. 系统状态依赖切换功能的实现

切换系统(8)的系统状态依赖切换律为

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x & (z \geq 0), \\ y & (z < 0). \end{cases} \quad (9)$$

由(9)式可知,系统切换信号由系统状态变量 z 的演

化决定,状态变量 z 的切换面将状态空间划分为两个区域,状态变量 $z \geq 0$ 对应子系统 s_1 , 状态变量 $z < 0$ 对应子系统 s_2 . 图5是利用图3所示的电路实现状态依赖切换系统自主切换产生的相图,图中所示为系统(8)状态依赖切换产生的 $x-y, y-z, x-w, z-w, x-z, y-w$ 平面相图.

由图4和图5可见,2个子系统不论在时间依赖切换还是在状态依赖切换作用下都能实现平滑切换,系统状态保持稳定,没有出现工程上要求尽量避免的振颤现象^[27]. 系统产生的混沌信号由2个子系统产生的混沌信号组合形成,与单一四涡卷超

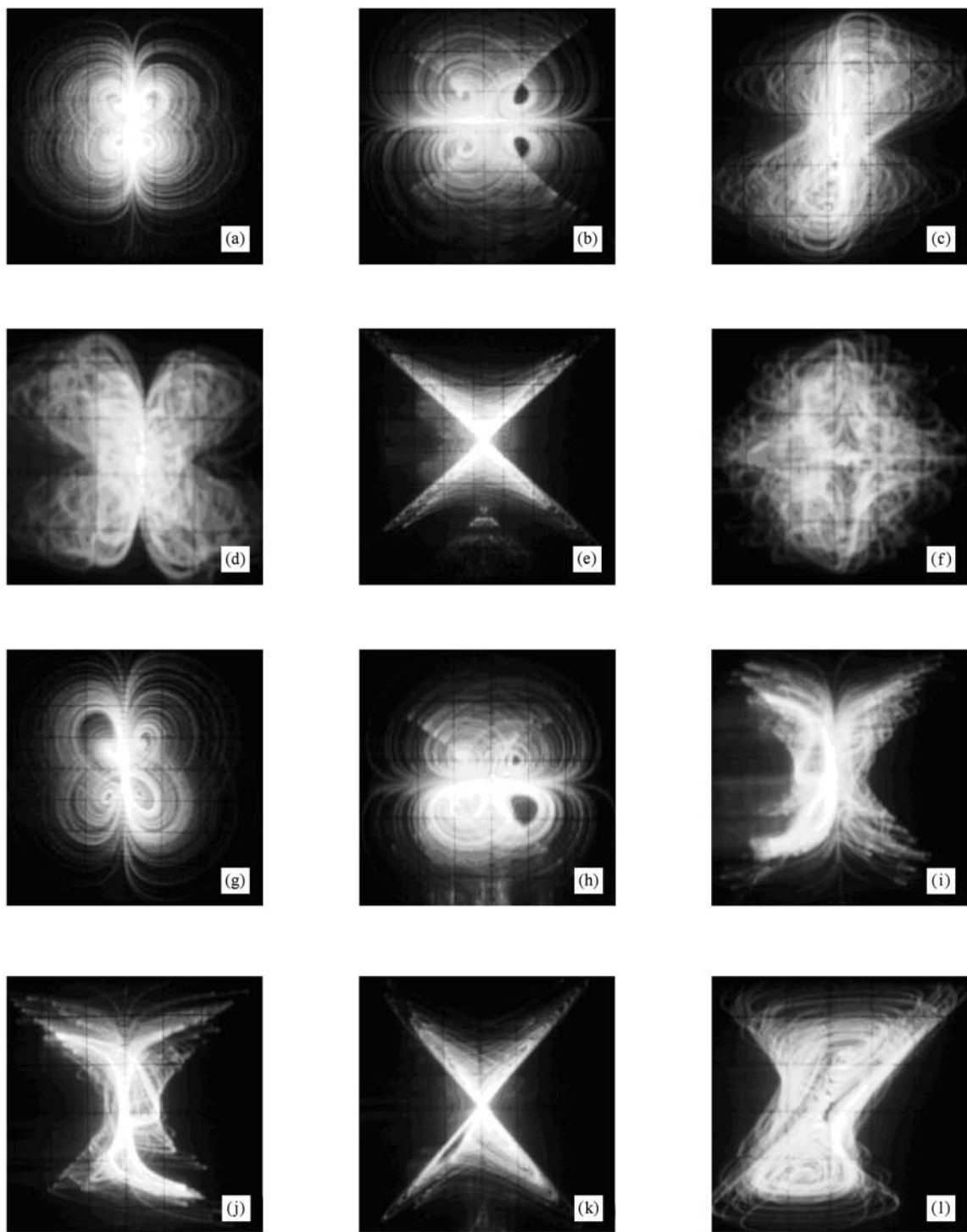


图4 切换四涡卷超混沌系统时间依赖切换的二维相图 (a)子系统 s_1 的 $x-y$ 平面相图, (b)子系统 s_1 的 $y-z$ 平面相图, (c)子系统 s_1 的 $x-w$ 平面相图, (d)子系统 s_1 的 $z-w$ 平面相图, (e)子系统 s_1 的 $x-z$ 平面相图, (f)子系统 s_1 的 $y-w$ 平面相图, (g)子系统 s_2 的 $x-y$ 平面相图, (h)子系统 s_2 的 $y-z$ 平面相图, (i)子系统 s_2 的 $x-w$ 平面相图, (j)子系统 s_2 的 $z-w$ 平面相图, (k)子系统 s_2 的 $x-z$ 平面相图, (l)子系统 s_2 的 $y-w$ 平面相图

混沌系统相比,切换四涡卷超混沌系统(8)和(9)的动力学行为具有更高的复杂性,系统的组合具有更

强的灵活性,系统动力学行为演化过程具有明显的多样性和时变性.

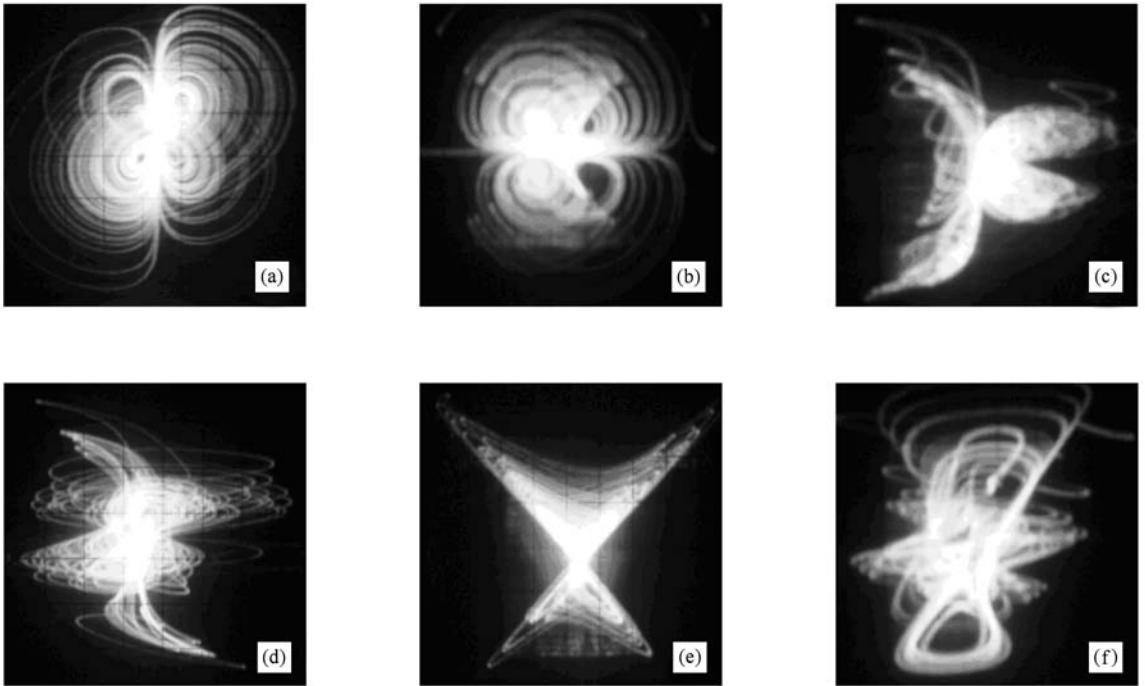


图5 切换四涡卷超混沌系统状态依赖切换的二维相图 (a) x - y 平面相图, (b) y - z 平面相图, (c) x - w 平面相图, (d) z - w 平面相图, (e) x - z 平面相图, (f) y - w 平面相图

6. 结 论

建构了一类包含 2 个子系统的切换四涡卷超混沌系统, 子系统间的关联性体现在系统有共同的内核, 而子系统间的切换性体现在对原系统实施系统变量线性反馈的特性不同. 正是由于对原系统实施了不同特性的系统变量线性反馈, 使各子系统表现

出不同的动力学演化行为, 且各子系统间具有拓扑不等价关系. 设计系统切换律, 既可以人为控制子系统随时间任意切换, 也可以依赖系统状态变量自主切换, 操作灵活方便, 组合方式变化多样, 系统产生的混沌信号具有时变性、多样性和复杂性的特点. 因此, 这类切换超混沌系统具有重要而广泛的实际应用价值.

- [1] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 261
- [2] Liu W B, Chen G R 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1395
- [3] Liu W B, Tang K S, Chen G R 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 4153
- [4] Qiao X H, Bao B C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8152 (in Chinese) [乔晓华、包伯成 2009 物理学报 **58** 8152]
- [5] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S, Peng S G, Lin Q H 2004 *Chin. Phys. B* **13** 317
- [6] Yu S M, Qiu S S 2004 *Acta Electron. Sin.* **32** 814 (in Chinese) [禹思敏、丘水生 2004 电子学报 **32** 814]
- [7] Zhang C X, Yu S M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 120 (in Chinese) [张朝霞、禹思敏 2009 物理学报 **58** 120]
- [8] Lü J H 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **I** **53** 1596
- [9] Lü J H, Yu S M, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **I** **53** 149
- [10] Wang F Q, Liu C X 2007 *Chin. Phys. B* **16** 942
- [11] Luo X H, Li H Q, Dai X G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7511 (in Chinese) [罗小华、李华青、代祥光 2008 物理学报 **57** 7511]
- [12] Chen L, Peng H J, Wang D S 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 3337 (in Chinese) [谌 龙、彭海军、王德石 2008 物理学报 **57** 3337]
- [13] Qi G Y 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 859
- [14] Zhang Y H, Qi G Y, Liu W L, Yan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3307 (in Chinese) [张宇辉、齐国元、刘文良、阎 彦 2006 物理学报 **55** 3307]
- [15] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、袁著社 2007 物理学报 **56** 3137]
- [16] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3734 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 3734]

- [17] Lü J H, Chen G 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 775
- [18] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8139 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 8139]
- [19] Lü J H, Yu X, Chen G 2003 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **50** 198
- [20] Zhang Y J, Wang C P, Wang G Y, Xu N, Wang Z L 2009 *J. China Univ. Posts Telecom.* **16** 122
- [21] Liu Y Z, Jiang C S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 771 (in Chinese) [刘扬正、姜长生 2009 物理学报 **58** 771]
- [22] Wang Z L, Liu B, Wang S B 2009 *Periodic. Ocean Univ. China* (Nat. Sci. Ed.) **39** 509 (in Chinese) [王忠林、刘滨、王树斌 2009 中国海洋大学学报(自然科学版) **39** 509]
- [23] Wang C P, Wang G Y 2009 *J. Hangzhou Dianzi Univ.* **29** 28 (in Chinese) [王翠平、王光义 2009 杭州电子科技大学学报 **29** 28]
- [24] Lin C X, Hao J H 2008 *J. Dyn. Contr.* **6** 254 (in Chinese) [林彩霞、郝建红 2008 动力学与控制学报 **6** 254]
- [25] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3107 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 3107]
- [26] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5131 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 5131]
- [27] Cheng D Z, Guo Y Q 2005 *Contr. Theory Appl.* **22** 954 (in Chinese) [程代展、郭宇骞 2005 控制理论与应用 **22** 954]

A new switched four-scroll hyperchaotic system and its circuit implementation *

Liu Yang-Zheng¹⁾ Lin Chang-Sheng^{1)†} Wang Zhong-Lin²⁾

1) (Institute of Nonlinear Physics, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

2) (Department of Physics and Electronics, Binzhou University, Binzhou 256603, China)

(Received 11 March 2010; revised manuscript received 25 June 2010)

Abstract

A new switched four-scroll hyperchaotic system with two subsystems which are interconnected and can be switched to each other, is generated. The two subsystems are analyzed in detail by presenting the bifurcation diagram, the feature of equilibrium, the phase portraits of chaotic attractor, the Lyapunov exponent and the evolution course of the dynamical action. A practical circuit is designed to conveniently realize two subsystems for the hyperchaotic systems each with only smooth quadratic nonlinearity. Based on time-dependent switching law and state-dependent switching law, the two subsystems can be switched from one to another either randomly or independently, just by using this special circuit.

Keywords: switching, four-scroll chaotic attractor, hyperchaotic system, switching law

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90405011), the Natural Science Foundation of Institution of Higher Education of Jiangsu Province, China (Grant No. 07KJD120081), the Science and Technology Development Program of Shandong Province, China (Grant No. 2009GG10001030) and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology, China (Grant No. KXJ07068).

† Corresponding author. E-mail: cslin@njit.edu.cn