

单周期控制 Cuk 功率因数校正变换器中的 中尺度不稳定现象分析*

张 源 张 浩[†] 马西奎

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2010 年 1 月 18 日收到; 2010 年 7 月 1 日收到修改稿)

基于单周期控制的自治性, 建立了描述单周期控制 Cuk 功率因数校正 (PFC) 变换器动力学行为的非线性状态平均模型. 在此基础上, 采用谐波平衡法得出了该系统周期平衡态的近似解析表达式, 继而通过判定 Floquet 乘子的变化趋势, 准确地预测了该变换器首次失稳时分岔点的位置和类型, 揭示了系统出现中尺度不稳定现象的物理机理. 研究表明, 该变换器周期闭轨稳定性的丧失, 即 Neimark-Sacker 分岔的发生是最终导致中尺度振荡现象产生的根本原因. 最后, 电路实验验证了理论分析的正确性. 这些研究结果不仅揭示了单周期控制 Cuk PFC 变换器中的中尺度分岔行为的本质, 而且为系统电路参数的设计提供了理论依据.

关键词: Cuk 功率因数校正变换器, 中尺度不稳定, 谐波平衡法, Floquet 理论

PACC: 0547, 4660D

1. 引 言

与以往的直流变换器不同, 功率因数校正 (PFC) 变换器属于一类具有周期态的分段光滑系统, 该变换器的显著特征表现为平衡态的周期性. 主要原因在于该电路中存在着一个具有双正弦形式的外部激励. 近年来, 有关 PFC 变换器中复杂行为的研究引起了人们的极大关注. 已有研究表明, 由于在固定开关频率的 PFC 变换器中同时存在慢的线周期和快的开关周期^[1]两种不同数量级的时间常量, 从而使得其表现出三种不同时间尺度的分岔行为^[2-10], 即快尺度分岔、中尺度分岔和慢尺度分岔. Iu 等^[2]对平均电流控制型 Boost PFC 变换器中的快尺度分岔现象进行了研究, 并给出了系统发生快尺度分岔的临界条件. Wong 等^[3]采用双平均法建立了平均电流控制型 Boost PFC 变换器的数学模型, 并分析了其中的慢尺度分岔现象. 随后, 王发强等^[4]分析了平均电流控制型 Boost PFC 变换器中的中尺度分岔现象, 并实验验证了该现象的存在. 这些研究工作不仅加深了人们对 PFC 变换器中复杂行为的理解, 而且对优化电路设计和提高系统性

能具有重要的意义.

单周期控制 PFC 变换器由于具有动态响应速度快、能有效抵偿输入电压扰动、无需模拟乘法器和输入电压检测等优点^[11], 因而在工业、航空航天和军事等领域中得到了广泛应用^[12-14]. 然而, 已有文献关于 PFC 变换器中多尺度分岔行为的研究, 主要局限于传统的脉冲宽度调制控制方法, 而对单周期控制高阶 (如 Cuk, SEPIC 等) PFC 变换器中的复杂行为研究迄今尚未见报道. 其主要原因是由于单周期控制是一种大信号非线性控制技术^[15], 是通过积分复位来产生脉冲宽度调制波形, 因而其电路系统中至少应包含两个开关管. 这不仅使得它会表现出更加丰富的动力学行为, 而且更重要的是也增加了系统分析的难度. 另一方面原因是高阶变换器中各状态变量之间的非线性耦合程度远大于低阶系统, 尤其是其工作模态除了电流连续模式 (CCM) 和电路断续模式之外, 还存在不连续电容电压模式和连续准谐振模式^[16], 因而所表现出的动力学行为机理也将更为复杂.

本文以单周期控制 Cuk PFC 变换器为例, 研究了该变换器中的中尺度不稳定现象. 首先建立了用于描述系统动力学行为的非线性状态平均模型, 在此模型

* 国家自然科学基金 (批准号: 50607015) 和中央高校基本科研基金 (批准号: XJJ20100058) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: haozhang@xjtu.edu.cn

基础上采用谐波平衡法计算出系统周期平衡态的近似解析表达式, 并应用 Floquet 理论分析该系统周期闭轨的稳定性, 以揭示中尺度分岔产生的内在起因. 最后, 通过电路实验对理论分析进行了验证.

2. 电路描述与数值仿真

图 1 所示为单周期控制 Cuk PFC 变换器的电路原理图, 它由功率主电路、单周期控制器和电压误差补偿环节三个部分构成. 电压误差补偿环节的作用主要在于确保系统输出电压 v_2 近似恒定; 单周期

控制器的作用则在于使得输入电流 i_1 与整流侧电压 v_{in} 始终保持同相位, 从而达到 PFC 的目的. 具体过程如下: 在每个开关周期开始时刻, 时钟信号为高电平, 从而使得 RS 触发器置位. 这时, 主电路开关 S 闭合, 二极管 D 反向截止; 积分控制开关 S_{int} 断开, 电容 C_{int} 对其两端电压积分, 即积分器开始工作. 当积分器输出电压 v_{int} 达到电压误差放大器的输出电压 v_m (即 $v_{int} = v_m$) 时, 比较器动作使得 RS 触发器复位. 此时, 主电路开关 S 断开, 开始对后级电路进行供电; 积分控制开关 S_{int} 闭合, 积分器电容 C_{int} 两端电压置零, 即积分器停止工作.

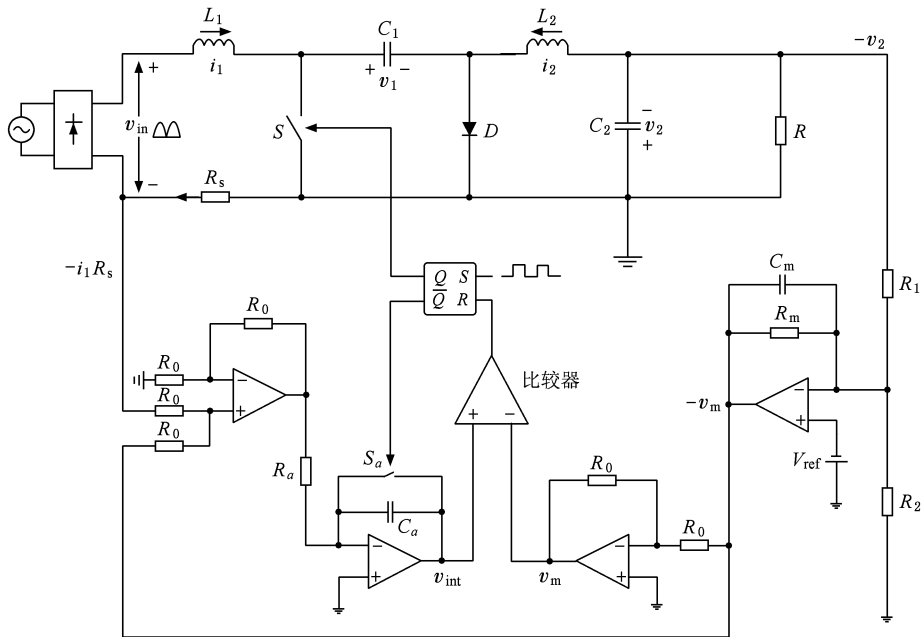


图 1 单周期控制 Cuk PFC 变换器电路原理图

下面阐述该电路实现 PFC 的具体原理. 首先, 假定该电路系统已实现了单位 PFC 目的, 即功率因数为 1, 则后级电路可等效为一线性电阻, 即

$$R_e = \frac{v_{in}}{i_1}. \quad (1)$$

整流侧电压为 $v_{in} = \sqrt{2} V_{in} |\sin(2\pi f_1 t)|$, 其中 f_1 为系统线频率. 当 $L_e > RT_s(1-D)^2/2$ ($L_e = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$, T_s 为开关周期, D 为占空比) 时, 系统工作于 CCM^[16].

这时, 由文献[17]可知

$$v_2 = \frac{v_{in} D}{1-D}. \quad (2)$$

对(2)式两边同时乘以 $\frac{R_s}{R_e}$, 可得

$$\frac{v_2 R_s}{R_e} = \frac{v_{in} R_s D}{R_e (1-D)}, \quad (3)$$

其中 R_s 为输入电流采样电阻. 令 $v_m = \frac{v_2 R_s}{R_e}$, 并将(1)

式代入(3)式, 则可推导出该电路实现单位功率因数时电路参数需满足的条件

$$(v_m + i_1 R_s) D = v_m. \quad (4)$$

在实际的电路中, 开关频率 f_s 往往远大于线频率 f_1 , 所以在一个开关周期 $[nT_s, nT_s + T_s]$ 内, 可将 $v_m + i_1 R_s$ 近似为一常数. 于是, 根据单周期控制原理, 电压误差放大器的输出电压 v_m 可表示为

$$v_m = \frac{1}{R_{int} C_{int}} \int_{nT_s}^{(n+D)T_s} (v_m + i_1 R_s) dt = \frac{(v_m + i_1 R_s) D T_s}{R_{int} C_{int}}. \quad (5)$$

当积分器的积分时间常数 $R_{\text{int}}C_{\text{int}}$ 恰好等于一个开关周期 T_s (即 $R_{\text{int}}C_{\text{int}} = T_s$) 时, (5) 式可转化为 (4) 式, 即该电路可达到 PFC 目的.

当系统工作于 CCM 时, 功率主电路存在模式 1 和模式 2 两种状态. 模式 1 是开关 S 导通、二极管 D 关断的情况, 其状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{v_{\text{in}}}{L_1}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{v_1 - v_2}{L_2}, \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{i_2}{C_1}, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{i_2}{C_2} - \frac{v_2}{RC_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

模式 2 是开关 S 关断、二极管 D 导通的情况, 其状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{v_1}{L_1} + \frac{v_{\text{in}}}{L_1}, \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{v_2}{L_2}, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{i_1}{C_1}, \end{aligned}$$

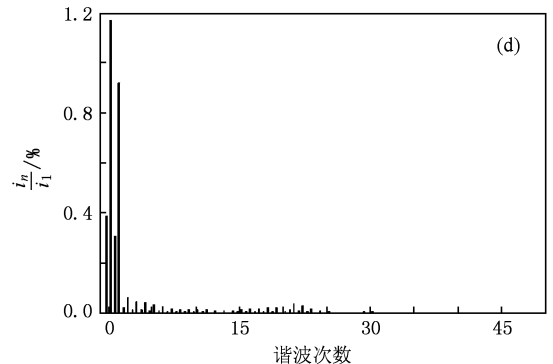
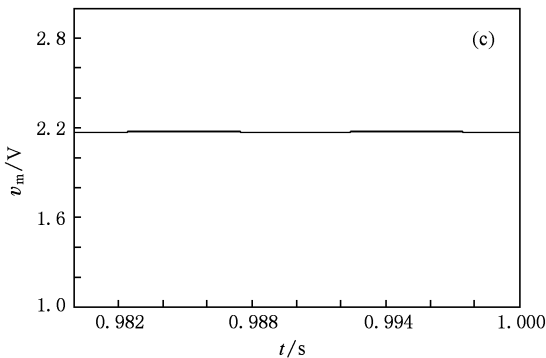
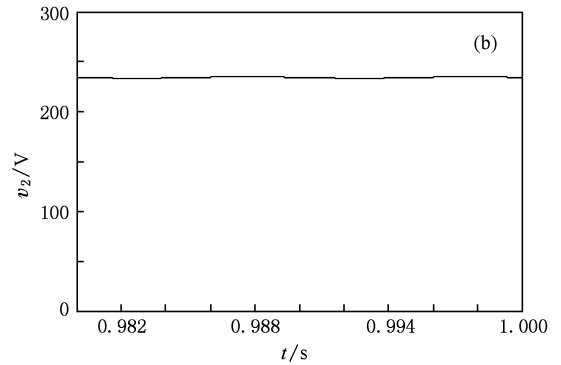
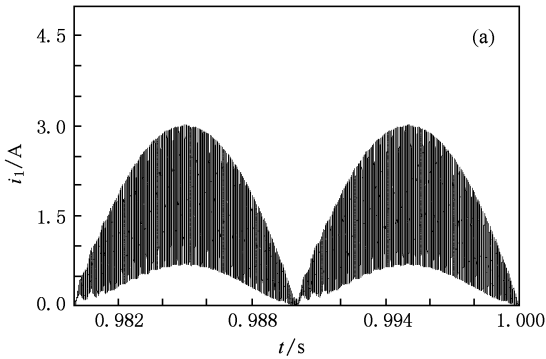


图 2 $L_1 = 1.5$ mH 时, i_1 , v_2 和 v_m 的时域波形以及 i_1 的谐波谱 (a) i_1 的时域波形, (b) v_2 的时域波形, (c) v_m 的时域波形, (d) i_1 的谐波谱

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i_2}{C_2} - \frac{v_2}{RC_2}. \quad (7)$$

此外, 电压误差放大器输出电压 v_m 满足下列微分方程式:

$$\begin{aligned} \frac{dv_m}{dt} &= -\frac{1}{R_m C_m} v_m - \frac{1}{R_1 C_m} v_2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{R_m C_m} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_m} \right) V_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (8)$$

在系统运行过程中, 电源侧能量都将通过电感 L_1 传递给电容 C_1 , 再通过 C_1 最终将能量提供给负载 R . 因而, 电感 L_1 在能量转换过程中起着至关重要的“桥梁”作用, 其参数值的选取必将对系统性能产生重要影响. 因此, 下面将以电感 L_1 作为分岔参数分析该电路系统动力学行为. 具体仿真参数如下: $V_{\text{in}} = 70$ V, $T_s = 50$ μ s, $L_2 = 3$ mH, $C_1 = 1.5$ μ F, $C_2 = 800$ μ F, $R = 600$ Ω , $R_s = 0.5$ Ω , $C_m = 0.68$ μ F, $R_m = 15$ k Ω , $R_{\text{int}} = 500$ Ω , $C_{\text{int}} = 0.1$ μ F, $R_1 = 510$ k Ω , $R_2 = 6.8$ k Ω , $V_{\text{ref}} = -2.8$ V.

图 2(a) 给出了 $L_1 = 1.5$ mH 时的输入电流 i_1 的时域波形. 由此可知, 整个电路系统工作于稳定的周期平衡状态. 此时, 系统输出电压 v_2 和电压误

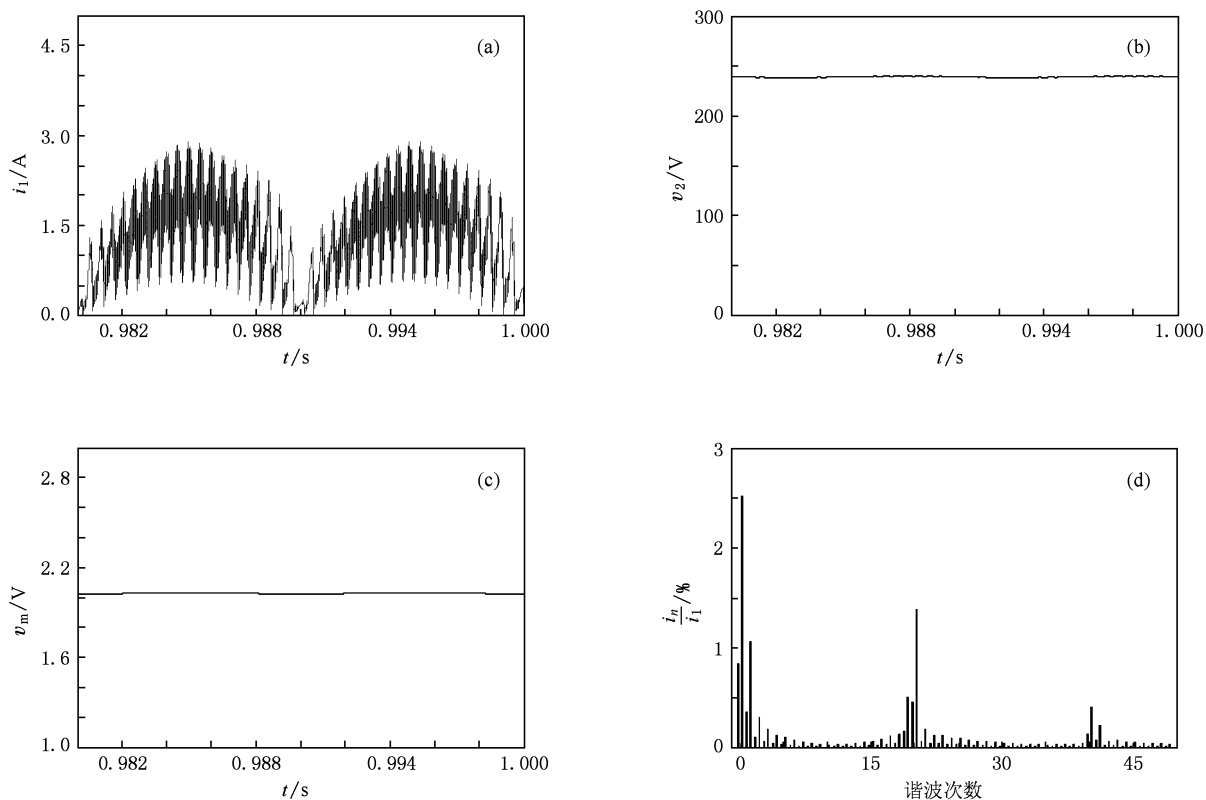


图3 $L_1 = 2.5$ mH 时, i_1 , v_2 和 v_m 的时域波形以及 i_1 的谐波谱 (a) i_1 的时域波形, (b) v_2 的时域波形, (c) v_m 的时域波形, (d) i_1 的谐波谱

差放大器输出电压 v_m 变化很小, 近似为恒定值(见图 2(b) 和 (c)); 另外, 从图 2(d) 的输入电流 i_1 的谐波谱可以发现, 此时的电流 i_1 的总谐波畸变 (THD) 非常小, 即功率因数接近于 1. 图 3 给出了当电感 L_1 增大到 2.5 mH 时的数值仿真结果. 从图 3 (a) 可发现, 输入电流 i_1 呈现出一种频率介于开关频率和输入电压线频率之间的振荡现象. 由于它不同于以往的快尺度不稳定和慢尺度不稳定, 这里将其称为中尺度不稳定. 从图 3(d) 可见, 在系统出现中尺度振荡现象时, 输入电流 i_1 频谱主要集中在 2.0 kHz 左右, THD 显著增大, 功率因数急剧降低, 说明这种中尺度不稳定现象的发生会对整个电路系统产生了十分不利的影响. 因此, 有必要对这种中尺度振荡现象发生的机理做进一步分析, 以探求其运动行为的本质.

3. 理论分析

3.1. 非线性状态平均建模

通过分析上述仿真结果可知, 对于所出现的中

尺度不稳定现象而言, 其振荡频率虽高于线频率, 但是与开关频率相比较仍属于低频范畴. 因此根据文献[4, 9, 10, 18], 状态平均模型可用来描述该变换器的中尺度动力学行为.

由(6)和(7)式可得, 单周期控制 Cuk PFC 变换器平均模型为

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} &= -(1-D)v_1 + v_{in}, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= Dv_1 - v_2, \\ C_1 \frac{dv_1}{dt} &= (1-D)i_1 - Di_2, \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_2 - \frac{v_2}{R}. \end{aligned} \quad (9)$$

由(4)式可得

$$D = \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s}. \quad (10)$$

从(10)式可以发现, D 不包含有任何外施激励, 仅与系统内部状态变量有关. 因此将这种不同于传统脉冲宽度调制控制的特点, 称为单周期控制的自洽性.

将(10)式代入(9)式, 整理后可得

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = \left(\frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} - 1 \right) v_1 + v_{in}, \quad (11a)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} v_1 - v_2, \quad (11b)$$

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = \left(1 - \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} \right) i_1 - \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} i_2, \quad (11c)$$

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_2 - \frac{v_2}{R}. \quad (11d)$$

由于(11)式中的 v_m 和 v_2 满足(8)式, 所以将(8)和(11)式整理后可得到用于描述单周期控制 Cuk PFC 变换器动力学行为的数学模型

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{v_1}{L_1} \left(\frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} - 1 \right) + \frac{v_{in}}{L_1}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{v_m v_1}{L_2 (v_m + i_1 R_s)} - \frac{v_2}{L_2}, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{i_1}{C_1} \left(1 - \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} \right) - \frac{v_m i_2}{C_1 (v_m + i_1 R_s)}, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{i_2}{C_2} - \frac{v_2}{RC_2}, \\ \frac{dv_m}{dt} &= -\frac{v_m}{R_m C_m} - \frac{v_2}{R_1 C_m} - \left(\frac{1}{R_m C_m} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_m} \right) V_{ref}. \end{aligned} \quad (12)$$

为了简便起见, 设

$$\mathbf{Y} = [i_1 \quad i_2 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_m]^T,$$

则该系统动力学模型可表示为

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) \quad (\mathbf{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5), \quad (13)$$

其中 $\mathbf{F} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5]^T$ 中各元素分别为

$$F_1 = \frac{v_1}{L_1} \left(\frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} - 1 \right) + \frac{v_{in}}{L_1},$$

$$F_2 = \frac{v_m v_1}{L_2 (v_m + i_1 R_s)} - \frac{v_2}{L_2},$$

$$F_3 = \frac{i_1}{C_1} \left(1 - \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} \right) - \frac{v_m i_2}{C_1 (v_m + i_1 R_s)},$$

$$F_4 = \frac{i_2}{C_2} - \frac{v_2}{RC_2},$$

$$F_5 = -\frac{v_m}{R_m C_m} - \frac{v_2}{R_1 C_m}$$

$$- \left(\frac{1}{R_m C_m} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_m} \right) V_{ref}.$$

3.2. 求解系统的周期平衡态

当系统运行于稳定的周期平衡态时, 必定满足能量平衡原则, 即前级交流输入侧所提供的能量等于后级电路所消耗的能量. 因此将(11a), (11b), (11c)和(11d)式两边分别同时乘以 i_1, i_2, v_1 和 v_2 , 可得

$$L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} = \left(\frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} - 1 \right) v_1 i_1 + v_{in} i_1, \quad (14a)$$

$$L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} v_1 i_2 - v_2 i_2, \quad (14b)$$

$$C_1 v_1 \frac{dv_1}{dt} = \left(1 - \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} \right) v_1 i_1 - \frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} v_1 i_2, \quad (14c)$$

$$C_2 v_2 \frac{dv_2}{dt} = v_2 i_2 - \frac{v_2^2}{R}. \quad (14d)$$

应该注意, (14a), (14b), (14c)和(14d)式左边各项分别表示电感 L_1 、电感 L_2 、电容 C_1 和电容 C_2 所存储能量的变化率大小. 将(14a), (14b), (14c)和(14d)式两边分别相加, 可得到下列功率平衡方程式:

$$\begin{aligned} L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + C_1 v_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 v_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2^2}{R} &= v_{in} i_1. \end{aligned} \quad (15)$$

虽然(15)式中包含四个未知状态变量, 但它们之间存在着一定的约束关系. 由文献[17]可知, 电容 C_1 两端电压可表示为

$$v_1 = \frac{v_{in}}{1 - D}. \quad (16)$$

于是, 由(2), (8)和(16)式可得电容 C_1 两端电压 v_1 和电容 C_2 两端电压 v_2 分别为

$$v_1 = v_2 + v_{in}, \quad (17a)$$

$$v_2 = \alpha_1 \frac{dv_m}{dt} + \alpha_2 v_m + \alpha_3, \quad (17b)$$

其中

$$\alpha_1 = -R_1 C_m,$$

$$\alpha_2 = -\frac{R_1}{R_m},$$

$$\alpha_3 = -\left(\frac{R_1}{R_m} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) V_{ref}.$$

由(3),(4)和(11d)式可得流过电感 L_1 的电流 i_1 和流过电感 L_2 的电流 i_2 分别为

$$i_1 = \frac{v_{in}v_m}{v_2R_s}, \quad (18a)$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R}. \quad (18b)$$

由文献[3]可知,当系统工作于稳定的周期平衡态时,电感 L_1 所存储的能量在每个开关周期内的变化可以忽略不计,故有

$$L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2\right)}{dt} \approx 0. \quad (19)$$

将(17)–(19)式代入(15)式,即可消去状态变量 i_1, i_2 和 v_1 . 于是可得下列仅关于状态变量 v_m 的非线性微分方程:

$$\begin{aligned} & L_2 \left[C_2(\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m) + \frac{\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3}{R} \right] \\ & \times \left[C_2(\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m) + \frac{\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m}{R} \right] \\ & + C_1(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3 + v_{in}) \\ & \times (\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m + \dot{v}_{in}) \\ & + C_2(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3)(\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m) \\ & + \frac{(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3)^2}{R} \\ & = \frac{v_{in}^2 v_m}{(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3)R_s}. \end{aligned} \quad (20)$$

为了简便,可将(20)式表示成具有如下形式的非线性微分方程:

$$f(\ddot{v}_m, \dot{v}_m, v_m) = g(\dot{v}_m, v_m), \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} & f(\ddot{v}_m, \dot{v}_m, v_m) \\ & = L_2 \left[C_2(\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m) + \frac{\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3}{R} \right] \\ & \times \left[C_2(\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m) + \frac{\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m}{R} \right] \\ & + C_1(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3 + v_{in}) \\ & \times (\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m + \dot{v}_{in}) \\ & + C_2(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3)(\alpha_1 \ddot{v}_m + \alpha_2 \dot{v}_m) \\ & + \frac{(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3)^2}{R}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$g(\dot{v}_m, v_m)$$

$$= \frac{v_{in}^2 v_m}{(\alpha_1 \dot{v}_m + \alpha_2 v_m + \alpha_3)R_s}. \quad (23)$$

为了便于表述,这里定义 $\omega_1 = 2\pi f_1, \omega_0 = 2\omega_1$. 当该变换器工作在稳定的周期平衡态时,其系统的状态周期可记为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

因而,对于(21)式中电压误差放大器输出电压 v_m 而言,其周期也必然为 T . 由文献[19]可知,谐波平衡法在求解非线性微分方程的周期解中已获得了广泛的应用,因而下面采用该方法求解(21)式的周期平衡解.

首先,将 v_m 展开成下列 Fourier 级数形式:

$$v_m = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)], \quad (24)$$

其中 N 为谐波总数,且 N 值越大, v_m 的逼近值越精确.

设

$$\mathbf{M} = [1, \cos(\omega_0 t), \dots, \cos(N\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \dots, \sin(N\omega_0 t)], \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N]^T,$$

对矩阵 \mathbf{M} 关于时间变量 t 求导,可得

$$\dot{\mathbf{M}} = [0, -\omega_0 \sin(\omega_0 t), \dots, -N\omega_0 \sin(N\omega_0 t), \omega_0 \cos(\omega_0 t), \dots, N\omega_0 \cos(N\omega_0 t)],$$

$$\ddot{\mathbf{M}} = [0, -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t), \dots, -N^2 \omega_0^2 \cos(N\omega_0 t), -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t), \dots, -N^2 \omega_0^2 \sin(N\omega_0 t)],$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{M}} & = [0, \omega_0^3 \sin(\omega_0 t), \dots, N^3 \omega_0^3 \sin(N\omega_0 t), \\ & -\omega_0^3 \cos(\omega_0 t), \dots, -N^3 \omega_0^3 \cos(N\omega_0 t)], \end{aligned} \quad (26)$$

故电压误差放大器的输出电压 v_m 及其各阶导数分别为

$$\begin{aligned} v_m & = \mathbf{M}\mathbf{A}, \\ \dot{v}_m & = \dot{\mathbf{M}}\mathbf{A}, \\ \ddot{v}_m & = \ddot{\mathbf{M}}\mathbf{A}, \\ \ddot{\ddot{v}}_m & = \ddot{\ddot{\mathbf{M}}}\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (27)$$

将(27)式代入(22)和(23)式,可得下列关于 v_m 的 Fourier 级数的各项系数方程

$$\begin{aligned} & f(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \\ & = L_2 \left[C_2(\alpha_1 \ddot{\mathbf{M}}\mathbf{A} + \alpha_2 \dot{\mathbf{M}}\mathbf{A}) + \frac{\alpha_1 \dot{\mathbf{M}}\mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{M}\mathbf{A} + \alpha_3}{R} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[C_2(\alpha_1 \ddot{M}A + \alpha_2 \ddot{M}A) + \frac{\alpha_1 \dot{M}A + \alpha_2 \dot{M}A}{R} \right] \\ & + C_1(\alpha_1 \dot{M}A + \alpha_2 MA + \alpha_3 + v_{in}) \\ & \times (\alpha_1 \dot{M}A + \alpha_2 \dot{M}A + v_{in}) \\ & + C_2(\alpha_1 \dot{M}A + \alpha_2 MA + \alpha_3)(\alpha_1 \ddot{M}A + \alpha_2 \dot{M}A) \\ & + \frac{(\alpha_1 \dot{M}A + \alpha_2 MA + \alpha_3)^2}{R}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & g(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \\ & = \frac{v_{in}^2 MA}{(\alpha_1 MA + \alpha_2 MA + \alpha_3) R_s}. \end{aligned} \quad (29)$$

于是, (21) 式可表示成关于矩阵 A 的非线性代数方程

$$\begin{aligned} & f(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \\ & = g(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N). \end{aligned} \quad (30)$$

考虑到三角函数的正交性, 将 (30) 式两边同时乘以 M^T , 并在区间 $[0, T]$ 内关于时间变量 t 积分, 则可得下列由矩阵 A 的全体未知元素构成的 $2N + 1$ 个方程:

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) M^T dt \\ & = \int_0^T g(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) M^T dt. \end{aligned} \quad (31)$$

虽然, (20) 和 (28) 式中的双正弦输入电压 v_{in} 在 t 等于 0 和 T 两点处的导数不存在, 但由于 v_{in} 在上述两点处有界连续, 故对 (31) 式的计算结果并无影响. 由于 (31) 式为非线性代数方程组, 很难获得其解析解, 因此一般采用牛顿迭代法求得其近似的数值解, 从而得到矩阵 A 的近似解. 然后, 将矩阵 A 的全体元素代入 (24) 式, 则可求出电压误差放大器输出电压 v_m 近似的解析表达式, 进而将 v_m 代入 (17b) 式可得输出电压 v_2 的近似解析表达式. 最后, 将 v_m 和 v_2 的近似解析表达式分别代入 (17a), (18a) 和 (18b) 式, 可得电容 C_1 两端电压 v_1 、流过电感 L_1 的电流 i_1 和流过电感 L_2 的电流 i_2 的近似解析表达式, 即求解出了 (12) 式所描述的单周期控制 Cuk PFC 变换器的周期平衡解.

为了验证谐波平衡法计算系统周期平衡解的有效性, 下面分别采用谐波平衡法和精确数值仿真方法进行了计算. 对于谐波平衡法而言, 这里 v_m 的 Fourier 级数展开项个数 $N = 2$, 可得出 v_m 和 v_2 的近似解析表达式为

$$\begin{aligned} v_m = & 2.1749371072 - 0.0035309618 \cos(\omega_0 t) \\ & + 0.0001254591 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 0.000022046 \cos(2\omega_0 t) \\ & - 0.0000374699 \sin(2\omega_0 t), \\ v_2 = & 243.0308889784 + 0.0928669931 \cos(\omega_0 t) \\ & - 0.7749331706 \sin(\omega_0 t) \\ & + 0.0164313023 \cos(2\omega_0 t) \\ & + 0.0003137276 \sin(2\omega_0 t). \end{aligned}$$

图 4 给出了系统稳定运行时, 采用谐波平衡法和精确数值仿真方法计算得到的 v_m 和 v_2 的波形. 从图 4 可见, 两种分析结果相符. 这表明采用谐波平衡法可得出该系统周期平衡解的近似解析表达式.

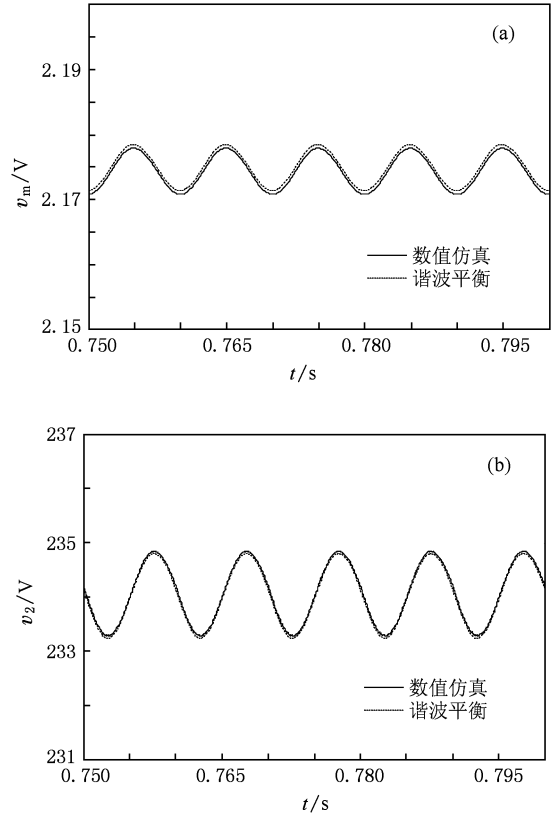


图 4 $L_1 = 1.5$ mH 时, v_m 和 v_2 的谐波平衡计算波形和数值仿真波形 (a) v_m 的谐波平衡计算波形和数值仿真波形, (b) v_2 的谐波平衡计算波形和数值仿真波形

3.3. 稳定性分析

由于 Cuk PFC 变换器的平衡态具有周期性, 故以下采用 Floquet 理论来分析该系统的稳定性^[20].

设系统的周期平衡解为

$$\begin{aligned} & Y_0(t) = [i_{10}(t) \quad i_{20}(t) \quad v_{10}(t) \quad v_{20}(t) \quad v_{m0}(t)]^T, \\ & \text{则当系统受到微小扰动 } \delta(t) \text{ 作用时, 其周期闭轨附近的解可表示为} \end{aligned}$$

$$y(t) = Y_0(t) + \delta(t), \quad (32)$$

其中

$$\delta(t) = [\Delta i_1(t) \quad \Delta i_2(t) \quad \Delta v_1(t) \Delta v_2(t) \quad \Delta v_m(t)]^T.$$

将(32)式代入(13)式,采用 Taylor 级数展开式并忽略高阶小量,可得到该系统的线性化周期微分方程

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &\approx \mathbf{J}_F[t, \mathbf{Y}_0(t)] \delta(t) \\ &= \Psi(t) \delta(t). \end{aligned} \quad (33)$$

这里 $\mathbf{J}_F[t, \mathbf{Y}_0(t)]$ 表示(13)式在平衡解 $\mathbf{Y}_0(t)$ 处的 Jacobi 矩阵,且该矩阵的最小正周期等于 T ,故 $\Psi(t)$ 矩阵可表示成

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial i_1} & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial v_1} & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial v_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial i_1} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2}{\partial v_2} & \frac{\partial F_2}{\partial v_m} \\ \frac{\partial F_3}{\partial i_1} & \frac{\partial F_3}{\partial i_2} & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial v_m} \\ 0 & \frac{\partial F_4}{\partial i_2} & 0 & \frac{\partial F_4}{\partial v_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial v_2} & \frac{\partial F_5}{\partial v_m} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

$\Psi(t)$ 矩阵中的相关元素为

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial i_1} &= -\frac{v_1 v_m R_s}{L_1(v_m + i_1 R_s)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial v_1} &= \frac{1}{L_1} \left(\frac{v_m}{v_m + i_1 R_s} - 1 \right), \\ \frac{\partial F_1}{\partial v_m} &= \frac{v_1 i_1 R_s}{L_1(v_m + i_1 R_s)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial i_1} &= -\frac{v_1 v_m R_s}{L_2(v_m + i_1 R_s)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_1} &= \frac{v_m}{L_2(v_m + i_1 R_s)}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_2} &= -\frac{1}{L_2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_m} &= \frac{v_1 i_1 R_s}{L_2(v_m + i_1 R_s)^2}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial i_1} &= \frac{v_m i_2 R_s + 2v_m i_1 R_s + R_s^2 i_1^2}{C_1(v_m + i_1 R_s)^2}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial i_2} &= -\frac{v_m}{C_1(v_m + i_1 R_s)}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial v_m} &= -\frac{(i_1^2 + i_1 i_2) R_s}{C_1(v_m + i_1 R_s)^2}, \\ \frac{\partial F_4}{\partial i_2} &= \frac{1}{C_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_4}{\partial v_2} &= -\frac{1}{RC_2}, \\ \frac{\partial F_5}{\partial v_2} &= -\frac{1}{R_1 C_m}, \\ \frac{\partial F_5}{\partial v_m} &= -\frac{1}{R_m C_m}. \end{aligned}$$

根据文献[20],可通过 Floquet 理论来研究(33)式的基础解矩阵性质,进而判断系统周期解的稳定性.首先,对于(33)式而言,存在一个基本解矩阵

$\mathbf{P}(t) = [p_1(t) \quad p_2(t) \quad p_3(t) \quad p_4(t) \quad p_5(t)]$, 其中 $p_i(t) \in R^5 (i = 1, 2, \dots, 5)$ 为(33)式的 5 个解向量.显然,矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 应满足

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \Psi(t) \mathbf{P}(t). \quad (35)$$

由于 $\Psi(t+T) = \Psi(t)$, 同时将(35)式的变量 t 替换成 $t+T$, 由此可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t+T) &= \Psi(t+T) \mathbf{P}(t+T) \\ &= \Psi(t) \mathbf{P}(t+T). \end{aligned} \quad (36)$$

因此, $\mathbf{P}(t+T)$ 也是(33)式的基础解矩阵.但由于(33)式有且仅有一个基础解矩阵,故 $\mathbf{P}(t)$ 和 $\mathbf{P}(t+T)$ 之间线性相关,并可表示成

$$\mathbf{P}(t+T) = \mathbf{H} \mathbf{P}(t), \quad (37)$$

其中 \mathbf{H} 为系统的转移矩阵.

若取初始条件 $\mathbf{P}(0)$ 等于单位矩阵 \mathbf{I} , 那么由(37)式可得转移矩阵 \mathbf{H} 为

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}(T). \quad (38)$$

由于 $\Psi(t)$ 为时变矩阵,故转移矩阵 \mathbf{H} 可采用文献[21,22]中的数值方法求得其近似解.首先,将区间 $[0, T]$ 等分成 N_T 个子区间,则每个子区间的长度为

$$\Delta_T = \frac{T}{N_T}. \quad (39)$$

第 k 个子区间对应的起始时间 t_k 可表示为

$$t_k = (k-1)\Delta_T \quad (1 \leq k \leq N_T; k \in N_+). \quad (40)$$

考虑到时变矩阵 $\Psi(t)$ 是关于变量 t 的连续函数,当 N_T 充分大时, $\Psi(t)$ 在第 k 个子区间内的大小可由其在该区间内的平均值 $\bar{\Psi}_k$ 代替,故有

$$\bar{\Psi}_k = \frac{1}{\Delta_T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Psi(t) dt. \quad (41)$$

所以,对于整个区间 $[0, T]$ 而言,转移矩阵 \mathbf{H} 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \prod_{k=N_T}^1 [\exp(\bar{\Psi}_k \Delta_T)] \\ &= \prod_{k=N_T}^1 \left[\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{N_e} \frac{(\bar{\Psi}_k \Delta_T)^i}{i!} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

其中 N_e 为指数项的展开个数. 显然, N_e 值越大, $\exp(\bar{\Psi}_i \Delta_T)$ 的计算结果越精确. 研究发现, 当 $N_T = 1500$, $N_e = 5$ 时, 转移矩阵 \mathbf{H} 的计算结果已经具有足够的精度.

通过求解下式可得到转移矩阵 \mathbf{H} 的特征根 λ (即 Floquet 乘子):

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{H}| = 0. \quad (43)$$

根据 Floquet 理论, Floquet 乘子与系统分岔行为之间存在着三种关系^[20,23]. 首先, 当有且仅有一个正实数 Floquet 乘子沿着实轴正方向穿越出单位圆时, 系统将发生叉形分岔. 其次, 当有且仅有一个负实数 Floquet 乘子沿着实轴负方向穿越出单位圆时, 系统将发生倍周期分岔. 最后, 当有且仅有一对复数共轭的 Floquet 乘子穿越出单位圆时, 系统将发生 Neimark-Sacker 分岔. 因此, 根据 Floquet 乘子的变化

趋势, 便可确定该电路系统首次失稳时分岔点的位置和类型. 下面以电感 L_1 为分岔参数并采用上述分析方法来研究系统动力学行为的演化过程, 进而揭示中尺度不稳定性发生的内在机理. 系统 Floquet 乘子随电感 L_1 变化的情况如表 1 所列, 相应的 λ 在复平面内的变化轨迹如图 5 所示. 从图 5 可见, 在 $L_1 = 1.937$ mH 附近, 有且仅有一对 Floquet 乘子以共轭复数形式穿越单位圆(图 5 中箭头所指方向), 即系统发生了 Neimark-Sacker 分岔. 此时, 在相空间中系统周期闭轨的稳定性丧失, 出现了圆环面振荡现象, 并在近似正交的两个方向上出现频率不等的振荡运动. 于是, 在时间坐标上就会呈现出中尺度振荡现象. 上述理论分析和数值结果表明, 单周期控制 Cuk PFC 变换器中出现中尺度振荡现象, 其根本原因在于随着电感 L_1 逐渐增大, 系统发生了 Neimark-Sacker 分岔.

表 1 单周期控制 Cuk PFC 变换器的系统特征根 λ 随电感 L_1 的变化

L_1/mH	$\lambda_{1,2}$	λ_3	λ_4	λ_5	$ \lambda_{1,2} $	系统状态
1.925	$0.3992 \pm i0.8772$	0.8702	0.4053	0	0.9638	稳定
1.930	$0.4139 \pm i0.8870$	0.8703	0.4053	0	0.9788	稳定
1.935	$0.4289 \pm i0.8969$	0.8703	0.4053	0	0.9942	稳定
1.936	$0.4319 \pm i0.8988$	0.8703	0.4053	0	0.9972	稳定
1.937	$0.4349 \pm i0.9008$	0.8703	0.4053	0	1.0003	不稳定

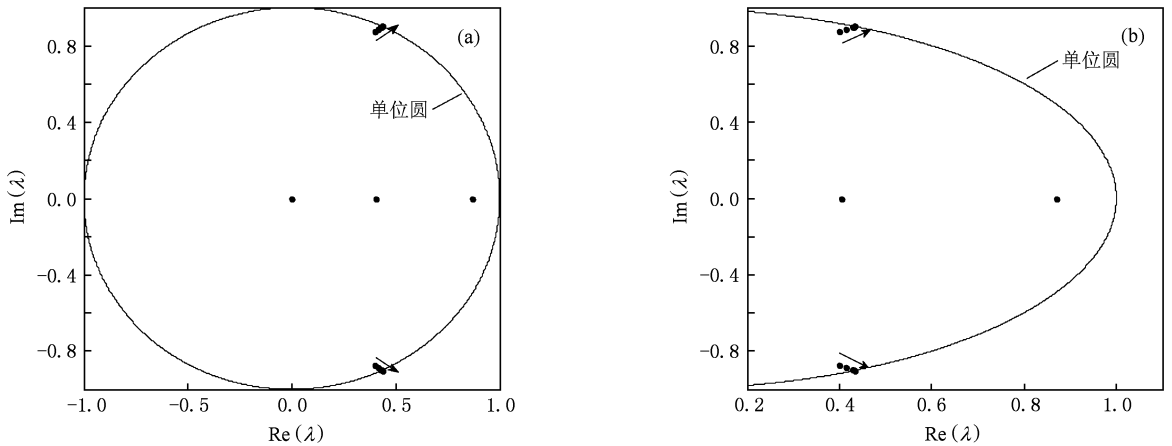


图 5 特征根 λ 在复平面内的变化轨迹 (a) 特征根的变化, (b) 局部放大图

4. 电路实验

单周期控制 Cuk PFC 变换器具体的实验电路如图 6 所示. 该实验中采用 Tektronix A622 型电流

探头测量输入电流 i_1 的波形, 并通过 Agilent DSO-6014A 型示波器(选用普通测量模式)观察输出电压 v_2 和输入电流 i_1 的变化. 当 $L_1 = 1.5$ mH 时, 该变换器的输入电流 i_1 和输出电压 v_2 的时域波形如图 7(a) 所示. 从图 7(a) 可见, 此时系统运行于稳定

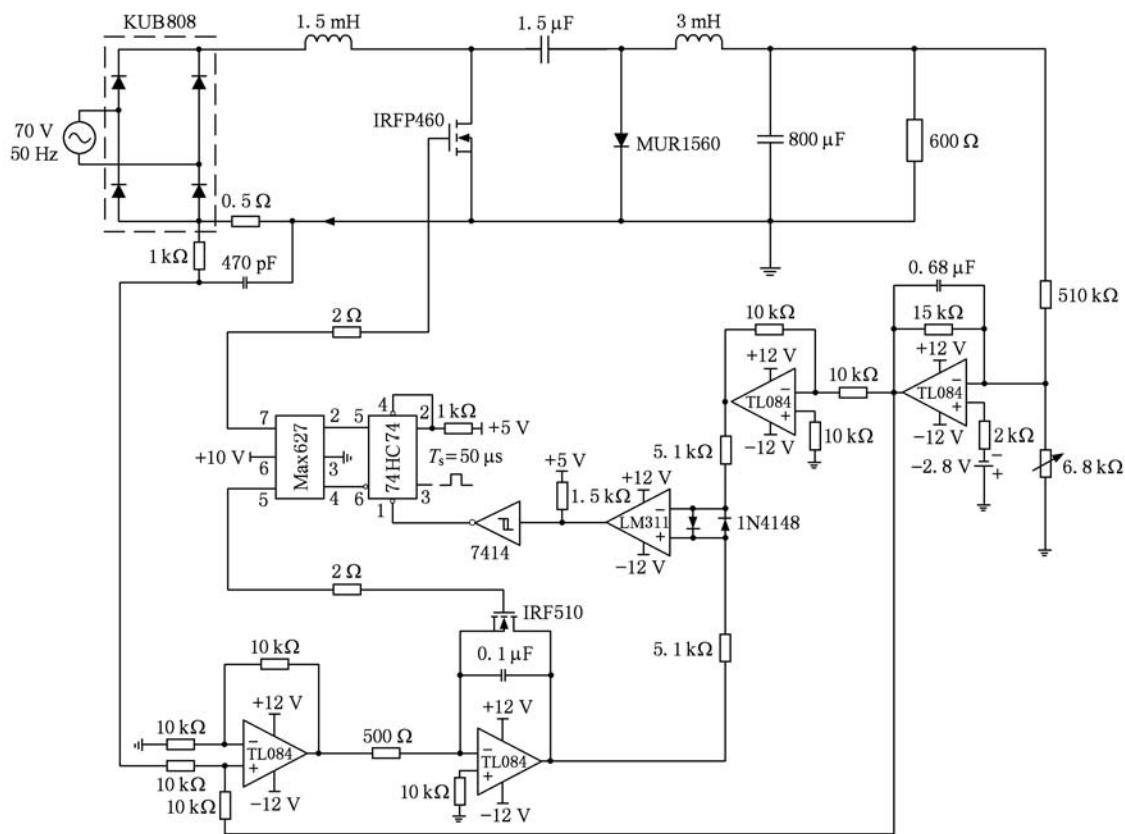
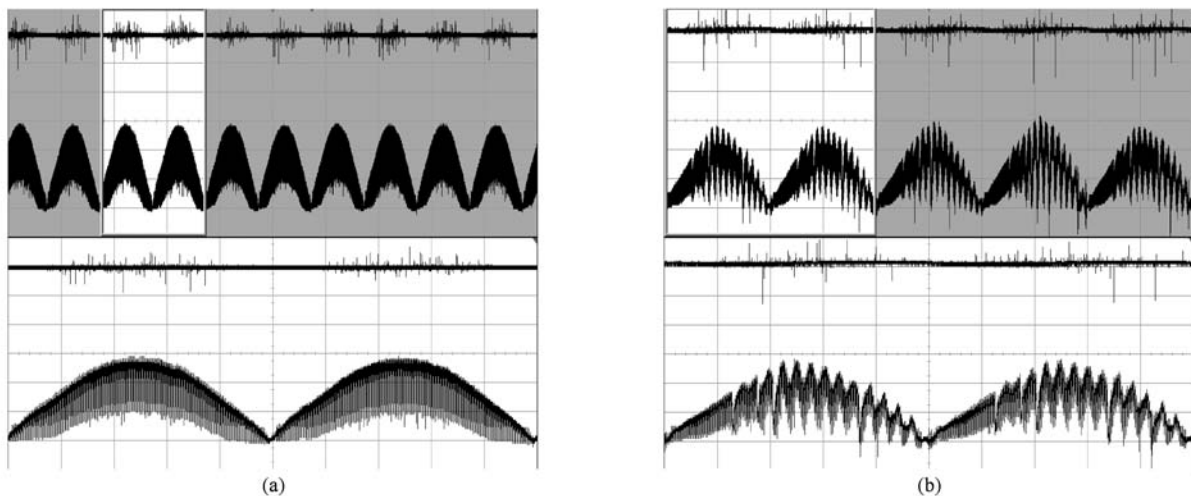


图 6 单周期控制 Cuk PFC 变换器的实验电路图

图 7 电感 L_1 分别取 1.5 和 2.5 mH 时得到的输入电流 i_1 和输出电压 v_2 的电路实验波形 (a) $L_1 = 1.5$ mH 时 i_1 和 v_2 实验波形, (b) $L_1 = 2.5$ mH 时 i_1 和 v_2 实验波形

的周期平衡态. 随着电感 L_1 的进一步增大, 当取 $L_1 = 2.5$ mH 时, 系统发生了中尺度振荡现象, 主要特征为振荡频率介于线频率和开关频率之间(图 7 (b)). 将电路实验结果与数值仿真结果进行对比, 可以发现与理论分析一致, 从而验证了理论分析的正确性.

5. 结 论

通过理论分析、数值仿真和电路实验研究了单周期控制 Cuk PFC 变换器中的中尺度不稳定现象. 基于单周期控制的自治性, 建立了系统的非线性状

态平均模型来描述其中的中尺度动力学行为,进而采用谐波平衡法和 Floquet 理论分析了这一类具有周期平衡态的分段光滑系统的稳定性,并且准确地预测了单周期控制 Cuk PFC 变换器首次失稳时分岔点的位置和类型. 研究表明,该变换器会出现一种不同于快尺度分岔和慢尺度分岔的中尺度振荡现象,其振荡频率呈现出介于开关频率与输入

电压线频率之间的特点. 究其原因是随着电路参数设计的改变,导致该变换器周期闭轨的稳定性丧失,即系统出现了 Neimark-Sacker 分岔. 这些研究结果不仅有助于理解单周期控制 Cuk PFC 变换器中的中尺度分岔行为的本质,而且为系统电路参数的设计提供了理论依据.

- [1] Aroudi A E, Orabi M, Salameró M L 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 3073
- [2] Iu H H C, Zhou Y F, Tse C K 2003 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **31** 611
- [3] Wong S, Tse C K, Orabi M, Ninomiya T 2006 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **I 53** 454
- [4] Wang F Q, Zhang H, Ma X K, Li X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6838 (in Chinese) [王发强、张 浩、马西奎、李秀明 2009 物理学报 **58** 6838]
- [5] Orabi M, Ninomiya T 2003 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **50** 1116
- [6] Wang X M, Zhang B, Qiu D Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2248 (in Chinese) [王学梅、张 波、丘东元 2009 物理学报 **58** 2248]
- [7] Liu F 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2394
- [8] Zou J L, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 720 (in Chinese) [邹建龙、马西奎 2008 物理学报 **57** 720]
- [9] Dai D, Tse C K, Zhang B, Ma X K 2008 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **18** 2095
- [10] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **I 57** 405
- [11] Bento M A, Roberto E 2009 *IEEE Trans. Ind. Appl.* **45** 268
- [12] Hu Z B, Zhang B, Hu S F, Deng W H 2005 *Proc. Chin. Soc. Electr. Eng.* **25** 19 (in Chinese) [胡宗波、张 波、胡少甫、邓卫华 2005 中国电机工程学报 **25** 19]
- [13] Yang C, Smedly K M 2004 *IEEE Trans. Power Electron.* **19** 1289
- [14] Du X, Zhou L W, Luo Q M, Fu Z H 2006 *Proc. Chin. Soc. Electr. Eng.* **26** 120 (in Chinese) [杜 雄、周维维、罗全明、付志宏 2006 中国电机工程学报 **26** 120]
- [15] Smedly K M, Cuk S 1995 *IEEE Trans. Power Electron.* **10** 625
- [16] Maksimovic D, Cuk S 1991 *IEEE Trans. Power Electron.* **6** 476
- [17] Erickson R W, Maksimovic D 2004 *Fundamentals of Power Electronics* (New York: Kluwer Academic Publishers) p27
- [18] Iu H H C, Tse C K 2003 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **I 50** 679
- [19] Nayfeh A H, Mook D T 1979 *Nonlinear Oscillations* (New York: John Wiley & Sons) p59
- [20] Nayfeh A H, Balachandran B 1995 *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods* (New York: Wiley-VCH) p158
- [21] Friedmann P, Hammond C E 1977 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **11** 1117
- [22] Shen J H, Lin K C, Chen S H, Sze K Y 2008 *Nonlin. Dyn.* **52** 403
- [23] Seydel R 1999 *Practical Bifurcation and Stability Analysis: From Equilibrium to Chaos* (New York: Springer-Verlag) p261

Intermediate-scale instability in one-cycle controlled Cuk power factor correction converter^{*}

Zhang Yuan Zhang Hao[†] Ma Xi-Kui

(*State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, School of Electrical Engineering,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 18 January 2010; revised manuscript received 1 July 2010)

Abstract

Based on the autonomous character of one-cycle control, the average model of one-cycle controlled Cuk power factor correction converter can be derived. Subsequently, the approximate analytical expressions of periodic solutions are obtained by using the harmonic balance method. Furthermore, through analyzing the changing trend of Floquet multipliers, the location and the type of the first bifurcation point are predicted. Thus, the intrinsic mechanism of such an instability can also be explained. The results show that the intermediate-scale instability is due to the loss of stability of periodic solutions, which is named the Neimark-Sacker bifurcation in the circuit system. Finally, experimental results are presented for verification purpose. Our work has revealed the salient feature of the intermediate-scale instability, and provided a theoretical basis for facilitating design of the converter.

Keywords: Cuk power factor correction converter, intermediate-scale instability, harmonic balance method, Floquet theory

PACC: 0547, 4660D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50607015) and the Fundamental Scientific Research Foundation for the Central Universities of China (Grant No. XJJ20100058).

[†] Corresponding author. E-mail: haozhang@xjtu.edu.cn