

# 摩擦力对非弹性蹦球倍周期运动的影响\*

姜泽辉<sup>†</sup> 郭 波 张 峰 王福力

(哈尔滨工业大学物理系, 哈尔滨 150001)

(2010 年 3 月 13 日收到; 2010 年 7 月 13 日收到修改稿)

分析了摩擦力对竖直振动台面上完全非弹性蹦球动力学行为的影响. 当控制参数  $\Gamma$  由 1 逐渐增大时, 作用在蹦球上的恒定摩擦力不会改变倍周期分岔的序列, 但会使倍周期分岔点的数值变大. 与无摩擦力时的情况相比, 在飞行时间的分岔图中也存在倍周期分岔密集区, 只是被横向拉伸纵向压缩, 且具有不同的分形特性. 与受振颗粒体系中的倍周期分岔过程做了比较, 发现当摩擦力取值为颗粒总重量的 20%—30% 时两者符合很好.

**关键词:** 蹦球, 颗粒物质, 倍周期分岔, 分形

**PACC:** 0547, 4755M, 4610

## 1. 引 言

一个落在振动台面上的球可以表现出复杂的运动形式, 如由倍周期级联分岔进入混沌等<sup>[1-3]</sup>. 这与系统中存在着非弹性碰撞引起的能量耗散有关. 这种能量耗散的极端情况是球与台面之间发生完全非弹性碰撞, 即碰撞后球与台面具有相同的运动速度(相对台面而言, 球失去其全部动能). 这将导致完全非弹性蹦球的行为与一般的非弹性球有所不同.

由于碰撞后球与台面的速度相同, 在某些时间段内球可以“粘附”在台面上并与之一起运动. 只有当台面向下的加速度大于重力加速度时, 球失去台面的支撑而被甩到空中做抛体运动, 之后再次落到台面上与之碰撞. 如果碰撞时刻台面的加速度小于重力加速度, 球就再次“粘附”在台面上与之一起运动. 完全非弹性碰撞的结果是台面振动的相位可以划分为吸收区和发射区. 如果台面以  $x(t) = A\sin(\omega t)$  的方式运动 ( $A$  和  $\omega$  分别为台面的振幅和角频率), 则吸收区和发射区分别对应为  $\ddot{x}(t) > -g$  和  $\ddot{x}(t) \leq -g$ , 其中  $g$  为重力加速度. 由于吸收区的存在, 完全非弹性蹦球的运动不存在混沌<sup>[4-8]</sup>. 其倍周期分岔过程仅受一个参量的控制, 即台面的约化振动加速度  $\Gamma = A\omega^2/g$ . 随着  $\Gamma$  的增大, 蹦球先由 1

倍周期运动进入 2 倍周期运动, 再由 2 倍周期运动进入 4 倍周期运动, 之后很快进入一个倍周期分岔密集区<sup>[6-8]</sup>. 在这个区域内, 不同周期长度的倍周期运动都会出现, 且敏感地依赖于  $\Gamma$ . 随着  $\Gamma$  的进一步增大, 将由密集区突然进入 3 倍周期运动, 之后是 6 倍周期运动, 密集区, 4 倍周期运动, 8 倍周期运动, 密集区, …… . 最近的分析表明<sup>[7]</sup>, 分岔相图内的每个密集区都存在着分形结构, 且有着各自的分维数.

完全非弹性蹦球问题近年来受到较多的关注, 原因之一是可以将其作为一个简单模型用来解释受振颗粒体系中的倍周期分岔现象. 对于受振颗粒体系, 颗粒间存在着频繁的非弹性碰撞与摩擦. 通过这种能量耗散机制体系可以将外界输入的动能迅速消耗掉, 因此, 振动过程中颗粒体系与容器底发生碰撞时, 所有颗粒作为整体可以被看做一个完全非弹性体(球), 即将颗粒体系的整体(质心)运动用一个完全非弹性球来模仿, 而忽略颗粒与器壁以及颗粒与颗粒间相互作用过程的细节. 完全非弹性蹦球模型已用于解释受振颗粒薄层中的分频表面驻波<sup>[9, 10]</sup>及颗粒体系质心的倍周期运动<sup>[11-18]</sup>等, 但所得倍周期分岔点的理论值往往小于实验值. 产生这种偏差的原因是由于颗粒体系脱离台面在空中做自由飞行的过程中会受到来自器壁的滑动摩擦力和空气的阻力, 而这些阻尼力没有被包含到以

\* 国家自然科学基金(批准号:10974038, 10674035)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zehuijiang@yahoo.com

往的蹦球模型中.

对于静止的颗粒床, 可以将其看作多孔介质. 当气体从颗粒间的空隙穿过时, 颗粒会对气体产生阻碍. 气流稳定时, 单位长度上的气压降可表示为<sup>[19, 20]</sup>

$$\frac{dP}{dx} = \frac{150\mu(1-\varepsilon)^2}{d^2\varepsilon^3}U + \frac{1.75\rho(1-\varepsilon)}{d\varepsilon^3}U^2, \quad (1)$$

其中  $U$  为气流速度,  $\mu$  和  $\rho$  分别为气体的黏度和密度,  $d$  为颗粒直径,  $\varepsilon$  为颗粒堆积的孔隙率. 由颗粒床两端的气体压强差可以估算出气体作用在所有颗粒上的阻力. 以  $d=0.5$  mm 和  $d=1.0$  mm 钢球所构成的体系为例, 气流速度  $U=0.078$  m/s 时空气阻力分别为  $0.1Mg$  和  $0.03Mg$ , 其中  $M$  为所有颗粒的总质量. 由此可知, 颗粒尺寸越小产生的空气阻力越大. 必须注意到, 对于静止颗粒床, 其堆积结构是固定的, 而受振颗粒体系中情况则不同. 首先, 振动过程中颗粒堆积的孔隙率(或堆积率)是变化的且上下不均匀, 平均孔隙率比未加振动时大, (1) 式给出的阻力值可能偏高. 其次, 颗粒体系在做上下往复的“活塞”式运动时, 气流的速度也在快速变化, 此时, 空气阻力如何估算及其在多大程度上影响颗粒体系的整体(质心)运动, 目前尚不十分清楚. 但空气在受振颗粒体系中的作用是不可忽略的, 会影响颗粒的对流运动及尺寸分离过程<sup>[14, 18, 21-26]</sup>. 影响颗粒体系整体运动的另一个因素是飞行过程中颗粒与器壁之间的滑动摩擦力. 飞行过程中, 颗粒床处于悬空状态, 下面并无支撑物. 在这种情况下, 颗粒对器壁的正压力如何产生、器壁摩擦力如何通过颗粒间的碰撞与摩擦进行传递, 器壁摩擦力与速度有何关系等也不十分清楚. 尽管如此, 最简单的方式就是将空气阻力和器壁摩擦力处理成一个大小恒定的等效摩擦阻力, 然后与实验进行比较并检验其合理性. 我们首先分析恒定摩擦力对完全非弹性蹦球的倍周期分岔过程的影响, 然后与受振颗粒床中的实验结果进行对比.

## 2. 模 型

对于受振颗粒体系, 体系能通过颗粒间的碰撞与摩擦快速消耗掉由容器底输入的动能, 因而可以将所有颗粒看作一个完全非弹性体(球). 体系离开台面在空中飞行的过程中还存在着空气阻力和器壁摩擦力引起的能量损耗, 作为初级近似, 这部分能量耗散可以用一个恒定的等效摩擦力来估算. 假

定这个等效摩擦力(与运动方向相反)的大小为

$$f = \beta mg, \quad (2)$$

其中  $m$  为蹦球的质量.  $\beta > 0$ , 相当于等效摩擦系数, 表示摩擦力的强弱;  $\beta = 0$  时, 则表示无摩擦力. 如果  $t = 0$  时球静止在台面上并随之一起运动, 则在

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{1+\beta}{\Gamma}\right)$$

时刻球失去台面的支撑而被抛

起, 起跳速度即为此刻台面的速度  $v_0 = \dot{x}(t_0) = \frac{g}{\omega}$

$\sqrt{\Gamma^2 - (1+\beta)^2}$ . 球向上运动时其加速度为  $-(1+\beta)g$ , 达到最高点后向下运动的加速度变为  $-(1-\beta)g$ . 球再次与台面碰撞时, 如果落在发射区则立刻被抛起; 如果落在吸收区则随台面一起运动, 直到下一个振动周期内起跳条件得到满足时再次被抛起并重复前面的运动. 第  $k$  次碰撞的时刻  $t_k$  可由下式确定:

$$\begin{aligned} & A\sin(\omega t_{k-1}) + \frac{(A\omega\cos(\omega t_{k-1}))^2}{2(1+\beta)g} \\ & - \frac{1}{2}(1-\beta)g\left(t_k - t_{k-1} - \frac{A\omega\cos(\omega t_{k-1})}{(1+\beta)g}\right)^2 \\ & = A\sin(\omega t_k), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $t_{k-1}$  为前一次碰撞的时刻. 由这一递推关系即可确定从  $t_0$  起每次碰撞的时刻及球的运动状态.

## 3. 结果及讨论

### 3.1. 与无摩擦力时的比较

图 1 给出了  $\beta = 0.2$  时球的自由飞行时间  $t_f = t_k - t_{k-1}$  随  $\Gamma$  的变化情况, 为了便于比较同时给出  $\beta = 0$  时的变化曲线, 图中已将纵坐标  $t_f$  与振动周期  $T(T = 2\pi/\omega)$  进行了约化. 无论有无摩擦力, 两者的倍周期分岔序列是相同的, 都是先由 1 跳的 1 倍周期运动进入 2 跳的 2 倍周期运动, 然后由 2 跳的 2 倍周期运动进入 1 跳的 2 倍周期运动, 再由 1 跳的 2 倍周期运动进入 2 跳的 4 倍周期运动, 之后很快进入倍周期分岔密集区, 密集区内各种周期长度的倍周期运动都会出现. 离开密集区后突然转变为 2 跳的 3 倍周期运动, 然后由 2 跳的 3 倍周期运动进入 1 跳的 3 倍周期运动. 图中用  $\Gamma_p^q$  表示进入经  $p$  跳完成  $q$  倍周期运动的分岔点的临界值. 当  $\beta = 0$  时,  $\Gamma_2^2 = 3.72$ ,  $\Gamma_2^1 = 4.61$ ,  $\Gamma_4^2 = 6.59$ ,  $\Gamma_3^2 = 7.44$ ,  $\Gamma_3^1 = 7.79$ . 当  $\beta = 0.2$  时,  $\Gamma_2^2 = 4.15$ ,  $\Gamma_2^1 = 5.02$ ,  $\Gamma_4^2 = 7.19$ ,  $\Gamma_3^2$

= 8.19,  $\Gamma_3^1 = 8.45$ . 由此可见,有摩擦阻力时各分岔点的数值均相应变大.

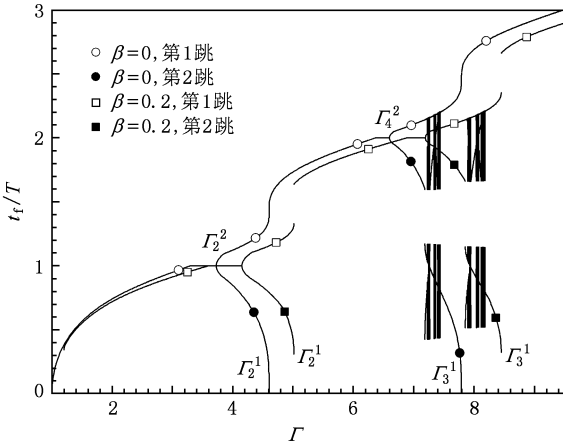


图 1 约化飞行时间  $t_f/T$  随  $\Gamma$  的变化

图 2 给出了  $\beta = 0$  和  $\beta = 0.2$  两种情况下密集区的内部结构. 两者的分岔序列和总体几何结构是相同的, 只是摩擦力的存在导致后者被横向拉伸纵向压缩, 且密集区内的禁带宽度加宽. 两者的密集区内都存在放大不变性, 即分形结构. 以图中带有“ $\Delta$ ”标记的曲线为特征线, 其起点和终点为  $\Gamma_4^3$  和  $\Gamma_3^2$ . 如果将图 2(a) 中右侧虚线框包围的部分放大, 所得结构仍与密集区的总体结构相似(见图 2(b)). 此时, 其特征线的起点和终点分别为  $\Gamma_6^5$  和  $\Gamma_5^4$ . 如果将图 2(b) 中虚线框包围的部分放大, 还会得到类似的结构. 将这一过程继续下去就可以发现, 如果以特征线的终点与起点之差作为其长短的测度, 则有  $\Delta_1 = \Gamma_3^2 - \Gamma_4^3$ ,  $\Delta_2 = \Gamma_5^4 - \Gamma_6^5$ ,  $\Delta_3 = \Gamma_7^6 - \Gamma_8^7$ ,  $\dots$ , 且  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} = 0.040364$ . 这一常数比无摩擦力时的值<sup>[7]</sup>(0.032609)要大一些. 这是因为密集区被横向拉伸纵向压缩的缘故.

图 3 给出约化着陆速度  $u/(gT)$  随  $\Gamma$  的变化情况. 着陆速度  $u$  指的是碰撞时球的入射速度与台面速度之差, 为便于分析和讨论, 我们已用台面速度减去球速来计算着陆速度  $u$  以使其始终取正值. 因为碰撞后两者速度相同, 所以着陆速度将决定碰撞时球对台面冲击力的大小. 着陆速度的分岔过程与自由飞行时间的分岔过程完全相同. 有摩擦力时的密集区同样被横向拉伸, 但纵向压缩的程度不十分明显. 无论有无摩擦力, 2 倍周期分岔之后飞行时间中的第 1 跳处于上支, 第 2 跳处于下支(图 1), 而着陆速度刚好与之相反(图 3). 但是, 有摩擦力

时在由 2 跳的倍周期运动向 1 跳的倍周期运动转变的临界点处(图 1 中标记为  $\Gamma_2^1$  和  $\Gamma_3^1$ ),  $t_f/T$  和  $u/(gT)$  的第 1 支都会出现一个跳变. 产生跳变的原因是因摩擦力的作用导致球的飞行轨迹不再是左右对称的抛物线, 进而影响了其与台面碰撞的时刻.

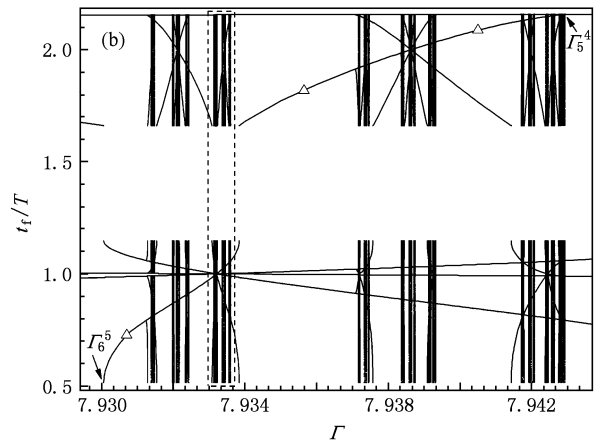
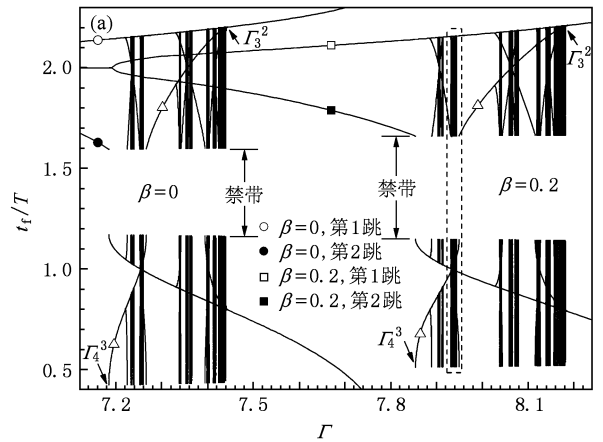


图 2 密集区的内部结构 (a)  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0.2$  两种情况的比较, (b) 为(a)图中虚线框部分的局部放大

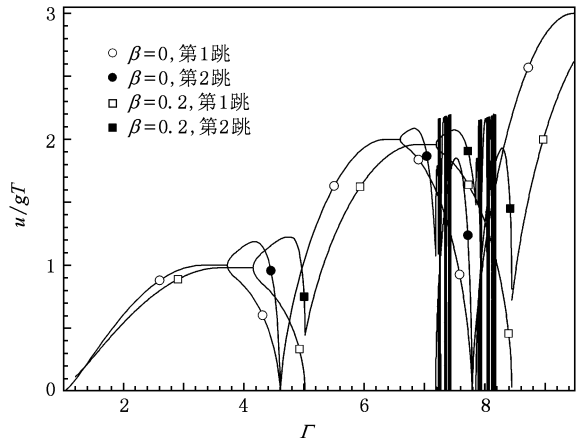


图 3 约化着陆速度  $u/(gT)$  随  $\Gamma$  的变化

以 2 跳的 2 倍周期运动转变为 1 跳的 2 倍周期运动为例 ( $\Gamma_2^1$  附近) 来讨论蹦球的运动. 无摩擦力时, 球的第 1 跳为抛物线 (图 4), 落在第 2 个发射区的末端附近, 第 2 跳直接下抛并落在吸收区. 当  $\Gamma$  逐渐增大时, 蹦球的第 1 跳和第 2 跳的落点分别从两个方向向发射区的末端 (水平虚线处) 靠近, 第 1 跳的飞行时间逐渐增大, 着陆速度变小 (因为球的入射速度与台面速度的差别变小), 第 2 跳的飞行时间和着陆速度均变小. 当  $\Gamma = \Gamma_2^1 = 4.60$  时, 落点刚好在发射区的末端上, 且抛物线刚好与正弦线相切, 表明球与台面的速度相等. 此刻, 蹦球第 1 跳的飞行时间为  $t_f/T = 1.43$ , 第 2 跳的  $t_f/T = 0$ , 而两跳的着陆速度均为零. 继续增大  $\Gamma$ , 蹦球直接落入吸收区变为只有 1 跳的 2 倍周期运动, 且飞行时间和着陆速度均随  $\Gamma$  单调增加 (见图 1 和图 3).

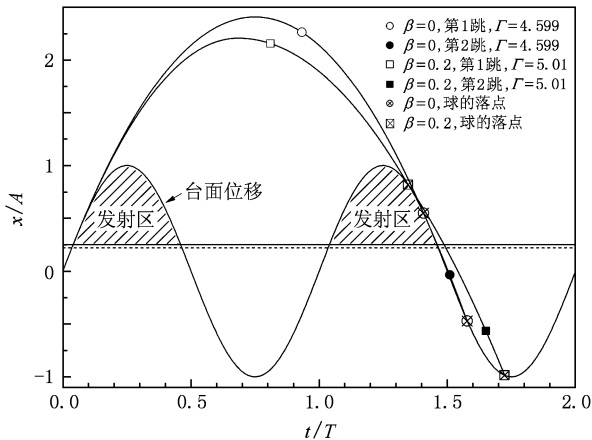


图 4 临近  $\Gamma_2^1$  时蹦球的运动轨迹 水平虚线为  $\beta = 0$  时吸收区与发射区的分界线, 水平实线为  $\beta = 0.2$  时吸收区与发射区的分界线

有摩擦力时, 蹦球第 1 跳的运动轨迹左右不对称且飞行高度变低. 逐渐增大  $\Gamma$  时, 两跳的落点也从两个方向向发射区的末端 (图 4 水平实线处) 靠近, 但是两跳的落点均不可能与发射区的末端重合, 而是在  $\Gamma = \Gamma_2^1 = 5.02$  时球的轨迹就与台面相切, 再增大  $\Gamma$  就直接变为 1 跳的 2 倍周期运动. 这就导致球的飞行时间和着陆速度在  $\Gamma_2^1 = 5.02$  处有一个跳变, 飞行时间的这一跳变可以认为是禁带的向前延伸.

无论有无摩擦力, 在  $\Gamma_2^2$  和  $\Gamma_4^1$  分岔点前都有一个“平台”, 在“平台”内球可以做一种永不落入吸收区的连续蹦跳. 开始时是一高一低的蹦跳, 但这种运动是不稳定的, 会逐渐演化为一种蹦跳高度相等的倍周期运动. 形成这种倍周期运动的条件是某次

碰撞中出现的微小偏差, 在随后的碰撞中逐渐变小, 最终被衰减掉, 即  $\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| \leq 1$ . 利用 (3) 式, 可得

$$\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| = \left| -1 + \frac{\Gamma}{1+\beta} \sin(\omega t_{k-1}) \right| \leq 1, \quad (4)$$

即

$$0 \leq \frac{\Gamma}{1+\beta} \sin(\omega t_{k-1}) \leq 2. \quad (5)$$

考虑到每次碰撞都是落在发射区内的, 有  $\sin(\omega t_{k-1}) \geq \sin(\omega t_0) = \frac{1+\beta}{\Gamma}$ , (5) 式改写为

$$1 \leq \frac{\Gamma}{1+\beta} \sin(\omega t_{k-1}) \leq 2. \quad (6)$$

再利用形成稳定运动后飞行时间是振动周期的整数倍这一条件, 即

$$\frac{A\omega \cos(\omega t_{k-1})}{(1+\beta)g} + \frac{A\omega \cos(\omega t_{k-1})}{\sqrt{1-\beta^2}g} = mT \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (7)$$

(6) 式最终变为

$$(1+\beta) \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi m}{1 + \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} \right)^2} \leq \Gamma \leq (1+\beta) \sqrt{4 + \left( \frac{2\pi m}{1 + \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} \right)^2}. \quad (8)$$

(8) 式给出的就是有摩擦力时的“平台”宽度. 在这个范围内约化飞行时间取整数值  $t_f/T = m$ . 简单推导可以证明, 约化着陆速度为  $u/(gT) = m\sqrt{1-\beta^2}$ , 比无摩擦力时要小一些. (8) 式右端实际上给出的就是  $\Gamma_{2m}^2$  型分岔点的大小.

### 3.2. 与实验结果的比较

实验中, 颗粒体系的整体运动表现在颗粒对容器底存在着窄脉冲形式的冲击力, 这种冲击力的大小随着  $\Gamma$  的增加亦表现出倍周期分岔现象. 图 5 给出了约化着陆速度与冲击力实验值的比较, 实验数据取自文献 [17] (所用颗粒为不锈钢珠, 粒径为 0.50 mm), 图中的阴影区 (实验中表现为混沌的冲击力信号) 与蹦球的密集区相对应. 由图 5 可以看出, 在  $\Gamma_2^2$  之前两者符合很好, 在  $\Gamma_2^2$  和  $\Gamma_3^1$  处亦有相对应的冲击力跳变, 其后的分岔特征基本一致. 但实验中,  $\Gamma_2^2$  和  $\Gamma_4^1$  之前的“平台”区较难观察到. 这是因为受振颗粒系统中存在着难以避免的随机涨落或“噪声”, 很容易将微小信号或微小特征掩盖掉. 尽管如此, 在蹦球刚进入“平台”区时, 对冲击力

信号进行快速傅里叶变换,其频谱中偶尔会看到微弱的不稳定的倍周期特征(分频分立谱),而过了“平台”区倍周期特征将十分明显且稳定.另外,实验中由1跳过渡到2跳的这类分岔点(如 $\Gamma_2^2$ 和 $\Gamma_4^2$ )相对容易判断和测定,而诸如 $\Gamma_2^1$ 和 $\Gamma_3^1$ 这类分岔点较难判定亦较难测定.这是因为当 $\Gamma$ 接近 $\Gamma_2^1$ 和 $\Gamma_3^1$ 时,冲击力的下支数值较小,与“噪声”混合在一起难以分辨.

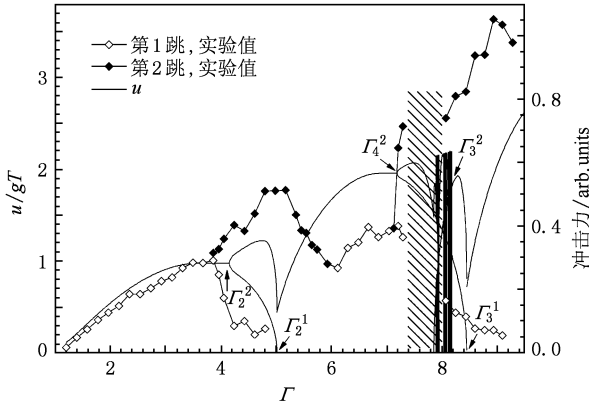


图5 倍周期分岔过程与冲击力实验值的比较

除了随机涨落以外,颗粒表面污垢的积累及环境湿度等因素也对分岔点的大小有所影响,导致分岔点的实验值有一定程度的离散.为了便于比较,我们将分岔点的相关实验值与理论值一起列于表1,表中的两个 $\Gamma_4^2$ 均表示2跳的4倍周期分岔点,前者第1跳的约化飞行时间略大于2,第2跳略小

于2,后者第1跳的约化飞行时间大于3,第2跳小于1.由表1可以看出,考虑了摩擦力后蹦球模型给出的结果更接近于实验值.我们也注意到当 $\Gamma$ 较大时,理论与实验值仍存在偏差,虽然通过增大 $\beta$ 的数值可以有所改善,但 $\beta$ 取值过大将失去其合理性.如果以实验中较易测准的 $\Gamma_2^2$ 和 $\Gamma_4^2$ 为基准, $\beta$ 在0.2与0.3之间取值时较合理,也就是颗粒在飞行过程中所受阻力的大小为其总重量的20%—30%.这也从一个侧面说明了为什么只有当振动强度大于临界值 $[\text{21, 27, 28}] \Gamma_c \approx 1.2$ 时颗粒床中才会出现整体流化及对流现象.另外,当 $\Gamma$ 比较大时,气流的速度会变大,但颗粒堆积的孔隙率也可能同时变大.这种情况下,空气的作用是否会进一步增强并对分岔过程能否产生明显影响还有待进一步研究.但在我们以往的实验中,倍周期分岔过程并没有表现出与颗粒的尺寸(不小于0.50 mm)和材质(合金钢、玻璃、陶瓷)有十分强烈的关系(见文献[15]中表1).这是因为颗粒的尺寸还不够小,气流对体系质心运动的影响不十分明显.为进一步研究气流的影响,在实验中我们采用密布通孔的容器底或者将容器中填充六氟化硫气体(黏度与空气相近,密度约为空气的5倍),结果表明在粒径大于0.50 mm的硬质合金钢珠颗粒床中未发现气流对倍周期分岔过程有明显影响.如果将颗粒直径减小到0.25 mm以下,倍周期分岔点的数值均变大,且4倍周期分岔之后都是混沌的冲击力信号,无其他高阶的倍周期分岔.有关气流所起的作用及其对分岔过程的影响等进一步的研究正在进行中.

表1 分岔点 $\beta = 0, 0.2, 0.3, 0.4$ 的理论值与实验值的比较

	$\beta=0$	$\beta=0.2$	$\beta=0.3$	$\beta=0.4$	平均实验值	实验值
$\Gamma_2^2$	3.72	4.15	4.33	4.47	4.3±0.5	3.7, 3.75, 3.8, 3.9, 4.0, 4.1, 3.8—4.4, 4.5, 4.8
$\Gamma_2^1$	4.60	5.02	5.16	5.26	5.3±0.4	5.0, 5.15, 5.7
$\Gamma_4^2$	6.69	7.19	7.39	7.50	7.1±0.5	6.5—7.1, 6.8, 6.9, 7.0, 7.1, 7.5, 7.6
$\Gamma_3^2$	7.44	8.18	8.46	8.63	8.8±0.8	8.0, 8.1, 9.0, 9.22, 9.3, 8.4—9.2, 9.6
$\Gamma_3^1$	7.79	8.45	8.67	8.79	9.8±0.4	9.1, 9.5, 10.5
$\Gamma_6^2$	9.63	10.45	10.69	10.81	10.6±0.8	10.1, 10.6, 10.7, 10.9, 9.5—11.0, 11
$\Gamma_4^2$	10.67	11.67	11.98	12.16	13.4±1.0	12.4, 13.3, 12.6—13.4, 14.3
$\Gamma_4^1$	10.95	11.86	12.15	12.29	13.2	13.2
$\Gamma_8^2$	12.73	13.77	14.07	14.20	14.7±0.8	14.0—14.1, 14.3, 14.4, 15.5

注:表中的实验值取自文献[12, 15—18, 29]. 平均实验值是实验值中最大值与最小值的算术平均值.

最近, Pastor 等<sup>[18]</sup>利用高速摄像装置测量了受振颗粒床质心的自由飞行时间并与蹦球模型的理论结果进行了对比.在不考虑摩擦力的情况下,蹦球模型给出的结果在 $\Gamma < 2.7$ 时与实验结果符合很

好,但之后的偏差较大.他们假定空气的阻力与气流速率成正比,所得结果虽有所改善,但偏差仍较大.在研究器壁附近颗粒的对流运动时,他们将器壁摩擦力的作用用等效重力加速度来代替,所得等

效重力加速度的大小约为  $12.77 \text{ m/s}^2$ , 这与我们估计的  $\beta$  取值范围一致. 但使用等效重力加速度在概念上有不明晰之处, 因为飞行过程中器壁摩擦力的方向是会改变的, 而重力加速度的方向始终向下.

通过以上讨论可知, 对于颗粒尺寸足够大(粒径不小于  $0.5 \text{ mm}$ ) 的体系器壁摩擦力是影响颗粒床质心运动的主要因素, 其大小与速度无关这一假定基本上是合理的. 器壁摩擦力在引起颗粒对流中的作用同样是不可忽略的<sup>[28, 30]</sup>. 我们在文献[26]中讨论对流的起因及其对尺寸分离过程的影响时, 只考虑了空气阻力的影响, 这无疑会使问题的分析过于简化. 如果将器壁摩擦力包含进来, 则分离时间的公式将变为  $\tau = K \frac{H_0 f^3}{g^3 [\Gamma^2 - (1 + \beta)^2]^2} + \varepsilon$ , 其中  $\tau$

为分离时间,  $H_0$  为颗粒床的厚度,  $f$  为振动频率,  $K$  和  $\varepsilon$  为可调的经验参数. 有关器壁摩擦力、空气阻

力及颗粒尺寸对颗粒对流运动的影响, 我们将另文讨论.

## 4. 结 论

摩擦力对完全非弹性蹦球倍周期分岔过程存在影响, 使得各分岔点的数值变大, 同时使得 ( $t_f/T, \Gamma$ ) 空间中的倍周期分岔密集区被横向拉伸纵向压缩, 并使禁带宽度增大. 密集区仍具有放大不变性, 只是特征比变大. 与受振颗粒体系中倍周期分岔过程的实验结果进行比较后发现, 器壁摩擦力的大小为颗粒总重量的 20%—30%, 与速度关系不强, 是影响颗粒床整体(质心)运动的主要因素. 考虑了器壁摩擦力后, 完全非弹性蹦球模型能够对受振颗粒床中的倍周期分岔过程给出更合理的解释.

- [1] Tuffillaro N B, Abbott T, Reilly J 1992 *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (New York: Addison-Wesley Publishing Company)
- [2] Pierański P 1988 *Phys. Rev. A* **37** 1782
- [3] Holmes P J 1982 *J. Sound Vib.* **84** 173
- [4] Mehta A, Luck J M 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 393
- [5] Luck J M, Mehta A 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3988
- [6] Jiang Z H, Zheng R H, Zhao H F, Wu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3727 (in Chinese) [姜泽辉、郑瑞华、赵海发、吴 晶 2007 物理学报 **56** 3727]
- [7] Jiang Z H, Zhao H F, Zheng R H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7579 (in Chinese) [姜泽辉、赵海发、郑瑞华 2009 物理学报 **58** 7579]
- [8] Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 055201
- [9] Melo F, Umbanhowar P B, Swinney H L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3838
- [10] Moon S J, Shattuck M D, Bizon C, Goldman D I, Swift J B, Swinney H L 2001 *Phys. Rev. E* **65** 11301
- [11] Luding S, Clément E, Blumen A, Rajchenbach J, Duran J 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1634
- [12] Douady S, Fauve S, Laroche C 1989 *Europhys. Lett.* **8** 621
- [13] Wassgren C R, Brennen C E, Hunt M L 1996 *J. Appl. Mech.* **63** 712
- [14] Aoki K M, Akiyama T, Yamamoto K, Yoshikawa T 1997 *Europhys. Lett.* **40** 159
- [15] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Europhys. Lett.* **74** 417
- [16] Jiang Z H, Li B, Zhao H F, Wang Y Y, Dai Z B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1273 (in Chinese) [姜泽辉、李 斌、赵海发、王运鹰、戴智斌 2005 物理学报 **54** 1273]
- [17] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J, Li J W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5692 (in Chinese) [姜泽辉、刘新影、彭雅晶、李建伟 2005 物理学报 **54** 5692]
- [18] Pastor J M, Maza D, Zuriguel I, Garcimartín A, Boudet J F 2007 *Physica D* **232** 128
- [19] Ho C K, Webb S W 2006 *Gas Transport in Porous Media* (Dordrecht: Springer) pp5—26
- [20] Nield D A, Bejan A 2006 *Convection in Porous Media* (3rd ed) (New York: Springer) Chap 1
- [21] Pak H K, Doorn E V, Behringer R P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4643
- [22] Yan X, Shi Q, Hou M, Lu K, Chan C K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 14302
- [23] Möbius M E, Cheng X, Eshuis P, Karczmar G S, Nagel S R, Jaeger H M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 011304
- [24] Akiyama T, Kimura N, Iguchi T 1996 *Powder Technol.* **89** 133
- [25] Akiyama T, Yoshikawa T 1999 *Powder Technol.* **103** 139
- [26] Jiang Z H, Jing Y F, Zhao H F, Zheng R H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5923 (in Chinese) [姜泽辉、荆亚芳、赵海发、郑瑞华 2009 物理学报 **58** 5923]
- [27] Evasque P, Szmatala E, Denis J P 1990 *Europhys. Lett.* **12** 623
- [28] Knight J B, Jaeger H M, Nagel S R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 3728
- [29] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4748 (in Chinese) [姜泽辉、王运鹰、吴 晶 2006 物理学报 **55** 4748]
- [30] Zeilstra C, Collignon J G, van der Hoef M A, Deen N G, Kuipers J A M 2008 *Powder Technol.* **184** 166

# Effect of frictional force on subharmonic bifurcations of a completely inelastic ball bouncing on a vibrating table\*

Jiang Ze-Hui<sup>†</sup> Guo Bo Zhang Feng Wang Fu-Li

(*Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

(Received 13 March 2010; revised manuscript received 13 July 2010)

## Abstract

The behavior of a completely inelastic ball bouncing on a vertically vibrating table in the presence of frictional force is investigated. The frictional force is assumed to be constant. It is found that the sequence of bifurcation, controlled solely by the normalized vibration acceleration  $\Gamma$ , is the same as that in the absence of frictional force, but the value of each bifurcation point becomes larger. In the bifurcation diagram of ball flight time, the structure consisting of an infinity of bifurcation cascades in a narrow range of  $\Gamma$  is observed. Compared with that of no frictional force, it is longitudinally compressed and transversely stretched, and has a different fractal property. A comparison with the bifurcations observed in vertically vibrated granular beds is also made. When the frictional force is set to be 20%—30% of the whole weight of the particles, the results from the bouncing ball model are in good agreement with experimental observations.

**Keywords:** bouncing ball, granular matter, period-doubling bifurcation, fractal

**PACC:** 0547, 4755M, 4610

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10974038, 10674035).

<sup>†</sup> E-mail: zehuijiang@yahoo.com