

非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中 贝尔非定域性的演化*

廖长庚[†] 陈子翔 罗成立

(福州大学物理与信息工程学院, 福州 350002)

(2009 年 11 月 6 日收到; 2010 年 5 月 17 日收到修改稿)

基于赝自旋算符的关联所对应的贝尔算符期待值, 研究了各种双模非经典态(纠缠相干态、对相干态以及双模压缩真空态)在非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中贝尔非定域性的动力学特性. 结果表明: 对于纠缠相干态, 贝尔非定域性的演化与双模场平均光子数的大小息息相关; 对于对相干态和双模压缩真空态, 贝尔非定域性会在有限的时间内完全消失, 之后又基本上复原到初始值, 呈现出周期性振荡现象.

关键词: 赝自旋算符, 双模腔场, 非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型, 贝尔非定域性

PACC: 4250, 0365

1. 引 言

量子态的非定域性和量子纠缠是量子力学的两个最显著特征, 它们一直是讨论的焦点之一. 1935 年, Einstein, Podolsky 和 Rosen^[1] 提出了著名的 EPR 佯谬, 对量子力学的基本原理和概念的诠释做了尖锐的批评. 但是, 当时争论的焦点只停留在哲学层面上. 基于局域隐变量理论而提出来的贝尔不等式^[2]使得关于量子力学基本原理和概念的诠释的思辩性争论有了量化的标准. 此后, 各种类型的贝尔不等式也相继被提出来, 越来越多的人投入到对贝尔不等式的验证工作中. 对于不连续的 N 维纠缠态, Gisin 和 Peres^[3] 找到了一组观测量可以违背贝尔不等式. 文献[4]利用位移算符研究了连续变量量子态对贝尔不等式的违背. 最近, Chen 等^[5]提出了赝自旋算符, 由此构造了新的贝尔算符并用它研究了连续变量量子态对贝尔不等式的违背, 发现双模压缩真空态能使 Clauser, Horne, Shimony 和 Holt 提出的 CHSH 型贝尔不等式违背程度达到最大. Jeong 等^[6]把文献[3, 5]的贝尔算符进行对比研究, 在连续变量与非连续变量系统之间建立了桥梁, 并验证了另一个重要的连续变量纠缠态

(纠缠相干态)也能使 CHSH 型贝尔不等式的违背程度达到最大.

在动力学特性方面, Yu 和 Eberly^[7]的研究表明, 即使是在纯真空噪声的影响下两个纠缠比特也会在有限的时间内完全解纠缠, 这就是所谓的纠缠突然死亡. 在多比特系统中, 要证明这样的现象比较困难, 但是对于多比特系统, 可以用量子态对贝尔不等式的违背程度来讨论其非定域性, 贝尔算符的平均值也会出现与纠缠度完全消失相类似的现象, Jaeger 和 Ann^[8]把它称作贝尔非定域性的突然死亡(BNSD). 文献[9]研究了纠缠相干态在相位阻尼模型中贝尔非定域性的演化.

在本文中, 我们利用文献[5]所构造的贝尔算符讨论了各种双模非经典态在非简并双光子 Jaynes-Cummings (J-C) 模型中与原子相互作用以后贝尔非定域性随时间演化的动力学特性. 研究结果表明: 对于纠缠相干态, 贝尔非定域性的演化与平均光子数的大小密切相关, 并且没有周期性; 对于对相干态和双模压缩真空态, 贝尔非定域性会在有限的时间内完全消失, 之后又基本上恢复至初始值, 呈现出周期性振荡的现象. 由于在很长的时间内能够恢复对 CHSH 型贝尔不等式的较大违背, 因此, 这一结果或许能够更有助

* 国家自然科学基金(批准号:10974028)和福建省自然科学基金(批准号:2009J06002)资助的课题.

[†] E-mail: liaochangeng@hotmail.com

于在实验上观察到连续变量量子态的贝尔非定域性.

2. 非简并双光子 J-C 模型及各种态的演化

2.1. 非简并双光子 J-C 模型

考虑一个级联型三能级原子与双模光场的相互作用. 原子的三个能级分别为 $|e\rangle$, $|i\rangle$ 和 $|g\rangle$, 它们相应的能量为 ω_e , ω_i 和 ω_g , 且 $\omega_e > \omega_i > \omega_g$. 假设跃迁 $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ 只与 a_1 模耦合, 而 $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ 只与 a_2 模耦合, 即跃迁 $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ 与 a_2 模的失谐量以及 $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ 与 a_1 模的失谐量都很大, 以致它们之间的耦合可忽略. 在这种情况下系统总的哈密顿量可表示为^[10]

$$H = \omega_a a_1^\dagger a_1 + \omega_b a_2^\dagger a_2 + \omega_e S_{ee} + \omega_g S_{gg} + \omega_i S_{ii} + (g_1 a_1^\dagger S_{ie} + g_2 a_2^\dagger S_{gi} + \text{H. C.}), \quad (1)$$

式中 a_1^\dagger (a_1) 和 a_2^\dagger (a_2) 为两个场模的产生(湮没)算符, g_1 和 g_2 为耦合常数, $S_{jk} = |j\rangle \langle k|$ 为原子算符.

假设跃迁频率与腔模频率间有如下关系:

$$\omega_e - \omega_i - \omega_{a_1} = \omega_{a_2} - (\omega_i - \omega_g) = \Delta. \quad (2)$$

当 Δ 远大于耦合常数 g_1 和 g_2 时, 可绝热地消去(1)式中的中间能级 $|i\rangle$, 从而得到经过斯塔克移动修

正后的有效哈密顿量^[10]

$$H_{\text{eff}} = \omega_a a_1^\dagger a_1 + \omega_b a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \omega (S_{ee} - S_{gg}) + g(a_1^\dagger a_2^\dagger S_{ge} + a_1 a_2 S_{eg}) + \beta_1 a_1^\dagger a_1 S_{ee} + \beta_2 a_2^\dagger a_2 S_{gg}, \quad (3)$$

式中

$$g = \frac{g_1 g_2}{\Delta}, \quad \beta_1 = \frac{g_1^2}{\Delta}, \quad (4)$$

$$\beta_2 = \frac{g_2^2}{\Delta}, \quad \omega = \omega_e - \omega_g.$$

为了研究方便, 在本文中取

$$g = \beta_1 = \beta_2. \quad (5)$$

2.2. 纠缠相干态的演化

考虑双模腔场初始时处于纠缠相干态^[11]

$$|\Psi_{\text{field}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\alpha}} (|\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2 - |-\alpha\rangle_1 |-\alpha\rangle_2), \quad (6)$$

式中 $N_\alpha = 2 - 2\exp(-4|\alpha|^2)$, $|\alpha\rangle$ 表示相干态, 下标 1 和 2 分别表示第一腔场和第二个腔场. 令 α 为实数, 原子初始处于基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 时, 整个系统的态演化分别为

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle_g = \frac{1}{\sqrt{N_\alpha}} \exp(-\alpha^2) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1} (-\alpha)^{n+1} - (-\alpha)^{m+1} \alpha^{n+1}}{\sqrt{(m+1)!(n+1)!}} [N_1(m, n) |g\rangle |m+1\rangle_1 |n+1\rangle_2 + N_2(m, n) |e\rangle |m\rangle_1 |n\rangle_2] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m - (-\alpha)^m}{\sqrt{m!}} |g\rangle |m\rangle_1 |0\rangle_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n - \alpha^n}{\sqrt{n!}} |g\rangle |0\rangle_1 |n\rangle_2 \right\}, \quad (7)$$

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{N_\alpha}} \exp(-\alpha^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m (-\alpha)^n - (-\alpha)^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} [N_2(m, n) |g\rangle |m+1\rangle_1 |n+1\rangle_2 + N_1^*(m, n) |e\rangle |m\rangle_1 |n\rangle_2], \quad (8)$$

式中

$$N_1(m, n) = \left[\cos\left(\sqrt{\frac{4(1+m)(1+n) + [m - (1+n)]^2}{2}} gt\right) + i \frac{m - (1+n)}{\sqrt{4(1+m)(1+n) + [m - (1+n)]^2}} \times \sin\left(\sqrt{\frac{4(1+m)(1+n) + [m - (1+n)]^2}{2}} gt\right) \right], \quad (9)$$

$$N_2(m, n) = -i \sqrt{\frac{4(1+m)(1+n)}{4(1+m)(1+n) + [m - (1+n)]^2}} \times \sin\left(\sqrt{\frac{4(1+m)(1+n) + [m - (1+n)]^2}{2}}gt\right). \quad (10)$$

2.3. 对相干态的演化

若在初始时刻光场处于对相干态^[12]

$$|\Psi_{\text{field}}\rangle = N_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+q\rangle_1 |n\rangle_2, \quad (11)$$

原子分别处于基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$, 那么整个系统相应的态演化分别为

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle_g = N_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!(n+q+1)!}}$$

$$N_q = \sqrt{\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!}}}, \quad (14)$$

$$N_1(n, q) = -i \frac{\sqrt{4(n+1)(n+q+1)}}{\sqrt{4(n+1)(n+q+1) + (q-1)^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4(n+1)(n+q+1) + (q-1)^2}}{2}gt\right), \quad (15)$$

$$N_2(n, q) = \cos\left(\frac{\sqrt{4(n+1)(n+q+1) + (q-1)^2}}{2}gt\right) + i \frac{q-1}{\sqrt{4(n+1)(n+q+1) + (q-1)^2}} \times \sin\left(\frac{\sqrt{4(n+1)(n+q+1) + (q-1)^2}}{2}gt\right). \quad (16)$$

2.4. 双模压缩真空态的演化

若在初始时刻光场处于双模压缩真空态^[13]

$$|\Psi_{\text{field}}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^n}{\cosh r} |n\rangle_1 |n\rangle_2, \quad (17)$$

原子分别处于基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$, 那么系统随时间演化以后的状态分别为

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle_g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{n+1}}{\cosh r} \times [N_1(n) |g\rangle |n+1\rangle_1 |n+1\rangle_2 + N_2(n) |e\rangle |n\rangle_1 |n\rangle_2] + \frac{1}{\cosh r} |g\rangle |0\rangle_1 |0\rangle_2, \quad (18)$$

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^n}{\cosh r} \times [N_2(n) |g\rangle |n+1\rangle_1 |n+1\rangle_2 + N_1^*(n) |e\rangle |n\rangle_1 |n\rangle_2], \quad (19)$$

$$\times [N_1(n, q) |e\rangle |n+q\rangle_1 |n\rangle_2 + N_2(n, q) |g\rangle |n+q+1\rangle_1 |n+1\rangle_2] + \frac{N_q}{\sqrt{q!}} |g\rangle |q\rangle_1 |0\rangle_2, \quad (12)$$

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle_e = N_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} \times [N_2^*(n, q) |e\rangle |n+q\rangle_1 |n\rangle_2 + N_1(n, q) |g\rangle |n+q+1\rangle_1 \times |n+1\rangle_2], \quad (13)$$

式中

式中 r 为压缩参量,

$$N_1(n) = \cos\left(\frac{\sqrt{4(1+n)^2 + 1}}{2}gt\right) - \frac{i}{\sqrt{4(1+n)^2 + 1}} \times \sin\left(\frac{\sqrt{4(1+n)^2 + 1}}{2}gt\right), \quad (20)$$

$$N_2(n) = -i \frac{2(1+n)}{\sqrt{4(1+n)^2 + 1}} \times \sin\left(\frac{\sqrt{4(1+n)^2 + 1}}{2}gt\right). \quad (21)$$

3. 贝尔非定域性的演化

3.1. 基于自旋算符构造的贝尔不等式

对于两比特系统(例如自旋为 1/2 的系统), 贝

尔算符定义为^[14]

$$B_{\text{qubit}} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \otimes (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \otimes (\mathbf{b}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + (\mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \otimes (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) - (\mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \otimes (\mathbf{b}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), \quad (22)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}_j$ 为第 j 个量子比特的泡利矩阵, $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}$ 和 \mathbf{b}' 为四个单位矢量.

对于光场, Chen 等类比于自旋算符引入了赝自旋算符^[5]

$$s_z = \sum_{n=0}^{\infty} [|2n+1\rangle \langle 2n+1| - |2n\rangle \langle 2n|],$$

$$s_- = \sum_{n=0}^{\infty} |2n\rangle \langle 2n+1| = (s_+)^+,$$

$$s_x \pm i s_y = 2s_{\pm}, \quad (23)$$

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{s}} = s_z \cos \theta_a + \sin \theta_a (\exp(i\varphi_a) s_- + \exp(-i\varphi_a) s_+),$$

式中 θ_a 和 φ_a 分别是 \mathbf{a} 的径向角和方位角. 从而把贝尔算符推广到连续变量系统, 即

$$B_{\text{CHSH}} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) \otimes (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{s}}_2) + (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) \otimes (\mathbf{b}' \cdot \hat{\mathbf{s}}_2) + (\mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) \otimes (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{s}}_2) - (\mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) \otimes (\mathbf{b}' \cdot \hat{\mathbf{s}}_2). \quad (24)$$

在这种形式中, $\langle B_{\text{CHSH}} \rangle$ 对不等式的违背不超过 Cirel'son 上限, 即 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle| \leq 2\sqrt{2}$ ^[5,15]. 当某个量子态能使 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle| = 2\sqrt{2}$ 时, 我们就认为这个量子态能使 CHSH 型贝尔不等式的违背程度达到最大.

3.2. 贝尔非定域性的演化

取 $\theta_a = 0, \theta_{a'} = \pi/2, \theta_b = \theta_{b'}$, 利用文献[5]所提出的方法, 由(7), (8)及(24)式可得到原子初始处于基态和激发态时所对应的贝尔算符的期待值分别为

$$\begin{aligned} |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|_g &= \frac{16 \cos \theta_b \exp(-2\alpha^2)}{N_\alpha} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+4n+6}}{(2m+2)!(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4n+2}}{(2n+1)!} \right) \\ &+ \frac{8 \sin \theta_b \exp(-2\alpha^2)}{N_\alpha} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+4n+6}}{\sqrt{(2m+2)!(2n+1)!(2m+1)!(2n+2)!}} \right. \\ &\times [N_3^*(2m+1, 2n)N_3(2m, 2n+1) + N_3^*(2m, 2n+1)N_3(2m+1, 2n)] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+4n+10}}{\sqrt{(2m+3)!(2n+2)!(2m+2)!(2n+3)!}} \\ &\times [N_1(2m+1, 2n+2)N_1^*(2m+2, 2n+1) + N_1(2m+2, 2n+1)N_1^*(2m+1, 2n+2)] \left. \right\} \\ &+ \frac{16 \sin \theta_b \exp(-2\alpha^2)}{N_\alpha} \left\{ \alpha^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4n+6}}{\sqrt{(2n+2)!(2n+3)!}} \cos\left(\frac{\sqrt{4(2n+2) + (2n+2)^2}}{2}gt\right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+6}}{\sqrt{(2m+2)!(2m+3)!}} \cos\left(\frac{\sqrt{4(2m+2) + 4m^2}}{2}gt\right) \right] \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|_e &= \frac{16 \cos \theta_b \exp(-2\alpha^2)}{N_\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+4n+2}}{(2m+1)!(2n)!} + \frac{8 \sin \theta_b \exp(-2\alpha^2)}{N_\alpha} \\ &\times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+4n+2}}{\sqrt{(2m+1)!(2n)!(2m)!(2n+1)!}} [N_1^*(2m+1, 2n)N_1(2m, 2n+1) \right. \\ &+ N_1^*(2m, 2n+1)N_1(2m+1, 2n)] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4m+4n+6}}{\sqrt{(2m+2)!(2n+1)!(2m+1)!(2n+2)!}} \\ &\times [N_3^*(2m+1, 2n+2)N_3(2m+2, 2n+1) \\ &+ N_3^*(2m+2, 2n+1)N_3(2m+1, 2n+2)] \left. \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

式中

$$\theta_b = \arctan K(\alpha),$$

$$K(\alpha) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4n+1}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}} \right)^2}{\cosh \alpha^2 \sinh \alpha^2}. \quad (27)$$

令 $g = \beta_1 = \beta_2$, 通过数值模拟得出 α 取不同值情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随 gt 演化的图形.

图 1 所示为光场初始处于纠缠相干态、原子初始处于基态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化.

从图 1 可以发现, 如果原子初始处于基态, 只有当两个场模都有光子时场才与原子发生耦合. 在 α 较小的情况下, 两个场模都有一个光子的概率比较

小, 作用过程中场的状态变化不大, 因此贝尔算符平均值的变化范围也很小. 随着两个场模的光子数的逐渐增加, 与原子的相互作用对场的影响增大, 贝尔算符平均值的波动范围也加大. 当场的光子数继续增加到很大的值时, 相互作用过程中原子吸收光子对场的状态影响减小, 因而贝尔算符平均值的变化范围又变小.

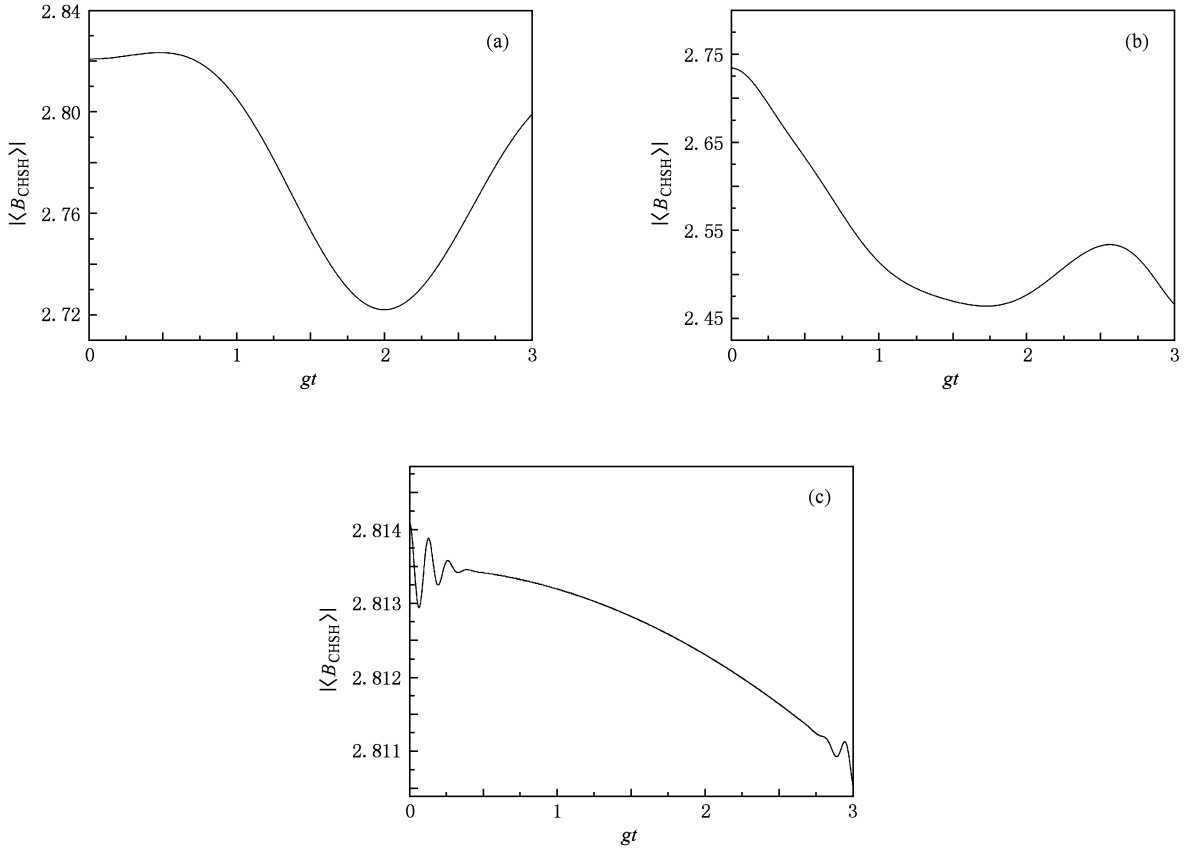


图 1 光场初始处于纠缠相干态、原子初始处于基态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化 (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 2$, (c) $\alpha = 5$

图 2 所示为光场初始处于纠缠相干态、原子初始处于激发态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化.

从图 2 可以看出, 原子初始处于激发态时, 不管两个场模初始处于什么态, 原子都能与场发生耦合. 当场初始的光子数比较小时, 相互作用过程中原子向场发射的光子对场的状态影响很大, 贝尔算符平均值的波动范围也很大. 随着场模光子数的逐渐增加, 作用过程中原子发射的光子对场的状态影响减小, 贝尔算符平均值的变化范围也逐渐变小.

图 2(a) 的结果也表明, 对于纠缠相干态, 如果

光场初始时的光子数很小, 原子初始时又处于激发态, 贝尔非定域性会突然消失, 之后重新恢复. 这主要是因为, 在相互作用的初始阶段, 双模场与原子间的纠缠不断增大, 当对原子变量求迹后, 双模场之间的纠缠特性减弱, 因而会出现 BNSD 现象. 之后, 随着时间的推移, 原子与光场之间逐渐消纠缠, 光场逐渐恢复到初态, 因而非定域性又能重新恢复. 然而 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 在任何时刻都不能完全恢复到初始时的值, 这表明在 Rabi 振荡过程中, 纠缠相干态与原子作用之后的任何时刻, 它们之间的纠缠都不能完全消除, 即光场不能完全恢复到初态.

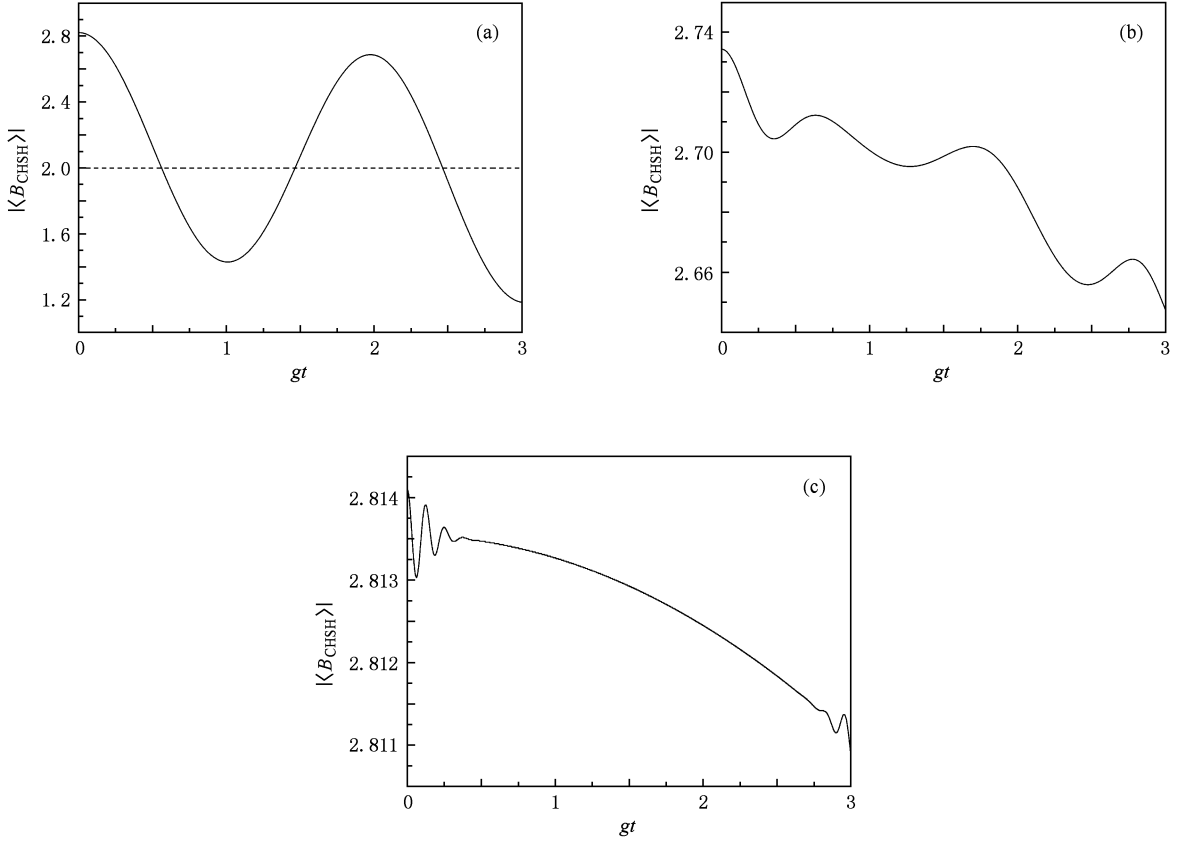


图2 光场初始处于纠缠相干态、原子初始处于激发态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化 (a) $\alpha=0.5$, (b) $\alpha=2$, (c) $\alpha=5$

由(12), (13), (18), (19)及(24)式,我们很容易推导出对相干态(令参量 q 为偶数)和双模压

缩真空态在与原子做非简并双光子相互作用以后贝尔非定域性的演化.

$$\begin{aligned}
 |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|_{g,p} &= 2\cos\theta'_b + 2\sin\theta'_b N_q^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{4n+3}}{\sqrt{(2n+2)!(2n+q+2)!(2n+1)!(2n+q+1)!}} \right. \\
 &\quad \times [N_1^*(2n+1, q)N_1(2n+2, q) + N_1^*(2n+2, q)N_1(2n+1, q)] \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{4n+5}}{\sqrt{(2n+3)!(2n+q+3)!(2n+2)!(2n+q+2)!}} \\
 &\quad \times [N_2^*(2n+2, q)N_2(2n+1, q) + N_2^*(2n+1, q)N_2(2n+2, q)] \left. \right\} \\
 &\quad + 4\sin\theta'_b \frac{N_q^2 \xi}{\sqrt{q!(q+1)!}} \cos\left(\frac{\sqrt{4(q+1)+(q-1)^2}}{2}gt\right), \tag{28} \\
 |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|_{e,p} &= 2\cos\theta'_b + 2\sin\theta'_b N_q^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{4n+1}}{\sqrt{(2n)!(2n+q)!(2n+1)!(2n+q+1)!}} \right. \\
 &\quad \times [N_2^*(2n, q)N_2(2n+1, q) + N_2^*(2n+1, q)N_2(2n, q)] \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{4n+3}}{\sqrt{(2n+2)!(2n+q+2)!(2n+1)!(2n+q+1)!}}
 \end{aligned}$$

$$\times [N_1^*(2n+2, q)N_1(2n+1, q) + N_1^*(2n+1, q)N_1(2n+2, q)] \}, \quad (29)$$

式中

$$\theta'_b = \arctan K(\xi, q),$$

$$K(\xi, q) = 2N_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{4n+1}}{\sqrt{(2n)!(2n+q)!(2n-1)!(2n+q+1)!}}. \quad (30)$$

$$\begin{aligned} |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|_{g,s} = & 2\cos\theta''_b + 2\sin\theta''_b \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{4n+3}}{(\cosh r)^2} [N_2^*(2n)N_2(2n+1) \right. \\ & + N_2^*(2n+1)N_2(2n)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{4n+5}}{(\cosh r)^2} [N_1^*(2n+2)N_1(2n+1) \\ & \left. + N_1^*(2n+1)N_1(2n+2)] \right\} + \frac{4\sin\theta''_b}{(\cosh r)^2} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}gt\right), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|_{e,s} = & 2\cos\theta''_b + 2\sin\theta''_b \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{4n+1}}{(\cosh r)^2} [N_1^*(2n)N_1(2n+1) \right. \\ & + N_1^*(2n+1)N_1(2n)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{4n+3}}{(\cosh r)^2} [N_2^*(2n+2)N_2(2n+1) \\ & \left. + N_2^*(2n+1)N_2(2n+2)] \right\}, \quad (32) \end{aligned}$$

式中

$$\theta''_b = \arctan K(r), \quad (33)$$

$$K(r) = \tanh(2r).$$

(28)和(29)式为光场初始处于对相干态,原子初始分别处于基态和激发态时贝尔算符平均值的表达式.(31)和(32)式为光场初始处于双模压缩真空

态,原子初始分别处于基态和激发态时贝尔算符平均值的表达式.

由(28),(29),(31)和(32)式,可以分别计算得到光场初始处于对相干态和双模压缩真空态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化,结果如图3和图4所示.

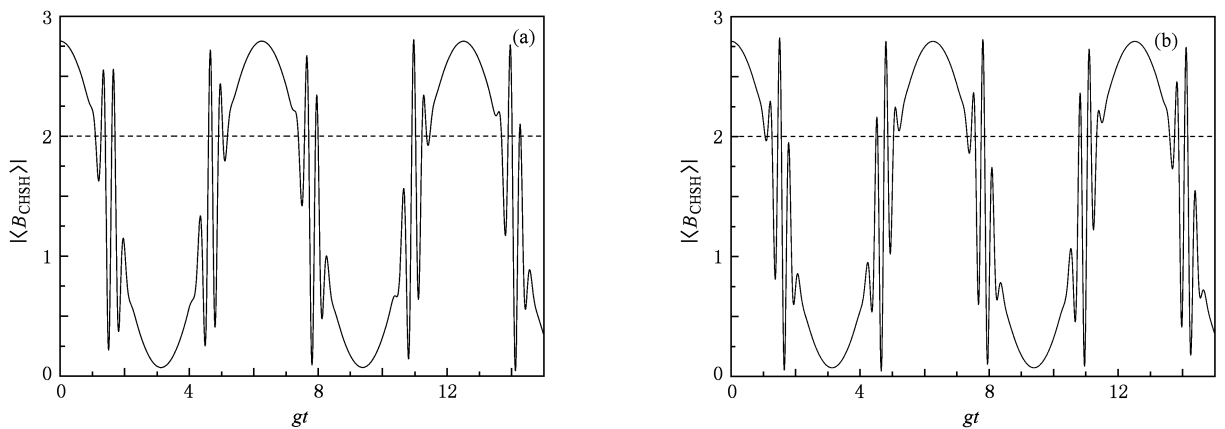


图3 光场初始处于对相干态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化 $q=2, \xi=10$. (a)原子初始处于基态, (b)原子初始处于激发态

由图3和图4可以发现,如果光场初始处于对相干态或者双模压缩真空态,不论原子初始处于基态还是激发态,都会出现BNSD现象,但是经过一定的时间后它又会重新恢复到初始值.场与原子发生纠缠,因而会出现BNSD现象,但与图2(a)中纠缠

相干态的情况不同的是,对相干态和双模压缩相干态在与原子相互作用的过程中,场与原子之间的纠缠在特定时刻能够基本消失,因而 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 在特定时刻能基本恢复到初始时的值,贝尔非定域性会呈现出周期性的变化.

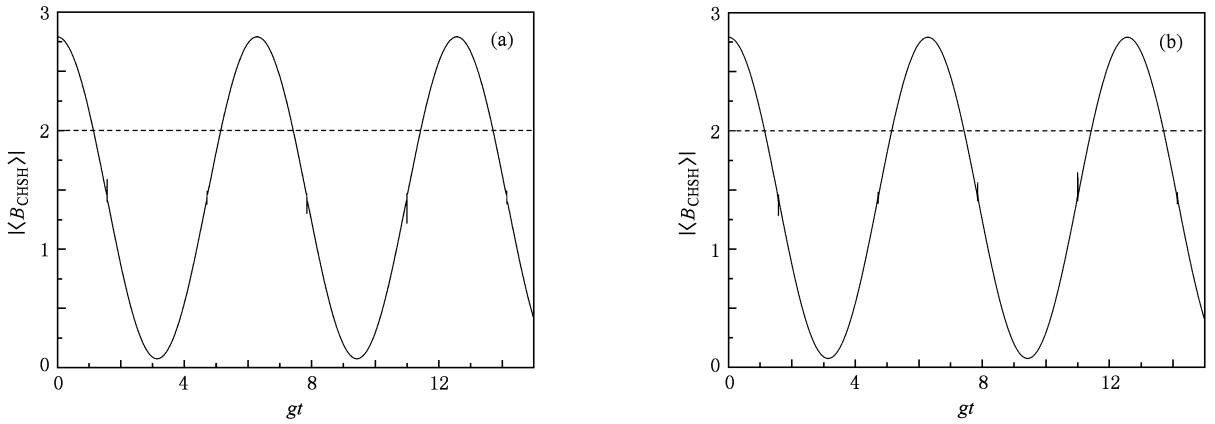


图4 光场初始处于双模压缩真空态的情况下 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$ 随时间的演化 $r=5$. (a) 原子初始处于基态, (b) 原子初始处于激发态

4. 结 论

本文通过对 CHSH 型贝尔不等式的违背程度, 讨论了各种双模非经典光场在非简并双光子 J-C 模型中贝尔非定域性的动力学特性. 数值模拟的结果表明, 纠缠相干态与对相干态、双模压缩真空态有着比较大的区别. 对于纠缠相干态, 贝尔非定域性的演化与两个场模平均光子数的多少密切相关, 只有在特定情况下才会出现 BNSD 现象. 在光子数很大的情况下对于对相干

态和双模压缩真空态, 贝尔非定域性呈现出非常类似的现象, 贝尔算符的平均值会在有限的时间内由初始值降至 2 或者更低, 之后经过一定的时间又会基本恢复到初始时的值, 呈现出周期性振荡的现象. 由于在很长的时间内都能基本恢复对 CHSH 型贝尔不等式的较大违背, 这一结果或许能够更有助于在实验上观察到连续变量量子态的贝尔非定域性.

衷心感谢郑仕标教授、杨侦标博士对本文工作提出的宝贵意见.

-
- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [3] Gisin N, Peres A 1992 *Phys. Lett. A* **162** 15
- [4] Banaszek K, Wódkiewicz K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2009
- [5] Chen Z B, Pan J W, Hou G, Zhang Y D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 040406
- [6] Jeong H, Son W, Kim M S, Ahn D, Brukner C 2003 *Phys. Rev. A* **67** 012106
- [7] Yu T, Eberly J H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140404
- [8] Jaeger G, Ann K 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2212
- [9] Lu H X, Li Y D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 40
- [10] Gou S C 1990 *Phys. Lett. A* **147** 218
- [11] Sanders B C 1992 *Phys. Rev. A* **45** 6811
- [12] Agarwal G S 1988 *J. Opt. Soc. Am. B* **5** 1940
- [13] Reid M D, Drummond P D 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2731
- [14] Braunstein S L, Mann A, Revzen M 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3259
- [15] Cirel'son B S 1980 *Lett. Math. Phys.* **4** 93

Dynamics of Bell nonlocality in non-degenerate two-photon Jaynes-Cummings model^{*}

Liao Chang-Geng[†] Chen Zi-Hong Luo Cheng-Li

(College of Physics and Information Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

(Received 6 November 2009; revised manuscript received 17 May 2010)

Abstract

We investigate quantum nonlocality dynamics of a three-level atom and a class of two-mode non-classical states (including the entangled coherent state, the pair coherent state and the two-mode squeezed state) in the non-degenerate two-photon Jaynes-Cummings model. It is shown that the time evolution of the Bell nonlocality for the case of the entangled coherent state is closely related to the average number of photons in the two-mode field. For the cases of the pair coherent state and the two-mode squeezed state, the effect of Bell nonlocality sudden death is demonstrated, and the absolute value of the $\langle B_{\text{CHSH}} \rangle$ exhibits exact periodic collapses and revivals.

Keywords: pseudo-spin operator, two-mode cavity field, non-degenerate two-photon Jaynes-Cummings model, Bell nonlocality

PACC: 4250, 0365

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974028) and the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2009J06002).

[†] E-mail: liaochangeng@hotmail.com