第 59 卷 第 12 期 2010 年 12 月
1000-3290/2010/59(12)/8994-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 12, December, 2010

Schwarzchild-de Sitter 黑洞的热力学性质*

张丽春 李怀繁 赵 仁†

(山西大同大学理论物理研究所, 物理系, 大同 037009)

(2010 年 3 月 19 日收到;2010 年 7 月 14 日收到修改稿)

在考虑黑洞视界与宇宙视界具有关联性的基础上,证明 de Sitter 时空的热力学熵为黑洞视界热力学熵与宇宙视界热力学熵之和. 给出了考虑两视界具有关联性后的 de Sitter 时空的热力学特性. 研究表明,de Sitter 时空的能量上限为纯 de Sitter 时空能量,de Sitter 时空的热容量是负的, de Sitter 时空一般是量子力学不稳定的.

关键词: de Sitter 时空, 能斯特定理, 暗能量, 等效温度

PACC: 9760L

1. 引 言

我们知道,de Sitter 时空在适当的参数范围内不仅有黑洞视界而且有宇宙视界. 黑洞视界与宇宙视界都有热辐射,它们的辐射温度不同,但黑洞视界与宇宙视界对应的热力学量均满足热力学第一定律,对应的熵满足面积公式[1—4]. 近年来,对 de Sitter 时空热力学性质的研究引起人们的广泛关注[4—18],因为在早期的暴胀时期,我们的宇宙就是一个准 de Sitter 时空,并且在 de Sitter 时空的研究中引入的宇宙常数项是真空能量的贡献,真空能量也是物质能量的一种形式. 如果宇宙常数对应暗能量,我们的宇宙将演化到一个新的 de Sitter 相中. 为了构造出宇宙演化的整个历史,我们应该对 de Sitter 时空经典的和量子的性质有一个清楚的认识[19]. 首先,人们期待着这一时空的热力学熵应该是黑洞视界与宇宙视界热力学熵之和, 即[5,19,20] $S=A_h/4+A_c/4$,其中 A_h 和 A_c 分别是黑洞视界与宇宙视界的面积. 目前,人们还没有非常好的办法去证明 de Sitter 时空的热力学熵是黑洞视界与宇宙视界热力学熵之和. 其次,目前人们对极端 de Sitter 时空中视界面对应的热力学熵不满足能斯特定理还未能给出恰当的物理解释. 如何建立自洽的 de Sitter 时空的热力学关系,是值得思考和研究的课题[19].

由于 de Sitter 时空中黑洞视界与宇宙视界对应的热力学量均为时空中质量 M 和半径 l 的函数,所以两视界对应的热力学量不是独立的,考虑两视界热力学量之间的关联性,对于我们研究 de Sitter 时空中热力学特性是非常重要的. 本文在考虑黑洞视界与宇宙视界具有关联性的基础上,讨论 de Sitter 时空的热力学特性,给出 de Sitter 时空的等效温度和能量. 研究表明,de Sitter 时空的能量上限为纯 de Sitter 时空能量,de Sitter 时空的热力学熵为黑洞视界热力学熵与宇宙视界热力学熵之和,由此定义的热力学熵不违背能斯特定理.

2. Schwarzschild-de Sitter 黑洞

首先,给出 Schwarzschild-de Sitter 黑洞的时空线元[3,4,21]

$$ds^2=-f(r)dt^2+f^{-1}(r)dr^2+r^2d\Omega_2^2. \quad (1)$$

这里

$$f(r)=1-\frac{2M}{r}-\frac{r^2}{l^2}, \quad (2)$$

式中 M 是这一时空的 Abbott-Deser(AD)质量, l 是 de Sitter 时空的半径. 当参数 M 和 l 满足 $0<\frac{27}{l^2}M^2<1$ 时,$f(r)=0$ 有两个正根和一个负根,大的正根为宇宙视界半径 r_c,小的正根为黑洞视界半径 r_+. 由三次代数方程的根与系数的关系可得

* 国家自然科学基金(批准号:11075098)和山西大同大学博士科研基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zhao2969@sina.com

$$M=\frac{r_+r_c(r_++r_c)}{2(r_+^2+r_+r_c+r_c^2)}=\frac{r_+r_c(r_++r_c)}{2l^2},\tag{3}$$

$$l^2=r_+^2+r_+r_c+r_c^2$$

和

$$2M<r_+<3M<\frac{l}{\sqrt{3}}<r_c<\sqrt{3}l.\tag{4}$$

黑洞视界与宇宙视界的表面引力分别为

$$\begin{aligned}\kappa_+&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=r_+}=\frac{l^2-3r_+^2}{2l^2r_+},\\ \kappa_c&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=r_c}=\frac{l^2-3r_c^2}{2l^2r_c}.\end{aligned}\tag{5}$$

由(4)和(5)式可知

$$\kappa_+>0,\quad \kappa_c<0,\tag{6}$$

且

$$\kappa_+>|\kappa_c|.$$

黑洞视界与宇宙视界的辐射温度分别为

$$T_+=\frac{\kappa_+}{2\pi},\quad T_c=-\frac{\kappa_c}{2\pi}.\tag{7}$$

黑洞视界与宇宙视界对应的 Bekenstein-Hawking (B-H)熵为

$$S_+=\pi r_+^2,\quad S_c=\pi r_c^2.\tag{8}$$

两视界对应的热力学量均满足热力学第一定律

$$\mathrm{d}E_+=T_+\mathrm{d}S_+,\quad \mathrm{d}E_c=T_c\mathrm{d}S_c,\tag{9}$$

式中 E_+ 和 E_c 分别为 AD 质量[22]和 Balasubramanian Boer Minic 质量[23,24]，

$$\begin{aligned}E_+&=\pm M=\pm\frac{r_+}{2}\left(1-\frac{r_+^2}{l^2}\right),\\ E_c&=\pm M=\pm\frac{r_c}{2}\left(1-\frac{r_c^2}{l^2}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

3. de Sitter 时空的热力学熵

以上给出的热力学量是在没有考虑黑洞视界与宇宙视界的关联性得到的. 由于在时空中只有变量 M 和 l，所以黑洞视界与宇宙视界对应的热力学量均为 M 和 l 的函数. 因而，两视界对应的热力学量不是独立的，具有关联性. 因此在研究 de Sitter 时空的热力学性质时，必须将两视界一起考虑. 最近文献[10,12,18]通过研究 de Sitter 时空的 Hawking 辐射，给出 de Sitter 时空辐射能量为 ω 的粒子的出射率应为

$$\Gamma=e^{\Delta S_++\Delta S_c},\tag{11}$$

式中 ΔS_+ 和 ΔS_c 分别为 de Sitter 时空辐射能量为 ω 的粒子后黑洞视界与宇宙视界对应的 B-H 熵差.

在量子力学中，一个系统从某一初态跃迁到末态的跃迁概率可以表示为[25, 26]

$$\Gamma_{(\mathrm{i}\to\mathrm{f})}=|M_{\mathrm{fi}}|^2F_{\mathrm{ps}}.\tag{12}$$

式中 $|M_{\mathrm{fi}}|^2$ 为振幅的平方，F_{ps} 为相空间因子. 相空间因子 F_{ps} 可以写成

$$F_{\mathrm{ps}}=\frac{N_{\mathrm{f}}}{N_{\mathrm{i}}}=\frac{\mathrm{e}^{S_{\mathrm{f}}}}{\mathrm{e}^{S_{\mathrm{i}}}}=\mathrm{e}^{\Delta S},\tag{13}$$

式中 N_{f} 和 N_{i} 分别为系统末态和初态的微观状态数. 对于黑洞，这样的“态数”恰好由“最终”与“初始” B-H 熵给出. 所以，(11)式给出的是 de Sitter 时空由“初态”辐射能量为 ω 的粒子后，达到“终态”的概率. 由此可知，de Sitter 时空的热力学熵是黑洞视界与宇宙视界的熵之和，即

$$S=S_++S_c.\tag{14}$$

4. de Sitter 时空的热力学量

由(14)式可知，de Sitter 时空热力学熵是两热力学系统(黑洞视界对应的热力学系统与宇宙视界对应的热力学系统)熵之和. 当不考虑两视界具有关联性时，两热力学系统对应的热力学量之间的关系分别由决定视界位置的方程给出，即

$$1-\frac{2M}{r_+}-\frac{r_+^2}{l^2}=0,\quad 1-\frac{2M}{r_c}-\frac{r_c^2}{l^2}=0.\tag{15}$$

由(15)式可得

$$\begin{aligned}-\frac{2\mathrm{d}M}{r_+}+\frac{2M}{r_+^2}\mathrm{d}r_+-\frac{2r_+\mathrm{d}r_+}{l^2}+\frac{2r_+^2}{l^3}\mathrm{d}l=0,\\ -\frac{2\mathrm{d}M}{r_c}+\frac{2M}{r_c^2}\mathrm{d}r_c-\frac{2r_c\mathrm{d}r_c}{l^2}+\frac{2r_c^2}{l^3}\mathrm{d}l=0.\end{aligned}\tag{16}$$

由(5)，(8)和(15)式得

$$\left(\mathrm{d}M-\frac{r_+^3}{l^3}\mathrm{d}l\right)=\frac{\kappa_+}{2\pi}\mathrm{d}S_+,$$
$$\left(\mathrm{d}M-\frac{r_c^3}{l^3}\mathrm{d}l\right)=\frac{\kappa_c}{2\pi}\mathrm{d}S_c. \tag{17}$$

因而,当辐射过程中 l 和 M 均变化时,两视界对应的热力学第一定律表达式可写成

$$\mathrm{d}E_+=\frac{\kappa_+}{2\pi}\mathrm{d}S_+,$$
$$\mathrm{d}E_c=\frac{\kappa_c}{2\pi}\mathrm{d}S_c, \tag{18}$$

式中

$$\mathrm{d}E_+=\left(\mathrm{d}M-\frac{r_+^3}{l^3}\mathrm{d}l\right),$$
$$\mathrm{d}E_c=\left(\mathrm{d}M-\frac{r_c^3}{l^3}\mathrm{d}l\right). \tag{19}$$

(18)式为两子系统满足的热力学第一律,其给出的是两热力学系统之间没有相互关联情况下所满足的性质.

由(14)式得 de Sitter 系统熵满足

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}S_++\mathrm{d}S_c. \tag{20}$$

将(18)式代入(20)式得

$$\mathrm{d}S=2\pi\left(\frac{1}{\kappa_+}+\frac{1}{\kappa_c}\right)\mathrm{d}M-\frac{2\pi}{l^3}\left(\frac{r_+^3}{\kappa_+}+\frac{r_c^3}{\kappa_c}\right)\mathrm{d}l. \tag{21}$$

将(21)式改写成

$$T\mathrm{d}S=\mathrm{d}E, \tag{22}$$

式中

$$\frac{1}{T}=-4\pi l^2\left(\frac{r_+}{l^2-3r_+^2}-\frac{r_c}{3r_c^2-l^2}\right) \tag{23}$$

为 de Sitter 时空的等效温度. 当 $r_c=r_+=\frac{l}{\sqrt{3}}=r_0$ 时,黑洞视界对应的温度 $T_+=\frac{\kappa_+}{2\pi}$和宇宙视界对应的温度 $T_c=-\frac{\kappa_c}{2\pi}$都为零,所以(23)式为$\frac{0}{0}$型不定式. 为求(23)式在 $r=r_0$ 点的值,将(23)式改写为

$$\frac{1}{T_{r=r_0}}=-4\pi l^2\lim_{\delta\to0}\left(\frac{r_0-\delta}{l^2-3(r_0-\delta)^2}-\frac{r_0+\delta}{3(r_0+\delta)^2-l^2}\right)$$
$$=\frac{4\pi l^2}{3r_0}. \tag{24}$$

由此可知,当 de Sitter 时空的黑洞视界和宇宙视界重合时, de Sitter 时空的等效温度为

$$T_{r=r_0}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi l}. \tag{25}$$

由(22)式知, de Sitter 时空的等效能量满足

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{l^3}\left(\frac{r_c^4(l^2-3r_+^2)-r_+^4(3r_c^2-l^2)}{r_c(l^2-3r_+^2)-r_+(3r_c^2-l^2)}\right)\mathrm{d}l-\mathrm{d}M. \tag{26}$$

为了简单,我们只讨论 l 不变的情况. 由(26)式可得,当 l 不变时 de Sitter 时空的能量 $E_l=-M+g(l)$. 而由(15)式知,当 $M=0$ 时,黑洞视界消失. 在此情况下, de Sitter 时空只有宇宙视界,而宇宙视界对应的能量为 l,故 $g(l)=l$. 因此

$$E_l=l-M. \tag{27}$$

当 $r=r_0$ 时, $r_+=r_0$ 是 de Sitter 时空最大黑洞的半径. 由此可得 de Sitter 时空中 AD 质量满足

$$M\leqslant\frac{l}{3\sqrt{3}}. \tag{28}$$

所以(27)式给出 de Sitter 时空的能量 $E_l>0$,满足物理条件. 当 de Sitter 时空的黑洞视界和宇宙视界重合到一起时, de Sitter 时空的能量为

$$E_l^{r=r_0}=l\left(1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right). \tag{29}$$

由(29)式知,de Sitter 时空对应的最大能量为 l,最小能量为 $E_l^{r=r_0}$.

当宇宙常数 l 不变时,de Sitter 时空的热容量为

$$C_l=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_l. \tag{30}$$

由(23)式得

$$\mathrm{d}T|_l=\frac{(l^2-3r_+^2)^2(3r_c^2+l^2)\mathrm{d}r_c+(3r_c^2-l^2)^2(3r_+^2+l^2)\mathrm{d}r_+}{4\pi l^2[(l^2-3r_+^2)r_c-(3r_c^2-l^2)r_+]^2}. \tag{31}$$

由(3)式得

$$\frac{\mathrm{d}r_c}{\mathrm{d}M}=\frac{2l^2}{r_+^2+r_+r_c-2r_c^2}<0,$$
$$\frac{\mathrm{d}r_+}{\mathrm{d}M}=\frac{2l^2}{r_c^2+r_+r_c-2r_+^2}>0. \tag{32}$$

我们可求得 de Sitter 时空的热容量

$$C_l=\frac{2\pi[(l^2-3r_+^2)r_c-(3r_c^2-l^2)r_+]^2(3r_c^2-l^2)(l^2-3r_+^2)}{(l^2-3r_+^2)^3(3r_c^2+l^2)-(3r_c^2-l^2)^3(3r_+^2+l^2)}. \tag{33}$$

由于$(l^2-3r_+^2)^3(3r_c^2+l^2)<(3r_c^2-l^2)^3(3r_+^2+l^2)$,因此在 l 不变的情况下, de Sitter 时空的热容量 $C_l<0$,表明在 l 保持不变而 M 变化时,de Sitter 时空是热力学不稳定的. 虽然宇宙视界对应的热容量可为正,但考虑到黑洞视界与宇宙视界不是独立的热

力学系统,系统是相互关联的,而相互关联的热力学系统-de Sitter 时空是热力学不稳定的.

5. 结　　论

研究表明,当黑洞视界和宇宙视界重合在一起时, 即两子系统对应的辐射温度 $T_{+/c}\rightarrow 0$,而两热力学子系统的熵并非为零,这与黑洞热力学能斯特理论相矛盾. 而复合系统所给出的 de Sitter 时空的等效温度 T 和熵 S 并非趋于零. 这从一个侧面解决了极端 de Sitter 黑洞熵不满足能斯特定理的矛盾. de Sitter 时空的能量并非两子系统能量之和, de Sitter 时空的能量不大于纯 de Sitter 时空中能量 l. 这一结论支持了文献[23,27]提出所谓的质量限制猜测(mass bound conjecture):如果有一渐近 de Sitter 时空的质量超过纯 de Sitter 时空的质量,它必包含有宇宙学奇异性. 当不考虑两视界具有关联时,认为 de Sitter 时空是非平衡的热力学系统,是由于黑洞视界和宇宙视界的辐射温度不同而引起的. 当考虑两视界具有关联后,由于 de Sitter 时空的热容量是负的,从而得出 de Sitter 黑洞时空一般是量子力学不稳定的结论.

[1] Hawking S W, Page D N 1983 *Commun. Math. Phys.* **87** 577

[2] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2738

[3] Cai R G 2002 *Nucl. Phys.* B **628** 375

[4] Myung Y S 2008 *Phys. Rev.* D **77** 104007

[5] Urano M, Tomimatsu A 2009 *Classical Quantum Grav.* **26** 105010

[6] Dymnikova I, Korpusik M 2010 *Phys. Lett.* B **685** 12

[7] Myung Y S 2007 *Phys. Lett.* B **645** 369

[8] Farmany A, Dehghani M, Setare M R, Mortazavi S S 2009 *Phys. Lett.* B **682** 114

[9] Medved A J M 2002 *Phys. Rev.* D **66** 124009

[10] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2010 *Gen. Relat. Grav.* **42** 975

[11] Setare M R, Altaie M B 2003 *Eur. Phys. J.* C **30** 273

[12] Hu S Q, Zhang L C, Zhao R 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6798 (in Chinese) [胡双启、张丽春、赵　仁 2009 物理学报 **58** 6798]

[13] Li H L, Jiang Q Q, Yang S Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 539 (in Chinese) [李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539]

[14] Ren J, Zhao Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 292

[15] Lin K, Yang S Z 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2154

[16] Han Y W, Bao Z Q, Hong Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 62

[17] Chen D Y, Jiang Q Q, Li H L, Yang S Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1425

[18] Li H F, Zhang S L, Wu Y Q, Zhang L C, Zhao R 2009 *Eur. Phys. J.* C **63** 133

[19] Cai R G 2005 *Physics* **34** 555 (in Chinese) [蔡荣根 2005 物理 **34** 555]

[20] Cai R G, Ji J Y, Soh K S 1998 *Classical Quantum Grav.* **15** 2783

[21] Cai R G 2002 *Phys. Lett.* B **525** 331

[22] Abbott L F, Deser S 1982 *Nucl. Phys.* B **195** 76

[23] Balasubramanian V, de Boer J, Minic D 2002 *Phys. Rev.* D **65** 123508

[24] Ghezelbash A M, Mann R B 2002 *J. High Energy Phys.* (1) 005

[25] Zhang J Y 2008 *Phys. Lett.* B **668** 353

[26] Liu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6164 (in Chinese) [刘文彪 2007 物理学报 **56** 6164]

[27] Cai R G, Myung Y S, Zhang Y Z 2002 *Phys. Rev.* D **65** 084019

Thermodynamics of the Schwarzchild-de Sitter black hole*

Zhang Li-Chun Li Huai-Fan Zhao Ren†

(*Institute of Theoretical Physics*, *Department of Physics*, *Shanxi Datong University*, *Datong* 037009, *China*)

(Received 19 March 2010; revised manuscript received 14 July 2010)

Abstract

Considering the fact that there is a correlation between the black hole horizon and cosmological horizon, we show that the thermodynamic entropy of de Sitter spacetime is the sum of thermodynamic entropies of the black hole horizon and cosmological horizon. The thermodynamic properties of de Sitter spacetime are also derived. It is shown that the upper limit energy of de Sitter spacetime is equal to the energy of pure de Sitter spacetime, The thermal capacity of de Sitter spacetime is negative, so de Sitter spacetime is mechanically unstable.

Keywords: de Sitter spacetime, Nernst theorem, dark energy, equivalent temperature

PACC: 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11075098) and the Scientific Research Foundation for Doctors of Shanxi Datong University, China.

† Corresponding author. E-mail: zhao2969@sina.com