

散射介质中多重散射太赫兹脉冲的时域统计特性^{*}

刘文军[†] 毛宏燕 付国庆 曲士良

(哈尔滨工业大学(威海)光电科学系, 威海 264209)

(2009 年 3 月 2 日收到; 2009 年 4 月 23 日收到修改稿)

对散射介质中多重散射太赫兹脉冲的时域统计特性进行了分析. 给出了时间延迟量取不同值时电场的概率分布、散射场强度及其概率分布、散射场实部和虚部的概率分布. 由于脉冲的宽带特性及瞬间特性, 多重散射场概率统计分布与不同时间延迟量有关, 太赫兹脉冲多重散射场的统计特性分布是非平稳过程.

关键词: 散射, 太赫兹脉冲, 统计特性

PACC: 2460, 4225B

1. 引 言

散射光子的测量是统计光学中的有效研究方法. 窄带散射光子的密度波能够对浸没在随机介质中的物体成像; 对随机介质中的时域强度或场相关进行测量, 并采用散射光谱可以得到随机介质的有关信息; 利用散斑图像的空间相关性, 可以得到物体的有关特性或移动变化^[1-11], 这些技术在生物医学成像方面有潜在的应用价值. 然而, 由于难以对与光场相关的相位进行测量, 所有这些方法都依赖于对强度进行测量, 而不是对电场进行测量. 随着超快测量技术的发展^[12], 超快脉冲时域测量方法可以实现对散射光子的测量, 这种测量方法能够测量出散射光电场的振幅变化.

本文采用时域光谱的方法对散射光子进行测量, 时域光谱是物理和生物研究中的一种有效工具, 从医学成像到材料鉴定都有着重要的应用价值. 由于太赫兹光谱是新兴的研究领域, 许多应用有待开发. 目前的研究主要侧重于太赫兹脉冲源及相关探测设备的开发及探索其在生物物理领域的潜在应用价值^[13-24], 而对这种瞬态超快的宽带脉冲与物质之间的相互作用机制及其在介质中传播时的统计特性则缺少研究. 本文着重讨论了散射介质中多重散射太赫兹脉冲的时域统计特性.

2. 太赫兹脉冲在散射介质中的传播理论

太赫兹脉冲在散射介质中的传播可以用麦克斯韦方程描述^[25, 26], 即

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\mu(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + [\nabla \ln \mu(\mathbf{r})] \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla [\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r})] = 0, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{E}$ 是矢量电场, c 是真空中光速, $\varepsilon(\mathbf{r})$ 和 $\mu(\mathbf{r})$ 分别是复介电常数和磁导率. 如果复介电常数为恒量或者在输入电场的波长范围内二者的变化极小, 方程(1)可以简化为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\tilde{n}^2(\omega, \mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

其中 $\tilde{n}(\omega, \mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r})}$ 是介质的折射率. 忽略极化效应并变换到频域, 方程(2)可以化为标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

式中 $u(\mathbf{r})$ 是脉冲电场的复振幅函数, $k_0 = 2\pi/\lambda$ 是电场在真空中的波数. 方程(3)可以改写为

$$(\nabla^2 + k_0^2) u(\mathbf{r}) = -o(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}), \quad (4)$$

其中 $o(\mathbf{r})$ 是与散射介质特性有关的特征函数

$$o(\mathbf{r}) = -k_0^2 [\tilde{n}^2(\omega, \mathbf{r}) - 1]. \quad (5)$$

方程(4)的解可以写为两个如下两个分量的和

$$u(\mathbf{r}) = u_o(\mathbf{r}) + u_s(\mathbf{r}), \quad (6)$$

式中 $u_o(\mathbf{r})$ 和 $u_s(\mathbf{r})$ 分别是入射脉冲电场和散射介

^{*} 哈尔滨工业大学(威海)校科学研究基金(批准号: HIT(WH).2008004)资助的课题.

[†] E-mail: liuwenjun86@yahoo.com.cn

质产生的散射场. 如果无散射介质存在, $u_o(\mathbf{r})$ 应是下列亥姆霍兹方程的解, 即

$$(\nabla^2 + k_0^2) u_o(\mathbf{r}) = 0. \tag{7}$$

综合(4), (6) 和(7) 式, 可以得到散射场分量满足的方程为

$$(\nabla^2 + k_0^2) u_s(\mathbf{r}) = -o(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}). \tag{8}$$

方程(8) 的解可以写为^[10]

$$u_s(\mathbf{r}) = u_o(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \tag{9}$$

式中 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 是格林函数, 它是下列微分方程的解

$$(\nabla^2 + k_0^2) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{10}$$

其中 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 是狄拉克 δ 函数, 格林函数可以写为

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{11}$$

由(9) 式可以求出散射场 $u_s(\mathbf{r})$. 根据玻恩近似, (9) 式可以展开为玻恩序列

$$u(\mathbf{r}) = u_o(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^j u_i(\mathbf{r}), \tag{12}$$

第 i 级散射场 $u_i(\mathbf{r})$ 为

$$u_i(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') u_{i-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \tag{13}$$

如果散射场 $|u_s(\mathbf{r})|$ 远小于入射场 $|u_o(\mathbf{r})|$, 散射场可以近似用一级散射场表示为

$$u_s(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') u_o(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \tag{14}$$

3. 时域统计特性分析与结果

由钛宝石谐振腔输出的中心波长为 810 nm、重复频率为 75 MHz、宽度为 90 fs 的超快脉冲用于产生和探测皮秒太赫兹脉冲, 聚焦后的太赫兹脉冲入射到由直径约为 800 μm 的聚四氟乙烯颗粒组成的厚度为 4 cm 的散射介质中. 图 1 为输入脉冲波形. 图 2 给出了三次从散射介质中出射的脉冲的波形, 每次测量结束后稍微改变探测器与入射光束方向的夹角, 然后进行下一次测量, 共测量 10 次. 由图 2 可以看出, 由于脉冲经历了多重散射, 导致输出脉冲波形发生了复杂的随机变化.

通过对测得的输出脉冲波形进行傅里叶变换, 可以得到散射脉冲场的实部 $u_r = \text{Re}[u(t)]$ 和虚部 $u_i = \text{Im}[u(t)]$. 通过这些测量结果, 可以得到透射脉冲电场实部和虚部的概率分布. 考虑透射脉冲电场 $u(t)$ 在时域内的统计特性, 由于入射到散射介质

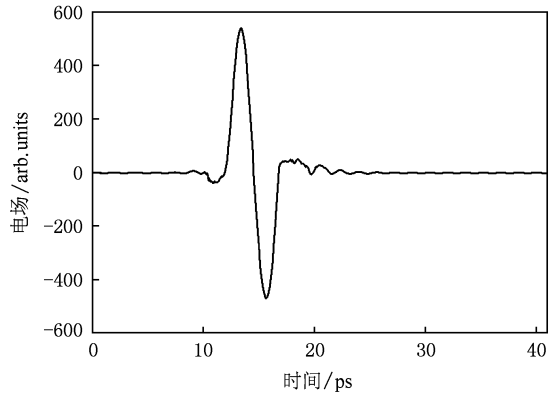


图 1 输入脉冲波形

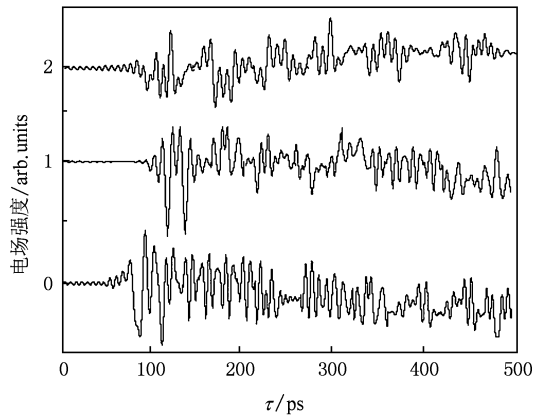


图 2 输出脉冲波形

中的脉冲极短, 因此散射场的统计特性是非静态的; 同时必须考虑散射电场随时间的变化分布. 当入射脉冲进入散射介质后, 在出射之前它经历了多重散射, 测量得到的输出脉冲场是许多散射子波场的叠加. 因此在时间延迟量 τ 及测量结构确定的情况下, 测量场可以用大量彼此独立的具有随机相位和振幅的散射场的和表示. 根据中心极限定理可知, 大量独立的同一随机变量的和遵从高斯统计分布, 因此散射电场 $u(\tau)$ 的分布可以表示为^[27]

$$P(u|\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle I(\tau) \rangle}} \exp\left[-\frac{u^2}{2\langle I(\tau) \rangle}\right], \tag{15}$$

式中 $\langle I(\tau) \rangle$ 表示散射场强度的平均值. 图 3 给出了不同时间延迟下散射场 $u(\tau)$ 的概率分布. 每一种分布为时间延迟量 τ 一定的情况下, 通过对散射场进行统计平均而求得并在最大值处进行了归一化; 图中的实线为(15) 式所表示的高斯分布. 由图 3 可以看出, 散射场概率统计特性的分布与不同的时间延迟量有关, 因此太赫兹脉冲多重散射场的统计特性

分布是非平稳过程.

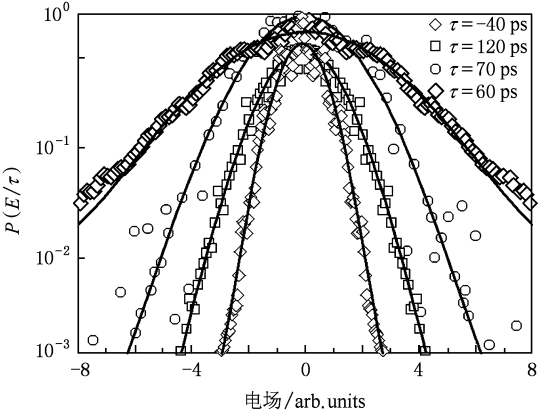


图3 时间延迟量 τ 取不同值时电场的概率分布

由于出射散射场的强度 $I(\tau)$ 与电场强度 $u(\tau)$ 的二次方成正比以及电场强度的统计特性遵从高斯分布,因此散射场的强度 $I(\tau)$ 必定遵从指数分布规律^[27]

$$P(I|\tau) = \frac{1}{\langle I(\tau) \rangle} \exp\left[-\frac{I}{\langle I(\tau) \rangle}\right]. \tag{16}$$

从(15)和(16)式可以看出,概率分布 $P(u|\tau)$ 和 $P(I|\tau)$ 依赖于时间延迟量 τ ,这从理论上进一步反映出多重散射场统计特性分布是非平稳过程,与图3中数据相符合.由于 $P(u|\tau)$ 和 $P(I|\tau)$ 的变化与散射场强度的平均值 $\langle I(\tau) \rangle$ 有关,因此 $\langle I(\tau) \rangle$ 对描述散射场及强度的统计特性起着关键的作用.图4给出了散射场强度的平均值 $\langle I(\tau) \rangle$ 随时间的分布,空心方框符号为实验数据,为了使图像比较清晰,在图中只给出了两组实验数据;图中的实线为数据分布的最佳拟合曲线.由图4可以看出:大约在30—120 ps的时间窗口内,散射场强度的平均值 $\langle I(\tau) \rangle$ 是随时间而变化的,因此 $\langle I(\tau) \rangle$ 与光子的飞行时间即在时间 τ 到达的光子概率成正比.这主要是因为输入的脉冲极短,这段时间窗口对应于介质的脉冲响应.

为了确定在这段时间窗口内所有时间延迟量 τ 对应的强度分布,需要对(16)式在时间窗口对应的时间内进行积分并且归一化^[27]

$$P(I) = \frac{1}{(\Delta t)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\langle I(\tau) \rangle} \exp\left[-\frac{I}{\langle I(\tau) \rangle}\right] d\tau, \tag{17}$$

式中的 $\Delta t = t_2 - t_1$ 是归一化因子,(17)式可以理解为大量由光子飞行时间决定的指数分布的叠加.通

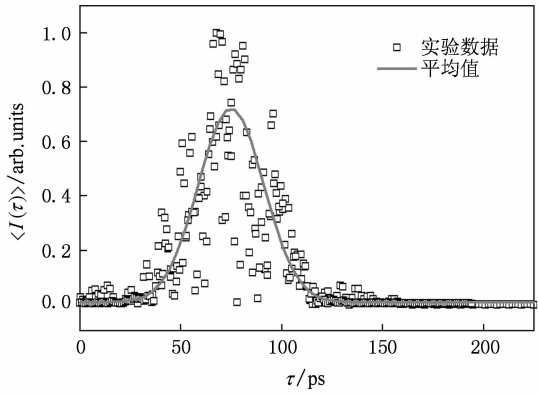


图4 散射场强度平均值 $\langle I(\tau) \rangle$ 随时间的分布

过对测量得到的复电场包络进行概率计算,并且用平均强度 $\langle I \rangle$ 进行归一化,可以得到散射场强度的概率分布如图5所示.图中空心方框符号为实验数据,实线为最佳拟合曲线.

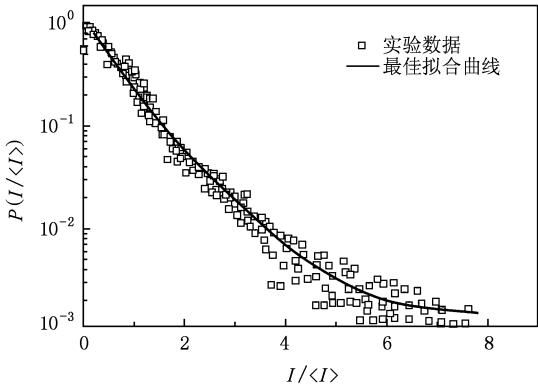


图5 散射场强度的概率分布

在时间窗口内,散射电场实部和虚部的概率分布可以表示为^[27]

$$P(a) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle I(\tau) \rangle} \times \exp\left[-\frac{a^2}{2\langle I(\tau) \rangle}\right] d\tau, \tag{18}$$

式中 $a = \{u_r, u_i\}$ 分别表示电场的实部和虚部,电场实部和虚部概率分布的实验结果如图6所示,其中 $\sigma = (\langle I(\tau) \rangle)^{1/2}$,图中的实线为实验数据的高斯拟合.由图6可以看出,归一化的脉冲电场实部和虚部的概率分布有着完全相同的分布,这与(18)式的描述相符合;同时电场实部和虚部的概率分布并不遵从高斯分布,这主要是因为太赫兹脉冲的宽带特性及瞬间特性使得无法与可以准确描述单色光源统计特性的高斯分布相拟合.

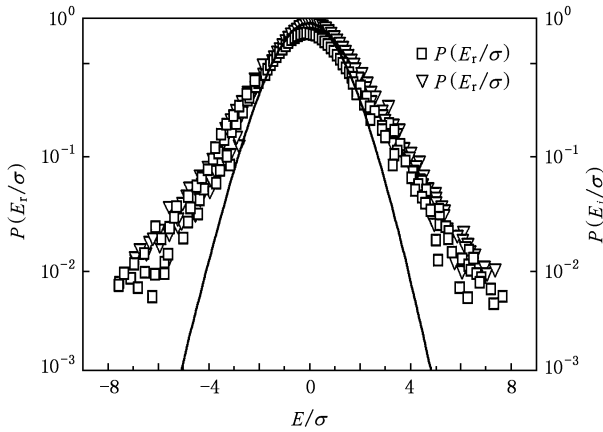


图6 散射场实部和虚部的概率分布

4. 结 论

对多重散射宽带太赫兹脉冲的时域统计特性进行了讨论. 由于脉冲的宽带特性及瞬间特性, 多重散射场概率统计特性的分布与不同的时间延迟量有关, 因此太赫兹脉冲多重散射场的统计特性分布是非平稳过程; 在特定的时间窗口内, 散射场强度平均值随时间而变化; 散射场实部和虚部的概率分布并不遵从高斯分布, 这与多重散射场的统计特性是非平稳过程相符合.

- [1] Yoo K M, Alfano R R 1990 *Opt. Lett.* **15** 320
- [2] Thompson C A, Webb K J, Weiner A M 1997 *J. Opt. Soc. Am. A* **14** 2269
- [3] McKinney J D, Webster M A, Webb K J 2000 *Opt. Lett.* **25** 4
- [4] Webster M A, Webb K J, Weiner A M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 033901
- [5] Forrester K R, Tulip J, Leonard C 2004 *IEEE Trans. Bio. Eng.* **51** 2074
- [6] Cathie V, Jerome M 2006 *Opt. Express* **14** 7198
- [7] Bilencal A, Lasser T, Ozcan A, Leitgeb R A 2007 *Opt. Express* **15** 281
- [8] García J, Zalevsky Z, Martínez P G, Teicher M 2008 *Appl. Opt.* **47** 3032
- [9] Fartash V, Bozena K, Glenn H C 2008 *Opt. Express* **16** 21492
- [10] Rajan V, Varghese B, Leeuwen T G 2008 *Opt. Commun.* **281** 1755
- [11] Kazuto T, Yuji K, Koichi S 2009 *Appl. Opt.* **48** 36
- [12] Trebino R, Delong K W, Fittinghoff D N 1997 *Rev. Sci. Instrum.* **68** 3277
- [13] Ferguson B, Wang S H, Gray D, Abbot D, Zhang X C 2002 *Opt. Lett.* **27** 1312
- [14] Pearce J, Choi H, Mittleman D M, White J, Zimdars D 2005 *Opt. Lett.* **30** 1653
- [15] Tilborg J, Schroeder C B, Tóth C, Geddes C R, Esarey E 2007 *Opt. Lett.* **32** 313
- [16] David C, Christopher L, Vincent P W, Bryan C, Don A 2003 *J. Biomed. Opt.* **8** 303
- [17] Seongsin M K, Fariba H, James S H, Allison W K, James F 2006 *Appl. Phys. Lett.* **88** 153903
- [18] Torsten L, Thilo M, Christian W, Ali A, Bernd H 2007 *Appl. Phys. Lett.* **90** 091111
- [19] Ma S H, Shi Y L, Xu X L, Yan W, Yang Y P, Wang L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4091 (in Chinese) [马士华、施宇蕾、徐新龙、严伟、杨玉平、汪力 2006 物理学报 **55** 4091]
- [20] Zhang X B, Shi W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4984 (in Chinese) [张显斌、施卫 2008 物理学报 **57** 4984]
- [21] Jia W L, Shi W, Qu G H, Sun X F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5425 (in Chinese) [贾婉丽、施卫、屈光辉、孙小芳 2008 物理学报 **57** 5425]
- [22] Li W P, Zhang Y X, Liu S G, Liu D G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2875 (in Chinese) [李文平、张雅鑫、刘盛纲、刘大刚 2008 物理学报 **57** 2875]
- [23] Sun H Q, Zhao G Z, Zhang C L, Yang G Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 790 (in Chinese) [孙红起、赵国忠、张存林、杨国桢 2008 物理学报 **57** 790]
- [24] Meng K, Wang Y H, Chen L W, Zhang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3198 (in Chinese) [孟阔、王艳花、陈龙旺、张岩 2008 物理学报 **57** 3198]
- [25] Born M, Wolf E 1999 *Principles of Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [26] Zhang X C 2004 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **362** 283
- [27] Goodman J W 2000 *Statistical Optics* (New York: John Wiley & Sons)

Temporal statistics of multiply scattered terahertz pulses in scattering medium^{*}

Liu Wen-Jun[†] Mao Hong-Yan Fu Guo-Qing Qu Shi-Liang

(*Department of Opto-electric Science, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China*)

(Received 2 March 2009; revised manuscript received 23 April 2009)

Abstract

The temporal statistics of multiple scattered broadband terahertz pulses through a highly scattering medium is analyzed. The probability distribution function of the scattered field varies with the delay time. The probability distributions of the scattered field, and the real and imaginary components are discussed. Due to the broad bandwidth and the transient nature of the terahertz pulses, the statistics of the scattered field evolves over time and is therefore nonstationary. This analysis emphasizes that these measured fields are not stationary. We demonstrate that the nonstationary process is a direct consequence of the time dependence of the averaged intensity.

Keywords: scattering, terahertz pulse, statistical properties

PACC: 2460, 4225B

^{*} Project supported by the Scientific Research Foundation of Harbin Institute of Technology at Weihai, China(Grant No. HIT(WH).2008004).

[†] E-mail: liuwenjun86@yahoo.com.cn