

## 新分数阶超混沌系统的研究与控制及其电路实现\*

黄丽莲<sup>†</sup> 辛方 王霖郁

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

(2010年4月19日收到; 2010年5月12日收到修改稿)

为了提高混沌信号的复杂性, 提出了一个新的分数阶四维超混沌系统, 并对该系统的混沌动力学特性进行详细的理论分析和数值仿真, Matlab 仿真证实了该分数阶超混沌系统存在混沌的最小阶数为 3.2 阶. 同时运用 Multisim 软件对该系统进行电路实验仿真验证. 最后设计了简单有效的线性反馈控制器, 并进行电路实现, 仿真结果证明了控制器是有效的.

**关键词:** 分数阶超混沌系统, 动力学特性, 电路仿真, 反馈控制

**PACS:** 05.45.-a

## 1. 引言

分数阶微积分已有 300 多年的历史, 但由于长期没有实际应用前景而发展缓慢. 近年来, 在对整数阶混沌系统研究的基础上, 人们将分数阶微分算子引入到非线性动力学系统中, 发现当系统的阶数为分数时, 系统仍表现为混沌行为, 而且利用分数阶微积分算子能更准确地描述实际混沌系统的动力学特性. 从此分数阶混沌系统<sup>[1-6]</sup> 及其应用引起人们的深入研究.

若将分数阶微分算子引入到超混沌<sup>[7-15]</sup> 系统中, 则分数阶超混沌系统将存在两个或两个以上正的 Lyapunov 指数<sup>[16-21]</sup>, 能产生更为复杂的动态行为, 具有非常强的随机性和不可预测性. 从而分数阶超混沌系统在实际应用上有更多的优势.

本文提出一种新的分数阶四维自治超混沌系统. 首先, 分析了该分数阶超混沌系统平衡点的性质、系统频谱图和 Lyapunov 指数等动力学特性. 然后, 用 Matlab 对该系统进行数值仿真<sup>[22-24]</sup>, 分析其混沌吸引子相图. 利用微积分理论, 基于波特图的频域近似方法, 应用分数阶树形电路单元<sup>[25,26]</sup> 设计分数阶超混沌电路, 利用 Multisim 软件仿真该电路. 通过数值仿真和电路实验证实此分数阶超混沌系统可以产生混沌现象, 且存在混沌的最小阶数为

3.2 阶. 最后设计一个简单合适的线性反馈控制器, 实现对该分数阶超混沌系统的控制, 并且通过数值仿真和电路仿真实验验证该控制器的有效性.

## 2. 分数阶微分

## 2.1. 分数阶微分定义及频域近似

对于分数阶微积分有几种不同的定义<sup>[27]</sup>, 常用的是 Riemann - Liouville (RL) 定义的分数阶微积分, 其数学表达式如下:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

式中,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数,  $n-1 < q < n$ ,  $q$  为分数,  $n$  为整数. (1) 式是分数阶微分和分数阶积分的统一表示, 它显示了分数阶微积分具有记忆功能, 因此分数阶微积分更适合于电路系统特性的描述. 若函数  $f(t)$  的初始值为零, (1) 式的拉普拉斯变换可表示为

$$L\left\{\frac{d^q f(t)}{dt^q}\right\} = s^q L\{f(t)\}. \quad (2)$$

因此, 分数阶微分算子  $q$  可以在频域中用传递函数  $H(s) = 1/s^q$  表示. 目前工程中分数阶微积分运算最常用的是时域与复频域转换法. 通过求解复频域的传输函数  $1/s^q$ , 得到复频域的展开形式, 再将复频域形式转化为时域形式进行数值求解. 利用

\* 国家自然科学基金(批准号: F010303)和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: lilian\_huang@163.com

基于波特图的频域近似方法,文献[28]推导出  $1/s^q$  ( $q = 0.1-0.9$ , 步长为 0.1) 的展开式. 本文采用近似误差为 2 dB 时的近似式.

### 2.2. 分数阶线性系统稳定性理论

**引理 1**<sup>[29,30]</sup> 考虑分数阶自治系统

$$D_*^q X = AX, X(0) = X_0, \quad (3)$$

其中  $0 < q < 1, X \in R^n (n \in N), A \in R^{n \times n}$ .

1) 系统是渐近稳定的, 当且仅当对任意的特征值  $\lambda$ , 有  $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$  都成立.

2) 系统是稳定的, 当且仅当对任意的特征值  $\lambda$ , 有  $|\arg(\lambda)| \geq \frac{q\pi}{2}$  都成立.

因此, 阶次为  $q$  的分数阶系统, 对于  $0 < q < 1$ , 无论状态变量为何值, 只要系统特征根的实部都不大于零, 则分数阶系统渐近稳定.

### 3. 一个新分数阶超混沌系统

在此, 我们提出一个新的分数阶超混沌系统, 系统含有三个非线性项. 其动力学方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y - x) + mw, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= dx - xz + cy, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - bz, \\ \frac{d^q w}{dt^q} &= rxz, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $a = 35, b = 3, c = 25, d = 7, m = 3, r = 0.1$ . 由(4)式可以得到系统的平衡点为原点  $O(0, 0, 0, 0)$ , 且系统仅有原点这一个平衡点.

在平衡点  $O(0, 0, 0, 0)$  处, 对(4)式进行线性化, 得系统 Jacobi 矩阵为

$$J(O) = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 3 \\ 7 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

根据  $\det[\lambda I - J(O)] = 0$ , 得系统的特征根为  $\lambda_1 = -38.8378, \lambda_2 = 28.8378, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 0$ .  $\lambda_1, \lambda_3$  均为负值, 而  $\lambda_2$  为正值, 因此平衡点  $O(0, 0, 0, 0)$  为鞍点, 显然平衡点  $O(0, 0, 0, 0)$  是不稳定的.

对于系统(4), 由于

$$\nabla V = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial w} = -13 < 0, \quad (6)$$

因而系统是耗散的, 且以指数率  $\frac{dV}{dt} = e^{-a+c-b} = e^{-13}$  收敛, 即随着时间的推移, 该系统渐近运动趋向于一个吸引子.

Lyapunov 指数是混沌系统中定量地描述状态空间混沌吸引子相邻轨线收缩或扩张的量. 通过计算, 该系统的四个 Lyapunov 指数分别为  $\lambda_{L_1} = 1.5986, \lambda_{L_2} = 0.049972, \lambda_{L_3} = 0, \lambda_{L_4} = -21.5414$ . 因为该系统的四个 Lyapunov 指数中, 两个为正、一个为负、一个为零, 且它们的和小于零, 这一点说明在该系统的状态空间中存在一个超混沌吸引子.

该系统的 Lyapunov 维数  $D_L$  表示为

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{L_{j+1}}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{L_i} = 3.0765, \quad (7)$$

即该系统是分数维数, 也就是所谓的分维. 这也证明混沌的存在.

为了直观的看到该超混沌系统的动力学特性, 我们利用 Matlab 软件对系统进行数值仿真. 选系统的初始值为  $(2, 1, 3, 1)$ , 当  $q = 0.9$  时, 对该系统进行数值仿真, 可以观察到 3.6 阶的分数阶超混沌系统吸引子的三维图, 如图 1 所示. 系统吸引子在  $x-y, x-w$  平面的相图如图 2、图 3 所示.  $x$  的时域波形及其频谱如图 4、图 5 所示. 系统的 Lyapunov 指数如图 6 所示.

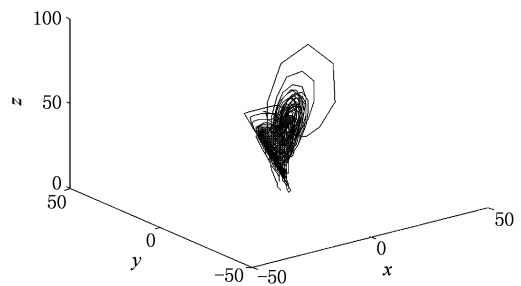


图 1 混沌吸引子三维图

从图中可以看出, 该分数阶超混沌系统中  $x$  的时域波形具有非周期性, 解的流对初始值非常敏感, 且  $x$  的频谱是连续谱, 这是系统产生混沌的一个基本性质.

通过改变  $q$  值, 还可以仿真  $q = 0.80-0.99$  (步长为 0.01) 的分数阶超混沌系统. 而当  $q = 0.79$  时, 系统不能产生混沌现象, 此时系统的  $x-y$  平面相图如图 7 所示,  $x$  的时域波形如图 8 所示.

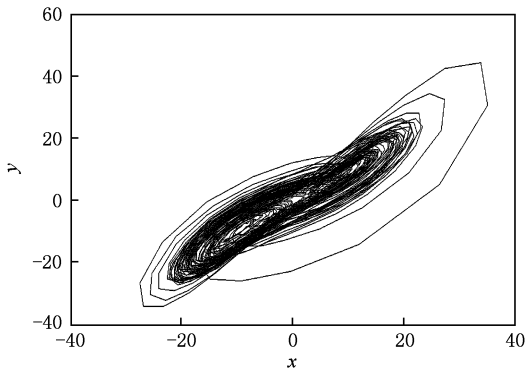


图2  $x$ - $y$  平面相图

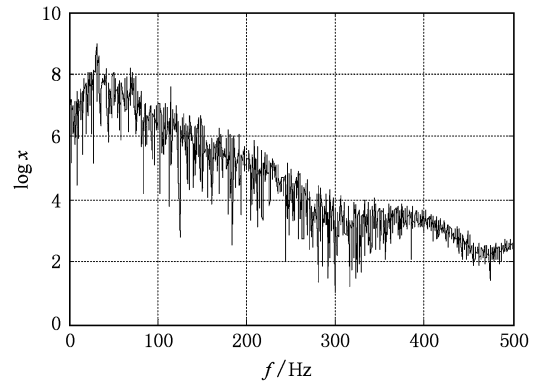


图5  $x$  的频谱图

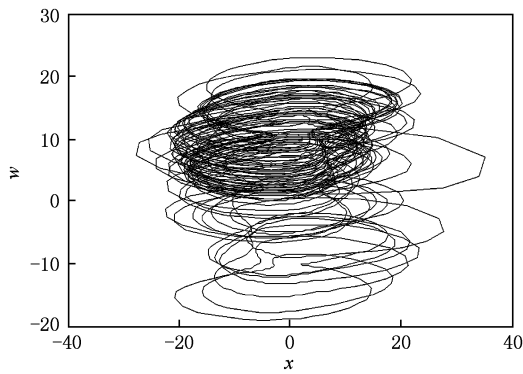


图3  $x$ - $w$  平面相图

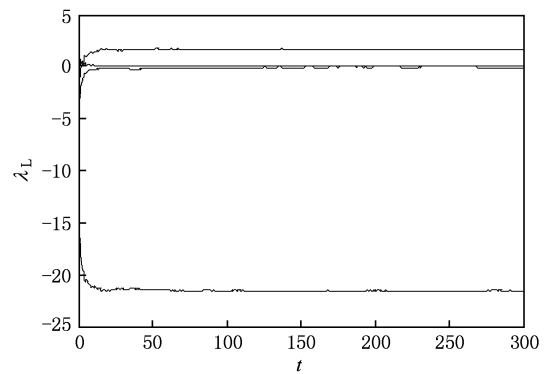


图6 系统的 Lyapunov 指数

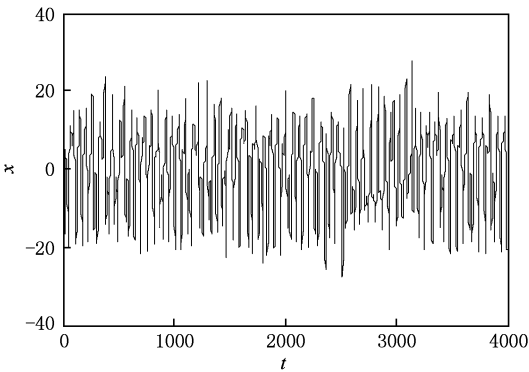


图4  $x$  的时域波形

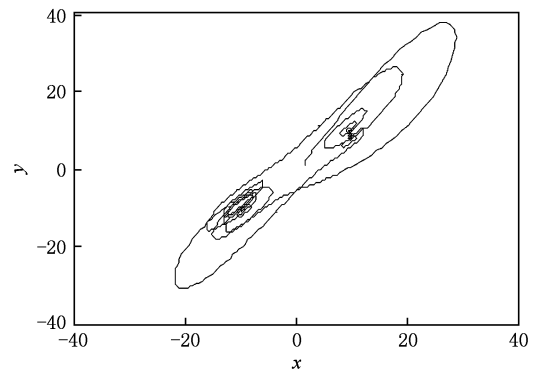


图7  $x$ - $y$  平面相图( $q=0.79$ )

通过以上理论分析和数值仿真,证明该新分数阶超混沌系统确实存在混沌现象,且存在混沌的最小阶数是 3.2 阶.

#### 4. 电路设计与仿真分析

本文采用 Multisim 软件进行混沌电路的设计与仿真. 由于 Multisim 软件采用的是实际电路元件模型,实现了“软件即元器件”、“软件即仪器”,被国际

公认是计算机电路设计仿真的平台. 因此,应用 Multisim 软件仿真电路实验与实际电路实验结果是相符的.

##### 4.1. 分数阶树形电路单元

根据电路理论,图 9 中 A 与 B 之间等效电路的复频域可以实现文献[28]中  $q$  从 0.1 到 0.9 的  $1/s^q$  近似式,为方便,我们称其为树形电路单元.

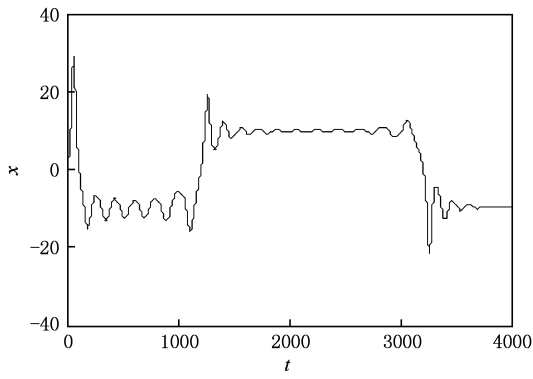


图8  $x$  的时域波形 ( $q=0.79$ )

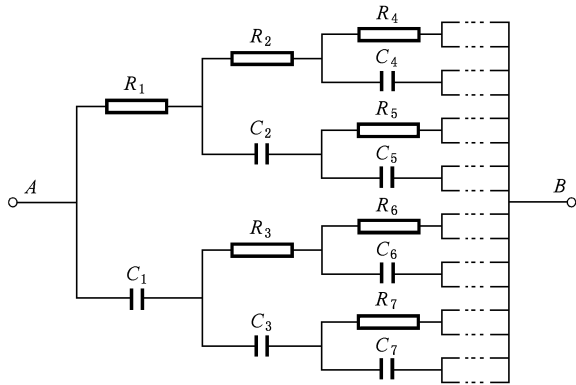


图9 分数阶  $1/s^q$  的树形电路单元

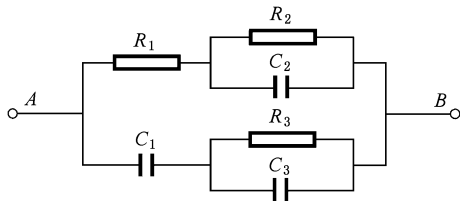


图10 分数阶  $1/s^{0.9}$  的树形电路单元

选取  $q = 0.9$  为例设计电路对系统(4)进行仿真和实验. 根据文献[28], 可知  $1/s^{0.9}$  的近似式(2 dB 近似误差)为

$$1/s^{0.9} \approx \frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}. \quad (8)$$

当  $q = 0.9$  时, 树形电路单元如图 10 所示. 其传递函数为

$$H(s) = \left[ R_1 + \left( R_2 // \frac{1}{sC_2} \right) \right] // \left[ \frac{1}{sC_1} + \left( R_3 // \frac{1}{sC_3} \right) \right] \\ = \frac{1}{C_0} \left[ \left( \frac{C_0}{C_1} + \frac{C_0}{C_3} \right) \left( s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 C_2 R_2} \right) \right. \\ \left. \times \left( s + \frac{1}{C_1 R_3 + C_3 R_3} \right) \right]$$

$$\times \left[ s^3 + \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 C_2 R_2} + \frac{1}{C_3 R_3} + \frac{C_1 + C_3}{C_1 R_1 C_3} \right) s^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 C_2 R_2 C_3 R_3} + \frac{1}{R_1 C_1 R_3 C_3} + \frac{C_1 + C_3}{R_1 C_1 R_2 C_2 C_3} \right) s \right. \\ \left. + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3} \right]^{-1}, \quad (9)$$

其中  $C_0$  为单位参数, 令  $C_0 = 1 \mu\text{F}$ ,  $F(s) = H(s) \cdot C_0 = 1/s^{0.9}$ . 将(9)式与(8)式相比较, 可得到图 10 所示树形电路单元的电阻电容值为  $R_1 = 1.55 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 61.54 \text{ M}\Omega$ ,  $R_3 = 2.526 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0.7346 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.5221 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 1.103 \mu\text{F}$ . 考虑实际的电阻电容值达不到图 10 所示电阻电容的精度, 我们选取  $R_1 = 1.5 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 62 \text{ M}\Omega$ ,  $R_3 = 2.5 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0.72 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.52 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 1.1 \mu\text{F}$  来做电路实验.

#### 4.2. 新分数阶超混沌系统的振荡电路实现

我们对本文提出的新分数阶超混沌系统应用 Multisim 软件进行振荡器电路设计. 该电路采用 TL082 型运算放大器、AD633 型模拟乘法器、线性电阻和电容等, 实现了加法、减法、乘法和微分运算, 利用分数阶  $1/s^{0.9}$  的树形电路单元实现分数阶运算. 当  $q = 0.9$  时, 可得到 3.6 阶分数阶超混沌系统的电路, 如图 11 所示.

该电路中各电阻值分别取为  $R_1 = R_4 = 2.9 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 33.3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_8 = 14.3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_5 = R_6 = R_7 = R_{11} = R_{12} = R_{14} = R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{16} = R_{17} = R_{18} = R_{20} = R_{21} = R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{10} = 8.3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{13} = 33.3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{15} = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{19} = 10 \text{ k}\Omega$ . 电容值取为  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C = 10 \text{ nF}$ . 电路中模拟乘法器的输出增益为 0.1.

该超混沌系统振荡器的电路方程为

$$\frac{d^q u_{c_1}}{dt^q} = -\frac{1}{RC} \frac{R}{R_1} u_{c_1} + \frac{1}{RC} \frac{R}{R_4} u_{c_2} \\ + \frac{1}{RC} \frac{R}{R_3} u_{c_4}, \\ \frac{d^q u_{c_2}}{dt^q} = \frac{1}{RC} \frac{R}{R_8} u_{c_1} + \frac{1}{RC} \frac{R}{R_{10}} u_{c_2} \\ - \frac{1}{RC} \frac{R}{R_9} \left( \frac{1}{10} u_{c_1} u_{c_3} \right), \\ \frac{d^q u_{c_3}}{dt^q} = \frac{1}{RC} \frac{R}{R_{15}} \left( \frac{1}{10} u_{c_1} u_{c_2} \right) - \frac{1}{RC} \frac{R}{R_{13}} u_{c_3}, \\ \frac{d^q u_{c_4}}{dt^q} = \frac{1}{RC} \frac{R}{R_{19}} \left( \frac{1}{10} u_{c_1} u_{c_3} \right). \quad (10)$$

令  $x = 10u_{c_1}, y = 10u_{c_2}, z = 10u_{c_3}, w = 10u_{c_4}$ ,  
 $\tau = \frac{t}{10RC}, \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}, \dot{z} = \frac{dz}{d\tau}, \dot{w} = \frac{dw}{d\tau}$ , 则(10)  
 式和(4)式是等价的.

用 Multisim 对 3.6 阶的分数阶超混沌系统的振荡电路进行仿真实验, 在运算放大器两端加  $\pm 12\text{ V}$  电压, 仿真结果如图 12—14 所示. 从图中可以看出, 其结果与 Matlab 数值仿真结果是基本一致的.

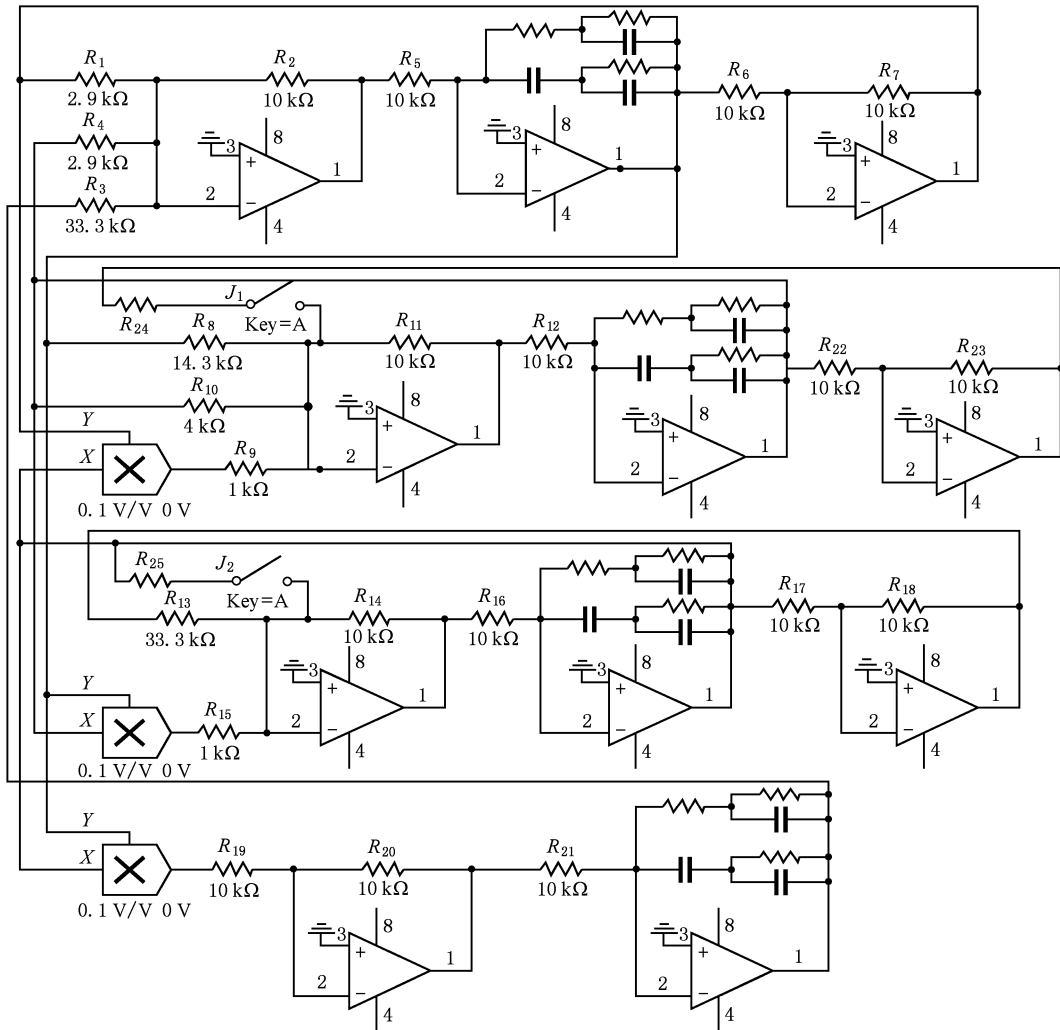


图 11 新分数阶超混沌系统振荡电路

通过改变图 11 中的分数阶  $1/s^q$  的树形电路单元, 还可以仿真  $q = 0.8$  的分数阶超混沌电路.

可以看到电路仿真实验和数值仿真结果是基本一致的, 所以仿真实验结果是有效的. 由于 Multisim 软件采用实际电路元件模型, 所以仿真实验和实际电路实验结果应该是相符的, 因此该新分数阶超混沌振荡电路是可以物理实现的.

通过以上理论分析和仿真实验, 可以证实本文所提出的新分数阶超混沌系统确实可以产生混沌, 且具有混沌系统的共同特征.

### 5. 分数阶超混沌系统的反馈控制

对该分数阶超混沌系统加入线性反馈项, 将其稳定到系统的平衡点位置. 其受控系统可以表示为

$$\frac{d^q x}{dt^q} = a(y - x) + mw - k_1 x,$$

$$\frac{d^q y}{dt^q} = dx - xz + cy - k_2 y,$$

$$\frac{d^q z}{dt^q} = xy - bz - k_3 z,$$

$$\frac{d^q w}{dt^q} = rxz - k_4 w. \quad (11)$$

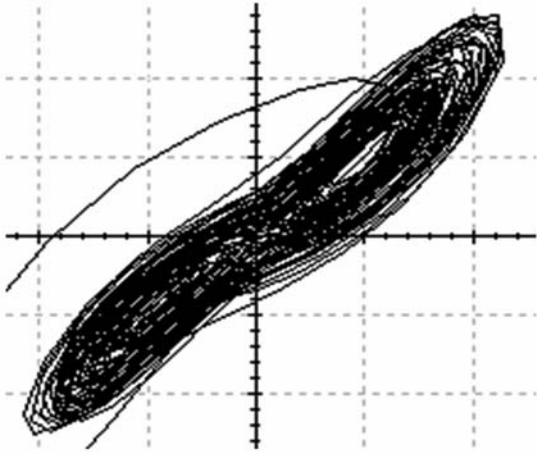


图 12 电路仿真实验  $x-y$  相图

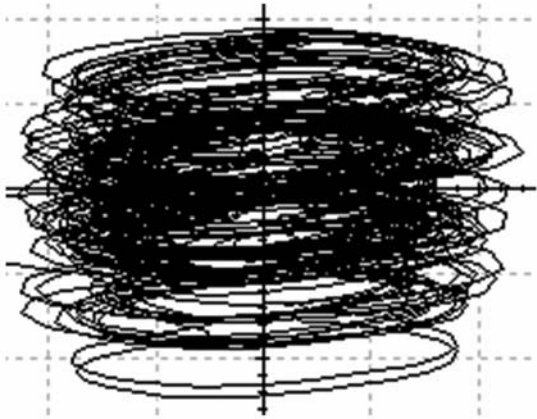


图 13 电路仿真实验  $x-w$  相图

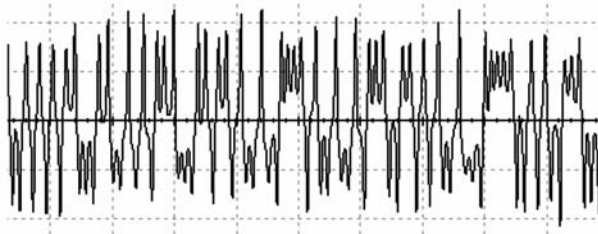


图 14 电路仿真实验  $x$  时域波形图

显然原点  $O(0,0,0,0)$  是系统(11)的唯一平衡点. 对系统(11)在原点处进行线性化, 得系统 Jacobi 矩阵为

$$J(O) = \begin{bmatrix} -35 - k_1 & 35 & 0 & 3 \\ 7 & 25 - k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 - k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

根据  $\det[\lambda I - J(O)] = 0$ , 得系统的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(10 + k_1 + k_2)}{2}$$

$$\pm \frac{\sqrt{(10 + k_1 + k_2)^2 - 4(k_1 k_2 - 25k_1 + 35k_2 - 1120)}}{2},$$

$$\lambda_3 = -k_3 - 3, \lambda_4 = -k_4.$$

根据引理 1, 对于  $0 < q < 1$ , 无论状态变量为何值, 只要受控系统(11)的特征根的实部都不大于零, 则受控系统(11)能渐近稳定到平衡点. 因此可得

$$k_1 + k_2 \geq -10,$$

$$k_1 k_2 - 25k_1 + 35k_2 \geq 1120,$$

$$k_3 \geq -3,$$

$$k_4 \geq 0. \quad (13)$$

我们取  $k_1 = 0, k_2 = 50, k_3 = 2, k_4 = 0$  对分数阶超混沌系统(11)进行控制, 利用 Matlab 进行数值仿真, 在  $t = 300$  时加入控制信号. 仿真结果如图 15—图 18 所示.

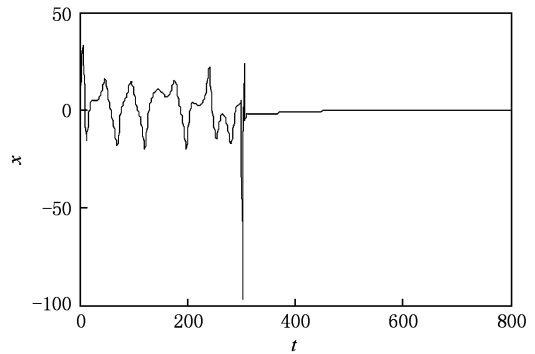


图 15 受控系统变量  $x$  波形

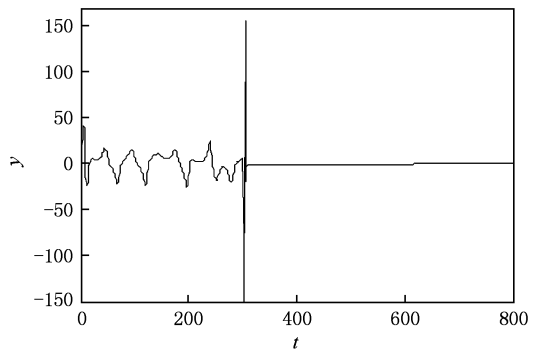


图 16 受控系统变量  $y$  波形

系统的线性反馈控制器电路如图 19 所示. 将线性反馈控制器加入到系统振荡电路中, 如图 11 所示. 在图 11 中, 当开关  $J_1, J_2$  闭合, 反馈控制器开始

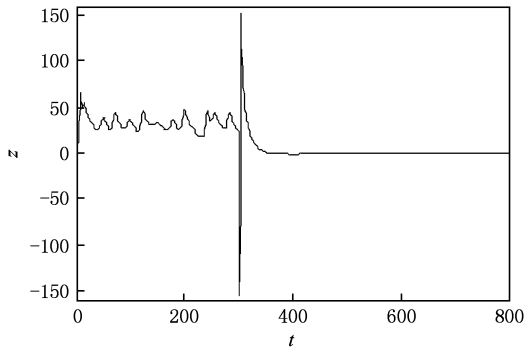


图 17 受控系统变量  $z$  波形

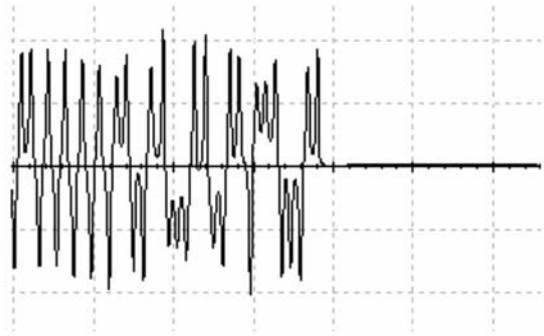


图 20 电路仿真受控系统  $x$  波形

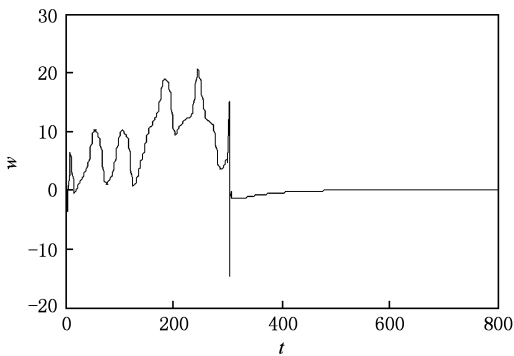


图 18 受控系统变量  $w$  波形

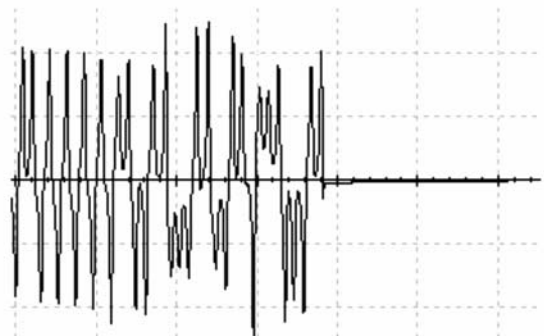


图 21 电路仿真受控系统  $y$  波形

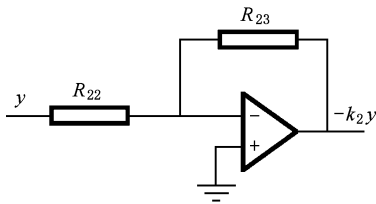


图 19 线性反馈控制器

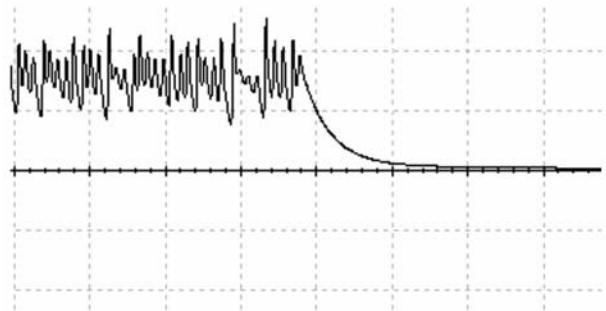


图 22 电路仿真受控系统  $z$  波形

作用. 选取  $R_{22} = R_{23} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{24} = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{25} = 50 \text{ k}\Omega$ , 在  $t = 3.8 \text{ s}$  时闭合开关  $J_1, J_2$ , 电路实验仿真结果如图 20—图 23 所示.

由此可以看出, 数值仿真和电路仿真结果是一致的, 说明该控制器是有效的.

## 6. 结 论

首先提出了一个新分数阶超混沌系统, 并进行了混沌动力学分析和 Lyapunov 指数计算, 确定其存在混沌吸引子, 并对该系统进行了数值仿真和电路仿真实验, 观察吸引子的相图, 发现其存在混沌的

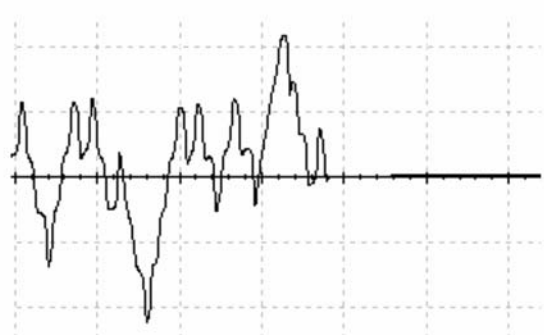


图 23 电路仿真受控系统  $w$  波形

最小阶数是 3.2 阶. 该系统存在复杂的混沌动力学行为, 更能体现出系统的超混沌特性, 而且还可以用分数阶混沌振荡电路来实现. 因此该分数阶超混沌系统具有潜在的极其重要的应用价值. 然后设计

了一个简单有效的线性反馈控制器, 数值仿真和电路实验都证实了该控制器的有效性, 而且该控制器具有普适性, 可以将其应用到其他分数阶混沌系统的控制中.

- [1] Zhang R X, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2957 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2009 物理学报 **58** 2957]
- [2] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [3] Zhou P, Cheng X F, Zhang N Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5407 (in Chinese) [周平、程雪峰、张年英 2008 物理学报 **59** 5407]
- [4] Li G L, Chen X Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030507
- [5] Xu Z, Liu C X, Yang T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1524 (in Chinese) [许喆、刘崇新、杨韬 2010 物理学报 **59** 1524]
- [6] Liu C X 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **4** 25
- [7] Gao T G, Chen G R, Chen Z Q 2007 *Phys. Lett. A* **361** 78
- [8] Wei W, Li D H, Wang J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040507
- [9] Zhang R X, Yang S P, Liu Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若洵、杨世平、刘永利 2010 物理学报 **59** 1549]
- [10] Zhao L D, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese) [赵灵冬、胡建兵、刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]
- [11] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [12] Xiao Y Z, Xu W, Li X C, Tang S F 2008 *Chin. Phys. B* **17** 80
- [13] Zhang Q J, Lu J A 2008 *Chin. Phys. B* **17** 492
- [14] Hu J, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 503
- [15] Zhang X F, Fan J L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2298 (in Chinese) [张雪峰、范九伦 2010 物理学报 **59** 2298]
- [16] Zhang L P, Jiang H B, Bi Q S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010507
- [17] Jia H Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4469 (in Chinese) [贾红艳、陈增强、袁著祉 2009 物理学报 **58** 4469]
- [18] Zhang R X, Yang S P 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3295
- [19] Liu C X, Liu L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2188
- [20] Li C B, Chen S, Zhu H Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2255 (in Chinese) [李春彪、陈谔、朱焕强 2009 物理学报 **58** 2255]
- [21] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4402 (in Chinese) [胡建兵、韩焱、赵灵冬 2009 物理学报 **58** 4402]
- [22] Mohammad S T, Mohammad H 2007 *Phys. Lett. A* **367** 102
- [23] Zhou P, Cheng X F, Zhang N Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3252
- [24] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Soliton and Fractals* **22** 443
- [25] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [26] Min F H, Yu Y, Ge C J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1456 (in Chinese) [闵富红、余杨、葛曹君 2009 物理学报 **58** 1456]
- [27] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press) p4
- [28] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 339
- [29] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE-SMC*, Lille, France 963
- [30] Ahmed E, ElSayed A M A, ElSaka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542

## Circuit implementation and control of a new fractional-order hyperchaotic system \*

Huang Li-Lian<sup>†</sup> Xin Fang Wang Lin-Yu

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 19 April 2010; revised manuscript received 12 May 2010)

### Abstract

In order to improve the complexity of chaotic signals, a new fractional-order four-dimensional hyperchaotic system is presented. Some dynamical properties of the system are investigated. The circuit implementation of this new system is simulated using Multisim. The results prove that chaos actually exists in the system with order as low as 3.2. A simple linear feedback controller is designed, and the simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the method.

**Keywords:** fractional-order hyperchaotic system, dynamical property, circuit simulation, feedback controller

**PACS:** 05.45.-a

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. F010303) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities.

<sup>†</sup> E-mail: lilian\_huang@163.com