

表面序电极化、挠曲电极化与向列液晶盒饱和点的双稳态

关荣华[†]

(华北电力大学数理学院, 保定 071003)

(2010年6月30日收到; 2010年9月16日收到修改稿)

理论分析和数值模拟相结合,研究了表面序电极化、挠曲电极化对非对称弱锚定向列液晶盒在饱和点双稳态的影响,得到了两种极化共存时液晶指向矢满足的方程和边界条件.通过引入新的状态参量,从能量的角度对两种极化的物理效应进行了分析.结果表明,在一定条件下,两种极化耦合,在饱和点通过改变锚定能影响边界条件,从而诱导双稳态.文中给出了判断是否存在双稳态的一般条件,此条件与数值计算结果符合.

关键词: 表面序电极化, 挠曲电极化, 饱和点, 双稳态

PACS: 61.30. Hn, 61.30. Gd, 64.70. M -

1. 引言

液晶材料由于自身独特的存在形态,使得其在实际中得到广泛应用.液晶的物理特性及其物理效应一直是液晶物理长期以来研究的重要内容^[1-3].作为显示的液晶材料常被放于间距只有微米级的两固体基板内,因而固体基板对液晶分子取向的锚定作用直接影响着液晶的电光特性及指向矢分布.锚定作用通常由锚定能描述.对弱锚定非扭曲液晶, Rapini 和 Papoular 提出了用单位面积锚定能公式 g_s 来描述锚定作用的强弱^[4] (简称为 RP 公式). Yang 等^[5] 从能量角度出发,将锚定能视为液晶表面分子间及与基板表面分子间相互作用势能总和的各向异性部分,给出了锚定能的微观机理,并以此为依据推导出了 RP 公式.

RP 公式成功的描述了很多物理效应,但随着大量理论和实验研究的进行,不断发现指向矢倾角 θ 较大时,此公式给出的理论结果和实验偏差较大^[6-11],因此许多作者提出各种新公式来代替 RP 公式^[12-15].这些公式无论哪种形式,实际上都可以用 $\sin^2\theta$ 的幂级数展开,通过修正参数 ζ 引入指向矢倾角的高次项 $\sin^4\theta$,从而对 RP 公式进行了修正^[16]. Sonin^[17] 用作图的方法比较了几种表达形式,

指出:当 $\zeta = 0$ 时,修正后的锚定能公式还原为 RP 公式; ζ 为负值时给出的是勒襄德多项式表达式形式;而在傅里叶级数和椭圆函数形式中,相当于 ζ 取正值.尽管锚定能表达式中高次项的引入及存在的物理原因还没有得到深入研究,但以此为基础的大量研究工作已经开展并且成功预言了一些物理现象^[16,18,19],目前修正后的 RP 公式也为多数人所接受.

锚定能函数具体表达形式应由液晶系统和界面性质共同决定.从物理的角度,液晶系统内的一些物理现象,如粒子吸附,分子的极化等影响锚定取向,因而这些因素对锚定能也应有贡献.由于液晶材料的复杂性,考虑到有可能还存在一些未被发现的物理现象,到目前为止,对锚定能公式的运用通常采用两种方法:一种为采用修正后的 RP 公式,这种情况下物理现象对总能量的贡献不予考虑,它们的影响由修正参数 ζ 体现;另一种采用 RP 公式,这种情况将系统内一些物理现象对应的能量计入总能量中,它们对分子取向锚定的影响由等效锚定能体现,等效锚定能同样是对 RP 公式的修正,因此两种方法是等价的.

在第二种方法中,到目前为止粒子吸附及挠曲电极化对液晶盒的影响研究的比较充分^[20-22],但在所得等效锚定能中都未出现指向矢倾角 θ 的高次

[†] E-mail: ronghua_guan@sohu.com

项,对锚定能的影响仅改变了与 $\sin^2\theta$ 有关的锚定强度 A . 实际上,除了 Meyer^[23] 提出指向矢 \mathbf{n} 的梯度分布产生挠曲电极化 \mathbf{P}_f 外,液晶序参量 S 的梯度分布同样引起极化现象. 这一现象首先由 Prost 及 Marcerou^[24] 提出,后来被 Petrov 及 Derzhanski^[25] 所验证. 此极化仅存在于厚度约为 10 nm 的表面层内,因而称之为表面序电极化. Barbero 等^[26] 给出了表面序电极化 \mathbf{P}_s 与向列序参量 S 梯度之间的关系, Blinov 等^[27] 测定了向列相液晶盒中 \mathbf{P}_s 的数值,根据测量结果 \mathbf{P}_s 的大小与挠曲电极化 \mathbf{P}_f 具有相同的数量级.

对表面序电极化的研究目前主要集中在验证此现象的存在、解释此现象的成因以及序电常数的测定等方面,对该极化物理效应的研究甚少. 最近 Zakharov 和 Dong^[28] 假设界面上离子选择吸附形成表面电场,该场与 \mathbf{P}_s 耦合形成界面能,由此得到等效锚定能. 但所得结果也没有出现指向矢倾角的高次项. 我们注意到,在他们的工作中没有考虑挠曲电效应并认为表面极化的作用是通过选择吸附的离子才起作用,如果没有吸附离子或吸附离子很少,表面序电极化的影响就不会显现,而根据 Nagarenko 和 Lavrentovich^[29] 的研究,液晶在界面所吸附的离子浓度强烈依赖于基板的清洗工艺和清洗时间,长时间清洗甚至可以消除吸附离子,因此文献[28]的研究是不全面的.

既然表面序电极化与挠曲电极化具有相同的数量级,因此两种极化同样重要,需要同时考虑. 本文以 RP 公式为基础,忽略离子吸附,研究纯表面序电极化和挠曲电极化共存对弱锚定液晶盒的影响. 得到了两种极化同时存在时液晶指向矢满足的方程和边界条件. 通过引入新的状态参量,从能量的角度对两种极化的物理效应进行了分析. 结果表明,在一定条件下,两种极化在饱和点通过改变锚定能诱导双稳态. 对锚定能的影响不仅仅单纯改变其本身的大小,更重要的是两种极化的耦合,使得锚定能公式中出现了前人提出的指向矢倾角的高次项. 文中推导出了用以判断是否存在双稳态的条件,此条件与数值计算结果一致. 本研究结果对双稳态液晶产品的设计和研发提供了重要的依据.

2. 基本方程及锚定能

考虑厚度为 l 的弱锚定不对称液晶盒. 上下基

板锚定强度及表面序电极化分别为 A_2, A_1 及 P_2, P_1 , 两基板易取方向 \mathbf{e} 相同且平行于基板沿 x 轴方向. 今加一电压 U , 在 $z = l$ 处电位 $V = 0$, $z = 0$ 处电位 $V = U$, 电场 $\mathbf{E} = (0, 0, E_3)$. 设指向矢 \mathbf{n} 的倾角为 θ , 则 $\mathbf{n} = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$.

由 Meyer 公式及 Barbero 公式可知挠曲电极化 \mathbf{P}_f 及表面序电极化 \mathbf{P}_s 分别为

$$\begin{aligned} \vec{P}_f &= e_1(\nabla \cdot \mathbf{n} + e_3(\nabla \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}) \\ &= i(e_1 \cos^2\theta + e_3 \sin^2\theta) \frac{d\theta}{dz} \\ &\quad + \mathbf{k} \left(\frac{e_1 + e_3}{2} \sin 2\theta \right) \frac{d\theta}{dz}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s &= r_1(\mathbf{n} \cdot \text{grad}S) \mathbf{n} + r_2(\text{grad}S) \\ &= ir_1 \sin\theta \cos\theta \frac{dS}{dz} + \mathbf{k}(r_1 \sin^2\theta + r_2) \frac{dS}{dz}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 e_1, e_3 为挠曲电系数; r_1, r_2 为序电常数. 整个系统的总自由能密度 G 由弹性自由能密度, 电性自由能密度及界面锚定能密度组成, 可以表示为

$$\begin{aligned} G &= \int_0^l \frac{1}{2} f_{\text{eq}}(\theta) \cdot \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{D_3^2}{g(\theta)} dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\delta_1} \frac{P_{s3}(P_{s3} + 2P_B)}{g(\theta)} dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{l-\delta_2}^l \frac{P_{s3}(P_{s3} + 2P_B)}{g(\theta)} dz \\ &\quad + \frac{1}{2} A_1 \sin^2\theta_0 + \frac{1}{2} A_2 \sin^2\theta_l, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $f_{\text{eq}}(\theta) = f(\theta) + \frac{(e_1 + e_3)^2}{4g(\theta)} \sin^2 2\theta$, $f(\theta) = \frac{1}{2}(K_{11} \cos^2\theta + K_{33} \sin^2\theta)$, $g(\theta) = \epsilon_{\perp} + \Delta\epsilon \sin^2\theta$, D_3, P_{s3}, P_B 分别为电位移, 表面序电极化及挠曲电极化矢量在 z 轴方向上的分量, K_{11}, K_{33} 为液晶展曲和弯曲弹性系数, $\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}$ 分别为与指向矢 \mathbf{n} 平行及垂直的介电常数, $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ 为介电各向异性, δ_1, δ_2 分别为上下基板处表面序电极化层的厚度, θ_0 和 θ_l 为 $z=0$ 及 $z=l$ 两基板处的 θ 值. 在指向矢稳定分布态系统的自由能最小, 所以对(3)式求变分并忽略与 P_{s3} 有关的无限小量, 可得到指向矢满足的平衡方程和边界条件:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f_{\text{eq}}(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left[f_{\text{eq}}(\theta) \frac{d\theta}{dz} \right] \\ - \frac{1}{2} D_3^2 \frac{\Delta\epsilon \sin 2\theta}{g^2(\theta)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$f_{\text{eq}}(\theta_0) \frac{d\theta}{dz} \Big|_0 = \frac{1}{2} \left[A_1 + \frac{e_1 + e_3}{g(\theta_0)} (D_3 - P_{s30}) \right] \sin 2\theta_0,$$

$$(z = 0), \quad (5)$$

$$-f_{\text{eq}}(\theta_l) \frac{d\theta}{dz} \Big|_l = \frac{1}{2} \left[A_2 - \frac{e_1 + e_3}{g(\theta_l)} (D_3 - P_{s3l}) \right] \sin 2\theta_l,$$

$$(z = l), \quad (6)$$

其中

$$P_{s30} = (r_1 \sin^2 \theta_0 + r_2) \frac{dS}{dz} \Big|_0 = r_2 (1 + r \sin^2 \theta_0) \sigma_1, \quad (7)$$

$$P_{s3l} = (r_1 \sin^2 \theta_l + r_2) \frac{dS}{dz} \Big|_l = r_2 (1 + r \sin^2 \theta_l) \sigma_2, \quad (8)$$

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \sigma_1 = \frac{dS}{dz} \Big|_0, \sigma_2 = \frac{dS}{dz} \Big|_l.$$

(4)式及(5),(6)式分别为指向矢 θ 稳定分布满足的方程及边界条件. 现在讨论它们的解及对应的自由能, 以便研究两种极化的物理效应. 显然存在两个平庸解 $\theta(z) \equiv 0$ 及 $\theta(z) \equiv \frac{\pi}{2}$, 称它们分别为均匀解和饱和解, 它们均满足 $\frac{d\theta}{dz} = 0$. 此外, 还存在第三个非平庸解, 要求 $\frac{d\theta}{dz} \neq 0$, 称之为畸变解. 由方程(4), 可将畸变解表示为

$$\frac{d\theta}{dz} = \begin{cases} + D_3 \sqrt{\frac{g(\theta_m) - g(\theta)}{f_{\text{eq}}(\theta)g(\theta)g(\theta_m)}}, & 0 < z < d, \\ - D_3 \sqrt{\frac{g(\theta_m) - g(\theta)}{f_{\text{eq}}(\theta)g(\theta)g(\theta_m)}}, & d < z < l, \end{cases} \quad (9)$$

式中 θ_m 是液晶指向矢倾角的最大值. 设此处 $z = d$, 则有 $\frac{d\theta}{dz} \Big|_d = 0$. 外场一定时, 液晶分子的实际排列, 由系统自由能最小值对应的解决定. 将均匀解 $\theta(z) \equiv 0$, 饱和解 $\theta(z) \equiv \frac{\pi}{2}$ 以及畸变解(9)代入自由能表达式(3)式, 可以求出它们对应的自由能密度分别为

$$G_0 = -\frac{\varepsilon_{\perp} U^2}{2l}, \quad (10)$$

$$G_s = -\frac{U^2}{2l} (\varepsilon_{\perp} + \Delta\varepsilon) + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2}, \quad (11)$$

$$G_{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{D_3^2 l}{g(\theta_m)} + \frac{1}{2} \left(A_1 + \frac{e_1 + e_3}{\varepsilon_{\perp}} P_{s0} \right) \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \left(A_2 - \frac{e_1 + e_3}{\varepsilon_{\perp}} P_{sl} \right) \sin^2 \theta_l$$

$$- \frac{e_1 + e_3}{4\Delta\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\perp} r}{\Delta\varepsilon} \right) \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\perp}} \right)^2 (P_{s0} \sin^4 \theta_0 - P_{sl} \sin^4 \theta_l) - \frac{e_1 + e_3}{2\varepsilon_{\perp}} \left[r + \left(1 - \frac{\varepsilon_{\perp} r}{\Delta\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\perp}} \right) \right] \times (P_{s0} - P_{sl}), \quad (12)$$

其中, $U = \int_0^l E_3 dz = \int_0^l \frac{D_3 - (P_{s3} + P_{s3})}{g(\theta)} dz$, $P_{s0} = \sigma_1 r_2$, $P_{sl} = \sigma_2 r_2$. 由(12)式可见, 同时考虑表面序电极化与挠曲电极化后, 两种极化的耦合不仅改变了与 $\sin^2 \theta$ 项有关的锚定强度 A , 使其产生了附加项 $\frac{e_1 + e_3}{\varepsilon_{\perp}} P_s$, 而且使自由能中出现了 $\sin^4 \theta$ 的高次项, 通过修正系数 $\zeta \left(\zeta = \left(1 - \frac{\varepsilon_{\perp} r}{\Delta\varepsilon} \right) \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\perp}} \right)^2 \frac{(e_1 + e_3) P_s}{4\Delta\varepsilon} \right)$ 对 RP 公式进行了修正, 这与修正后的 RP 公式精确符合. 高次项的出现是两种极化相互耦合的自然结果.

3. 饱和点的一级 Fredericksz 转变及双稳态

为了讨论饱和点的双稳态问题, 需要比较畸变解与饱和解的自由能, 为此需引入一个新的状态参量 m 和另一变量 v . 令 $m = \sin^2 \theta_m$, $v = \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta_m}$, 对均匀解 $m = 0$; 对饱和解 $m = 1$; 对畸变解 $0 < m < 1$, 这里的 m 相当于 Frisken 和 Palffy-Muhouray 工作中引用的 Landau-de Gennes 理论中的序参量^[30]. 现在再引入约化锚定强度 α , 约化自由能密度 g , 约化电压 u 并对各量进行无量纲化, 即令

$$\alpha = \frac{Al}{2k_{11}}, g = \frac{Gl}{k_{11}}, u = \frac{U}{\pi \sqrt{\frac{k_{11}}{\Delta\varepsilon}}}$$

及

$$e = \frac{e_1 + e_3}{k_{11} \varepsilon_{\perp}},$$

$$e' = \frac{e_1 + e_3}{k_{11} \Delta\varepsilon},$$

$$\eta = \frac{k_{33} - k_{11}}{k_{11}},$$

$$\eta' = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\perp}},$$

$$P_1 = \frac{lP_{s0}}{2\sqrt{k_{11}\epsilon_{\perp}}},$$

$$P_2 = \frac{lP_{sl}}{2\sqrt{k_{11}\epsilon_{\perp}}}.$$

利用以上诸式,经烦杂的代换,可得到关于电压 u , 边界条件(5),(6)及畸变解及饱和解对应的约化自由能 g_{θ} , g_s 用状态参量 m 表示的形式.
方程:

$$u = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 + \eta' m} I_1 - \frac{e'}{2\pi} \ln \frac{1 - m + mv_0}{1 - m + mv_l} \cdot \frac{1 - m + m(1 + \eta')v_l}{1 - m + m(1 + \eta')v_0}, \quad (13)$$

边界条件

$$\left[\alpha_1 \frac{1 - m + m(1 + \eta')v_0}{1 - m + mv_0} - eP_1 \right] \sqrt{(1 - m + mv_0)v_0}$$

$$= I_2 \left\{ \sqrt{(1 - v_0) \left\{ [1 - m + mv_0(1 + \eta)] [1 - m + mv_0(1 + \eta')] + e^2 m(1 - m)v_0 \right\}} \right.$$

$$\left. - \sqrt{v_0(1 - m + mv_0)} e' \sqrt{1 + \eta' m} \right\}, \quad z = 0, \quad (14)$$

$$\left[\alpha_2 \frac{1 - m + m(1 + \eta')v_l}{1 - m + mv_l} + eP_2 \right] \sqrt{v_l(1 - m + mv_l)}$$

$$= I_2 \left\{ \sqrt{(1 - v_l) \left\{ [1 - m + m(1 + \eta')v_l] [1 - m + m(1 + \eta)v_l] + e^2 m(1 - m)v_l \right\}} \right.$$

$$\left. + e' \sqrt{v_l(1 - m + mv_l)} \sqrt{1 + \eta' m} \right\}, \quad z = l, \quad (15)$$

自由能

$$g_{\theta} = -\frac{2}{\eta'} I_2^2 + \alpha_1 \frac{mv_0}{1 - m + mv_0} + \alpha_2 \frac{mv_l}{1 - m + mv_l} + \frac{er}{\eta'} \left(P_2 \frac{mv_l}{1 - m + mv_l} - P_1 \frac{mv_0}{1 - m + mv_0} \right)$$

$$+ \frac{e}{\eta'} \left(1 - \frac{r}{\eta'} \right) \left[P_2 \ln \frac{1 - m + (1 + \eta')mv_l}{1 - m + mv_l} - P_1 \ln \frac{1 - m + (1 + \eta')mv_0}{1 - m + mv_0} \right], \quad (16)$$

$$g_s = -\frac{\pi^2 u^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta'} \right) + \alpha_1 + \alpha_2, \quad (17)$$

以上表达式中

$$I_1 = \frac{1}{2} (I_1^{(1)} + I_1^{(2)}), I_2 = \frac{1}{2} (I_2^{(1)} + I_2^{(2)}),$$

$$I_1^{(1)} = \int_{v_0}^1 \frac{1}{2\sqrt{v(1-v)} [1 - m + mv(1 + \eta')]} \times \sqrt{\frac{[1 - m + (1 + \eta)mv][1 - m + (1 + \eta')mv] + e^2 m(1 - m)v}{1 - m + mv}} dv,$$

$$I_1^{(2)} = \int_{v_l}^1 \frac{1}{2\sqrt{v(1-v)} [1 - m + mv(1 + \eta')]} \times \sqrt{\frac{[1 - m + (1 + \eta)mv][1 - m + (1 + \eta')mv] + e^2 m(1 - m)v}{1 - m + mv}} dv,$$

$$I_2^{(1)} = \int_{v_0}^1 \frac{1}{2\sqrt{v(1-v)} (1 - m + mv)} \times \sqrt{\frac{[1 - m + (1 + \eta)mv][1 - m + (1 + \eta')mv] + e^2 m(1 - m)v}{1 - m + mv}} dv,$$

$$I_2^{(2)} = \int_{v_l}^1 \frac{1}{2\sqrt{v(1-v)} (1 - m + mv)} \times \sqrt{\frac{[1 - m + (1 + \eta)mv][1 - m + (1 + \eta')mv] + e^2 m(1 - m)v}{1 - m + mv}} dv.$$

I_1, I_2 是 m 和 v_0, v_l 的函数, 根据 (14), (15) 式可知 v_0, v_l 又是 m 的隐函数, 由此可见自由能只是 m 的函数, 这也是我们引入状态参量 m 的原因所在. 对给定的 m , 由 (13), (14), (15) 式可以求得 u, v_0 及 v_l ; 将它们代入 I_1, I_2 的表达式中可得 I_1, I_2 ; 然后由 (16), (17) 式可得到 g_θ 及 g_s .

研究饱和点附近指向矢的分布状态, 需比较转变点畸变解与饱和解自由能的大小, 为此引入约化自由能差 $\Delta g_s = g_\theta - g_s$. 如果 $\Delta g_s > 0$, 则饱和解是最稳定的; 如果 $\Delta g_s < 0$, 则畸变解是最稳定的. 如果存在一点 $m = m_c$, 当 $m \leq m_c, \Delta g_s < 0$, 则转变点为 m_c , 如果 $m_c = 1$, 则转变为二级转变, 否则为一级转变. 在一级转变情况下, 在转变点 m_c ($m_c \neq 1$) 畸变解与饱和解自由能的大小相等且同为最小, 所以在该点形成双稳态. 选取四组具有代表性的物质参数, 按以上方法做出 Δg_s 随 m 的变化曲线, 结果如图 1 所示.

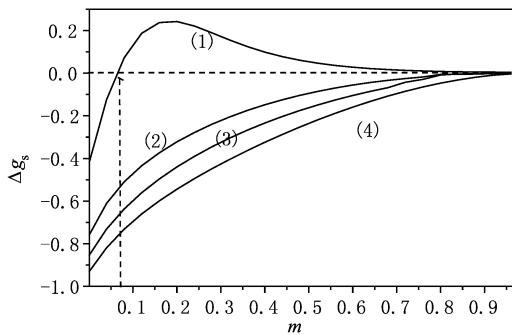


图 1 不同参数下畸变解与饱和解约化自由能差 Δg_s 随状态参量 m 变化曲线 ((1) $\alpha_1 = 0.75, \alpha_2 = 1.70, P_1 = 0.11, P_2 = 1.70, \eta = 2.40, \eta' = 8.00, e = 1.05, e' = 0.30$; (2) $\alpha_1 = 0.75, \alpha_2 = 1.70, P_1 = 0.11, P_2 = 1.70, \eta = 2.40, \eta' = 8.00, e = 0.00, e' = 0.00$; (3) $\alpha_1 = 0.75, \alpha_2 = 1.70, P_1 = 0.00, P_2 = 0.00, \eta = 2.40, \eta' = 8.00, e = 1.05, e' = 0.30$; (4) $\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 1.80, P_1 = 0.30, P_2 = 1.00, \eta = 1.10, \eta' = 6.00, e = 0.10, e' = 0.20$)

图 1 中曲线 (2), (3), (4) 随着 m 的增加 Δg_s 单调增大, 并且在 $0 < m < 1$ 的范围内始终有 $\Delta g_s < 0$, 即 $g_\theta < g_s$, 这种情况下畸变解一直是稳定解, 直到 $m = 1$ 时, $\Delta g_s = 0$, 即 $g_\theta = g_s$, 在该点实现了由畸变态到饱和态的转变, 这种转变是连续的, 因此为通常的二级转变; 曲线 (1) 为异常情况, 这种情况下 Δg_s 随着 m 的增加先增加后减小, 大约在 $m = 0.07$ 处与 $\Delta g_s = 0$ 相交, 即 $g_\theta = g_s$. 当 $m < 0.07$ 时, $\Delta g_s < 0$, 畸变解分布是稳定态, 当 $0.07 < m <$

1 时, $\Delta g_s > 0$, 饱和解分布是稳定态, 在该点实现了由畸变态到饱和态的转变. 在转变点, 对畸变解 $m = 0.07$, 而对饱和解 $m = 1$, 但畸变态自由能与饱和态自由能相等且同为最小, 因此这两个态在该点形成了双稳态. 可见在一定条件下, 两种极化耦合在饱和点可以诱导双稳态. 由于形成双稳态时两种态的转变是突变的, 因而为一级转变. 一级转变与双稳态密切相关.

4. 一级 Freedericksz 转变与双稳态条件

图 1 中代表正常情况的曲线 (2) 及 (3) 分别由异常情况曲线 (1) 中令挠曲电系数 $e = 0$ 及序电系数 $P = 0$ 得到, 可见如果挠曲电极化或表面序电极化单独存在, 饱和点的转变仍为通常的二级转变, 只有两者同时存在并且相互耦合时有可能出现一级转变形成双稳态. 由图 1 曲线 (4) 还可得知, 并非表面序电极化和挠曲电极化的耦合一定诱导双稳态, 双稳态的存在与各个参数的组合有关. 下面分析给出形成双稳态的一般条件.

从上面的数值计算看到, 在一级转变条件下, 约化自由能差在 $m = 1$ 附近大于零, 而二级转变情况下小于零, 由此可推得双稳态条件.

由方程 (16), (17), 经方程 (13) — (15), 及 I_1, I_2 的表达式可求出 $m = 1$ 时 Δg_s 及其一阶偏导数和二阶偏导数, 经烦杂的推导得到结果为

$$\Delta g_s \Big|_{m=1} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d\Delta g_s}{dm} \Big|_{m=1} = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta g_s}{dm^2} \Big|_{m=1} = & -\frac{4}{\eta'} \left[I_2 \Big|_{m=1} \frac{d^2 I_2}{dm^2} \Big|_{m=1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{dI_2}{dm} \Big|_{m=1} \right)^2 \right] \\ & + \left(1 + \frac{1}{\eta'} \right) \pi^2 \left[u \Big|_{m=1} \frac{d^2 u}{dm^2} \Big|_{m=1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{du}{dm} \Big|_{m=1} \right)^2 \right] \\ & + \frac{2}{V_1^2} \left[\frac{erP_1}{\eta'} - \frac{erP_1}{\eta'(1+\eta')} \right. \\ & \left. + \frac{eP_1}{1+\eta'} - \alpha_1 \right] \frac{dv_0}{dm} \Big|_{m=1} \\ & - \frac{2}{V_l^2} \left[\frac{erP_2}{\eta'} - \frac{erP_2}{\eta'(1+\eta')} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{eP_2}{1 + \eta'} + \alpha_2 \Big] \frac{dv_l}{dm} \Big|_{m=1} + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 + \eta'} \frac{dI_1}{dm} \Big|_{m=1} \\
 & - \frac{2}{V_1} \left(1 - \frac{1}{V_1}\right) \left(\alpha_1 - \frac{eP_1}{\eta'}\right) + \frac{e'\eta'}{2\pi(1 + \eta')} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_L}\right), \quad (24) \\
 & - \frac{2}{V_L} \left(1 - \frac{1}{V_L}\right) \left(\alpha_2 - \frac{eP_2}{\eta'}\right) \\
 & + \frac{e}{1 + \eta'} \left(1 - \frac{r}{\eta'}\right) \left[2\left(\frac{P_2}{V_L} - \frac{P_1}{V_1}\right)\right] \\
 & + \frac{2 + \eta'}{1 + \eta'} \left(\frac{P_2}{V_L^2} - \frac{P_1}{V_1^2}\right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

要形成双稳态要求(20)式大于零,由此可得形成双稳态的条件为 $\frac{d^2\Delta g_s}{dm^2} \Big|_{m=1} > 0$.

(20) 式中 $V_1, V_L, u \Big|_{m=1}, I_2 \Big|_{m=1}$, 及 $\frac{dv_0}{dm} \Big|_{m=1}$, $\frac{dv_l}{dm} \Big|_{m=1}, \frac{du}{dm} \Big|_{m=1}, \frac{d^2u}{dm^2} \Big|_{m=1}, \frac{dI_2}{dm} \Big|_{m=1}, \frac{d^2I_2}{dm^2} \Big|_{m=1}$ 分别是 v_0, v_l, u, I_2 及其对状态参量 m 的一阶, 二阶导数在 $m = 1$ 时的值, 它们分别由以下方程确定.

将 $m = 1$ 代入边界条件(14)和(15)式可以解得 V_1, V_L :

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1(1 + \eta') - eP_1(1 + r) \\
 & = I_2 \Big|_{m=1} \left[\sqrt{(1 + \eta')(1 + \eta')(1 - V_1)} \right. \\
 & \quad \left. - e' \sqrt{1 + \eta'} \right], \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_2(1 + \eta') + eP_2(1 + r) \\
 & = I_2 \Big|_{m=1} \left[\sqrt{(1 + \eta')(1 + \eta')(1 - V_L)} \right. \\
 & \quad \left. + e' \sqrt{1 + \eta'} \right]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

由方程(13)可得与电压 u 有关的方程

$$\begin{aligned}
 u \Big|_{m=1} = & - \frac{\sqrt{1 + \eta'} \ln \frac{\sqrt{1 - V_1} - 1}{\sqrt{1 - V_1} + 1}}{2\pi} \\
 & - \frac{\sqrt{1 + \eta'} \ln \frac{\sqrt{1 - V_L} - 1}{\sqrt{1 - V_L} + 1}}{2\pi}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dm} \Big|_{m=1} = \frac{\eta'}{\pi \sqrt{1 + \eta'}} I_1 \Big|_{m=1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2u}{dm^2} \Big|_{m=1} = & \frac{2\eta'}{\pi \sqrt{1 + \eta'}} \frac{dI_1}{dm} \Big|_{m=1} \\
 & - \frac{1}{2\pi} \frac{\eta'^2}{(1 + \eta')^{3/2}} I_1 \Big|_{m=1} \\
 & + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 + \eta'} \frac{d^2I_1}{dm^2} \Big|_{m=1} \\
 & + \frac{e'\eta'}{\pi(1 + \eta')V_1^2} \frac{dv_0}{dm} \Big|_{m=1} \\
 & + \frac{e'\eta'}{\pi(1 + \eta')V_L^2} \frac{dv_l}{dm} \Big|_{m=1} \\
 & + \frac{e'\eta'}{2\pi(1 + \eta')^2} \left\{ \frac{[2 + \eta' - 2(1 + \eta')V_1]}{V_1^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{[2 + \eta' - 2(1 + \eta')V_L]}{V_L^2} \right\}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$I_1 \Big|_{m=1}, I_2 \Big|_{m=1}, \frac{dI_1}{dm} \Big|_{m=1}, \frac{dI_2}{dm} \Big|_{m=1}, \frac{d^2I_1}{dm^2} \Big|_{m=1}$$

可由 I_1, I_2 的表达式及其对状态参量 m 求

一阶, 二阶导数并令 $m = 1$ 得到. $\frac{dv_0}{dm} \Big|_{m=1}$,

$\frac{dv_l}{dm} \Big|_{m=1}, \frac{d^2v_0}{dm^2} \Big|_{m=1}, \frac{d^2v_l}{dm^2} \Big|_{m=1}$ 满足的方程可由边

界条件(14), (15) 两边对状态参量 m 求一阶, 二阶导数令 $m = 1$ 得到.

对于一定的液晶材料和特定的基板, $P_1, P_2, \alpha_1, \alpha_2, e, e', r$ 以及 η, η' 都是已知的, 将它们代入(21), (22) 式中可得出 V_1, V_L . 联立以上诸方程并

将求得的 V_1, V_L 代入, 可最终求得 $\frac{d^2\Delta g_s}{dm^2} \Big|_{m=1}$ 的值.

为了验证该双稳态条件的正确性, 利用上述方法我们对图 1 中的四组参数进行了计算, 结果列于表 1.

表1 不同参数下 Δg_s 二阶导数在饱和点的取值, $r = -3$

α_1	α_2	P_1	P_2	η	η'	e	e'	$\frac{d^2\Delta g_s}{dm^2} \Big _{m=1}$	结论
0.75	1.70	0.11	1.70	2.40	8.00	1.05	0.30	64.53 > 0	双稳态
0.75	1.70	0.11	1.70	2.40	8.00	0.00	0.00	-93.72 < 0	非双稳态
0.75	1.70	0.00	0.00	2.40	8.00	1.05	0.30	-88.47 < 0	非双稳态
1.00	1.80	0.30	1.00	1.10	6.00	0.10	0.20	-67.57 < 0	非双稳态

由表 1 可见本文给出的双稳态条件与数值计算结果吻合. 我们进行了大量的计算及验证, 这里不再列出. 当给定各参数后, 利用本文给出的公式及方法求出 $\left. \frac{d^2 \Delta g}{dm^2} \right|_{m=1}$, 根据计算结果是否大于零可以判断该组参数组合对应的液晶盒内是否存在双稳态.

5. 结 论

本文研究了表面序电极化、挠曲电极化与向列液晶盒双稳态问题. 结果表明在一定条件下, 两种

极化通过改变锚定能在饱和点诱导双稳态. 对锚定能的影响不仅仅单纯改变其本身的大小, 更重要的是两种极化的耦合, 使得锚定能公式中出现了指向矢倾角的高次项, 这与前人提出的锚定能修正公式符合. 文中给出了能够产生双稳态的条件, 此条件与数值计算结果一致. 在实际中很多液晶产品需要利用双稳态, 本文结果对弱锚定双稳液晶盒的设计和开发提供了帮助.

感谢河北工业大学杨国琛教授的指导, 感谢华北电力大学李向永同学的帮助.

-
- [1] Tang X Z, Lu X H, Peng Z H, Liu Y G, Xuan L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4001 (in Chinese) [唐先柱、卢兴海、彭增辉、刘永刚、宣 丽 2010 物理学报 **59** 4001]
- [2] Deng L G, Zhao Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7773 (in Chinese) [邓罗根、赵找栗 2009 物理学报 **58** 7773]
- [3] Liu J J, Shen M, Liu X J, Yang G C 2006 *Chin. Phys.* **15** 163
- [4] Rapini A., Papoular M 1969 *J. Phys. (Paris) Colloq* **30** C4 – 54
- [5] Yang G C, Zhang S J, Han L J, Guan R H 2004 *Liq. Cryst.* **31** 1093
- [6] Barbero G., Madhusudana N V, Paliarne J F 1983 *Phys. Lett. A* **103** 385
- [7] Barbero G., Madhusudana N V, Durand G. Z 1983 *Naturf. A* **39** 1066
- [8] Yang K H, Rosenblatt C 1982 *Appl. Phys. Lett.* **43** 62
- [9] Yokoyama H, Van Sprang H A 1985 *J. Appl. Phys.* **57** 4520
- [10] Warengem M 1984 *Mol. Phys.* **53** 1381
- [11] Barnik M I, Blinov L H, Korkishko T V 1983 *Cryst. Liq. Cryst.* **99** 53
- [12] Yang K H, Rosenblatt C H 1983 *Appl. Phys. Lett.* **41** 438
- [13] Yang K H 1983 *J. Phys. (Fr)* **44** 1051
- [14] Barbero G., Durand G. 1986 *J. Phys. (Fr)* **46** 2129
- [15] Barnik M I, Blinov L M, Korkishko T V, Umansky B A, Chigrinov V G 1983 *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **85** 176
- [16] Yang G C, Shi J R, Liang Y 2000 *Liq. Cryst.* **27** 875
- [17] Sonin A 1995 *The Surface Physics Of Liquid Crystal* (Gorden and Breach Publishers)
- [18] Stallinga S, Van Haaren J A M M, Van Den Erenbeemd J M A 1996 *Phys. Rev. E* **53** 1701
- [19] Zhang S H, Han H L, Guan R H, Yang G C 2006 *Liq. Cryst.* **33** 227
- [20] Barbero G and Durand G 1990 *J. Appl. Phys.* **67** 2678
- [21] Yang G C, Guan R H, An H L 2003 *Liq. Cryst.* **30** 997
- [22] Palto S P, Mottranm N J, Osipov M A 2007 *Phys. Rev. E* **78** 061707
- [23] Meyer R B 1969 *Phys. Rev. Lett.* **22** 918
- [24] Prost J, Marcerou J P 1977 *J. Phys., Paris* **38** 315
- [25] Petrov A G, Derzhanski A 1977 *Mol. Crystals.* **41** 41
- [26] Barbero G., Dozov I, Paliarne J F, Durand G. 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 2056
- [27] M Blinov L, Barnik M I, Ozaki M, Shtykov N M, Yoshino K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 8091
- [28] Zakharo A V, Dong Y 2001 *Phys. Rev. E* **64** 042701
- [29] Nazarenko V G, Lavrentovich O D 1994 *Phys. Rev. E* **49** 990
- [30] Frisken B J, Palfy – Muhoray P 1989 *Phys. Rev. A* **40** 6099

The bistable state of a nematic liquid crystal cell with surface order-electricity polarization and flexoelectric polarization at saturation point

Guan Rong-Hua[†]

(School of Sciences, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

(Received 30 June 2010; accepted 16 September 2010)

Abstract

Using both numerical simulations and an analytical theory we study the influence of the surface order-electricity polarization and flexoelectric polarization on the bistable state of a non-symmetric weak anchoring nematic liquid crystal cell at saturation point. The equilibrium equation and boundary condition of the director have been obtained when surface order – electricity polarization and flexoelectric polarization coexistence. By adopting a new state parameter, the physical effects caused by the two polarizations have been discussed from the energy point of view. The results show that the bistable state can be induced under certain condition and by changing the anchoring energy at saturation point. The condition for the bistable state existence is deduced and it accord well with the numerical results.

Keywords: surface order-electricity polarization, flexoelectric polarization, saturation point, bistable state

PACS: 61.30.Hn, 61.30.Gd, 64.70.M –

[†] E-mail: ronghua_guan@sohu.com