

强度应力干涉下多态多系统的可靠性研究^{*}

张永进^{1)†} 宋伟才²⁾

1) (安徽工业大学数理学院, 马鞍山 243002)

2) (江西中医学院计算机学院, 南昌 330004)

(2010年3月30日收到; 2010年5月5日收到修改稿)

基于多元随机分析以及统计物理, 建立了在系统强度与应力干涉下具有初始失效的多个状态以及多个相依子系统的可靠性模型. 在条件序列统计量的定义下推导了系统随机强度向量的概率密度函数; 考虑各个子系统内零部件间的相干性, 给出了不同结构的系统可靠性评估, 将任意干涉系统可靠性表示为所有 $(n-i+1)/n (1 \leq i \leq n)$ 型冗余系统可靠性的线性组合. 为验证模型的有效性, 基于二维 Pareto 分布给出了一个工程上的实例分析.

关键词: 干涉系统, 可靠性, 应力强度, 条件序列统计

PACS: 12.40.Ee, 05.10.-a, 02.70.Rr

1. 引言

一类复杂工程物理系统(如战略导弹系统、核安全预警系统等)长期暴露在一定的随机应力下运行, 随着系统材料强度的退化, 高可靠性很难得到保障. 应力通常是指引起系统或产品失效的外载荷, 而强度则为产品抵抗失效的能力^[1,2], 随着时间的推移, 其应力强度不一定是一个确定的值, 可以抽象为随机变量组成的多元随机函数. 目前从材料强度和外部应力干涉角度出发研究系统可靠性是一大热点^[3,4].

从宏观数据观察角度出发, 张永进等^[5]研究了一类分时冗余系统的可靠性问题; 从零部件寿命角度出发, Albert 等和 Lu 等^[6,7]研究了系统可靠性; 也有一些学者从材料微观量化^[8,9]与系统动态角度^[10-12]分析了元件可靠性; 从物理试验角度出发, Zhang 等^[13-19]研究了强度应力干涉诱导失效及材料强度退化等问题, Yang 等^[20]研究了电应力影响下晶体管的可靠性问题. 目前从应力强度统计角度研究可靠性, 多数假定应力强度分别服从一个已知分布且只涉及独立系统情况, 如假定应力或强度服从指数分布^[21]、Weibull 分布、正态分布以及 Gamma

分布^[22]等. 然而一些复杂物理系统通常由多个子系统串并联组成, 而各个子系统的内部零件可靠性具有一定的相干关系^[23]. 本文从强度应力干涉的统计角度出发, 考虑出厂时系统强度高于基本工作应力以及强度应力分布不确定的条件下, 研究一类具有多个子系统的干涉系统的可靠性以及干涉系统与 k/n 型冗余系统可靠性^[24]之间的线性关系, 这里 k/n 表示 n 个系统中的 k 个系统.

2. 多态多系统强度变量及其密度函数

一般情况下, 在系统刚开始工作的时候, 系统强度高于应力, 强度与应力的分布有一定距离, 不会产生失效. 但随着时间的推移, 由于工作环境、使用条件等因素的影响, 系统强度发生退化, 导致在 t_2 时刻应力与强度发生干涉, 这时系统将可能产生失效. 根据工程背景, 应力强度分布随着时间的变化关系可以描述为图 1 所示, 其中 S 表示该系统的强度变量, s 表示系统应力变量, $f(S)$ 与 $f(s)$ 分别表示对应变量的概率密度函数.

2.1. 初始可靠性

在实际工程中, 厂商为保证产品系统的高可靠

^{*} 安徽省高校省级自然科学研究重点项目(批准号: KJ2010A337)和国家自然科学基金(批准号: 70571018)资助的课题.

[†] E-mail: zyjgtj@sohu.com

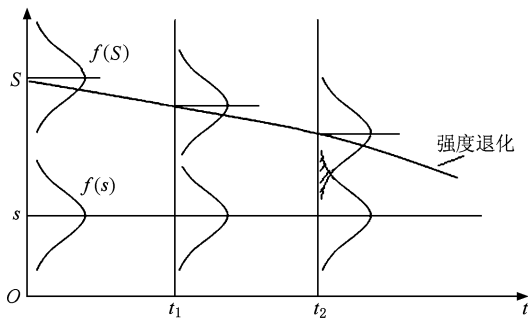


图1 应力-强度分布与时间的关系

性,一般要求产品出厂时系统强度高于基本工作应力 s_0 ,通常用检测部分产品来推断该批产品的可靠性,并非通过严格的 100% 检测,况且某些产品的检测费用极高,甚至进行毁坏性检测. 这样有许多产品并未检测而直接出厂以等待使用,从而导致系统使用的初始可靠度并非一定为 1.

记事件 A 为“出厂时系统强度高于基本工作应力”, R_0 为事件 A 发生的概率 $p(A)$, 则

$$R_0 = p(A) = p(S > s_0),$$

设 S 为该系统的强度变量, s 为系统应力变量, 则系统在某时刻 t 的可靠性可表示为

$$R_{\Sigma} = p(S > s, S > s_0) \\ = p(S > s | S > s_0) p(S > s_0) = R_0 R_{s|s_0}. \quad (1)$$

其中 $R_{s|s_0} = p(S > s | S > s_0)$ 为系统潜在可靠性.

2.2. 多系统多态结构

假定一物理机械系统 Σ 由具有正常 I_U 和失效 I_F 两状态的 n 个独立子系统 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ 构成, 每个子系统由 m 个零部件构成, 设 $\mathbf{S}_i = (S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^m)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 表示第 i 个子系统强度构成的向量, S_i^j 表示第 i 个子系统中第 j 个部件的随机强度, 每个子系统所受应力均为向量 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, s_j 表示任一子系统第 j 个部件所受应力, 这里向量 $\mathbf{S}_i$ 与应力向量 $\mathbf{s}$ 是相互独立的. 约定

$$x_i = \begin{cases} 1, & \Sigma_i \in I_U \\ 0, & \Sigma_i \in I_F \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$I(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 1, & \Sigma \in I_U \\ 0, & \Sigma \in I_F, \end{cases}$$

$$(0_i, \boldsymbol{\tau}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$(1_i, \boldsymbol{\tau}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 函数 $I(\boldsymbol{\tau})$ 表示该系统的状

态示性函数.

定义 1 对于任意结构系统 Ω , 若至少存在一个向量 $\boldsymbol{\tau}$ 使得 $I(1_i, \boldsymbol{\tau}) = 1, I(0_i, \boldsymbol{\tau}) = 0$, 则称该系统 Ω 是干涉的.

本文考虑的每个子系统均是干涉的.

2.3. 随机强度向量的概率密度函数

2.3.1. $\mathcal{L}$ 序统计量

设系统 Σ 的强度向量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n \in \mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^m$ 为一组 m 维独立同分布的随机向量, 其分布函数为 $F(\mathbf{x})$, 概率密度函数为 $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. 引入映射

$$\mathcal{L}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$$

$$\text{且 } \mathcal{L}(\mathbf{R}^m - \{\mathbf{0}\}) > 0, \mathcal{L}(\mathbf{0}) = 0.$$

从而 $\mathcal{L}(\mathbf{S}_1), \mathcal{L}(\mathbf{S}_2), \dots, \mathcal{L}(\mathbf{S}_n)$ 为一组具有概率分布函数 $p\{\mathcal{L}(\mathbf{S}_i) \leq x\}$, $x \in \mathbf{R}$ 的独立同分布随机变量.

定义 2 对于任意两强度向量 $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j (1 \leq i, j \leq n)$, 若 $\mathcal{L}(\mathbf{S}_i) \leq \mathcal{L}(\mathbf{S}_j)$, 称 $\mathbf{S}_i$ 条件小于 $\mathbf{S}_j$, 简记为 $\mathbf{S}_i \prec \mathbf{S}_j$; 若新序列向量 $\mathbf{S}^{(1)}, \mathbf{S}^{(2)}, \dots, \mathbf{S}^{(n)}$ 为强度向量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ 的一个排列, 且在映射 $\mathcal{L}$ 下满足 $\mathcal{L}(\mathbf{S}^{(1)}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{S}^{(2)}) \leq \dots \leq \mathcal{L}(\mathbf{S}^{(n)})$, 则称向量 $\mathbf{S}^{(1)}, \mathbf{S}^{(2)}, \dots, \mathbf{S}^{(n)}$ 为 $\mathcal{L}$ 下条件序列统计量.

2.3.2. 强度独立不同分布时的概率密度函数

若系统 Σ 的 n 个子系统强度为独立同分布的连续随机向量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$, 则根据定义 2 及文献 [25], $\mathcal{L}$ 下条件序列统计量 $\mathbf{S}^{(r)} (1 \leq r \leq n)$ 的概率密度函数为

$$f^{(r)}(\mathbf{x}) = r C_n^r [p\{\mathcal{L}(\mathbf{S}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x})\}]^{r-1} \\ \times [1 - p\{\mathcal{L}(\mathbf{S}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x})\}]^{n-r} f(\mathbf{x}), \quad (2)$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 为随机向量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ 的概率密度函数.

但是在实际工程中, 由于不同子系统是由不同部件所组成, 而且不同部件由不同材料构成, 从而各子系统强度有所不同. 这里假定系统 Σ 的 n 个子系统强度向量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ 相互独立且具有不同分布, 其分布函数分别为 $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})$, 概率密度函数分别为 $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$. 方便地, 设 Ω^m 为 m 维实空间 $\mathbf{R}^m$ 子集的 Borel σ 域且 $B \in \Omega^m$, 根据定义 2 以及强度向量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ 的相互独立性, 强度向量 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}
p\{S^{(r)} \in B\} &= \sum_{i=1}^n p\{S^{(r)} \in B, S^{(r)} = S_i\} \\
&= \sum_{i=1}^n p\{S_i \in B, \mathcal{L}(S^{(1)}) \leq \mathcal{L}(S^{(2)}) \leq \cdots \leq \mathcal{L}(S^{(r-1)}) \leq \mathcal{L}(S^{(r)}) = \mathcal{L}(S_i), \\
&\quad \mathcal{L}(S^{(n)}) \geq \mathcal{L}(S^{(n-1)}) \geq \cdots \geq \mathcal{L}(S^{(r+1)}) \geq \mathcal{L}(S^{(r)}) = \mathcal{L}(S_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^n \int_B \cdots \int \left(\prod_{j=1}^{r-1} p\{\mathcal{L}(S^{(j)}) \leq \mathcal{L}(x)\} \prod_{j=r+1}^n [1 - p\{\mathcal{L}(S^{(j)}) \leq \mathcal{L}(x)\}] \right) f_i(x) dx \\
&= \int_B \cdots \int \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{r-1} \lambda_j(x) \prod_{j=r+1}^n [1 - \lambda_j(x)] \right) f_i(x) dx. \quad (3)
\end{aligned}$$

从而根据(3)式,强度向量 $S^{(r)}$ 的概率密度函数为

$$\begin{aligned}
f^{(r)}(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{r-1} \lambda_j(x) \prod_{j=r+1}^n [1 - \lambda_j(x)] \right) f_i(x), \quad (4)
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_j(x) = p\{\mathcal{L}(S^{(j)}) \leq \mathcal{L}(x)\}$, $j = 1, 2, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n$. 特殊地, $\mathcal{L}$ 序统计量 $S^{(1)}$ 与 $S^{(n)}$ 的概率密度函数分别为

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n f_i(x) [1 - \lambda_j(x)], \\
f^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n f_i(x) \lambda_j(x), \quad (5)
\end{aligned}$$

一般地,根据(1)式,多子系统应力强度的系统可靠性可以表示为

$$\begin{aligned}
R_{\Sigma} &= p\{S > s_0\} p\{s < \varphi(S_1, S_2, \\
&\quad \cdots, S_n) \mid s_0 < S\}. \quad (6)
\end{aligned}$$

下面基于强度向量 S_i 与应力向量 s 给出多系统应力强度干涉下可靠性模型.

3. 可靠性模型及其统计分析

根据多态多系统 Σ 的结构,设子系统 S_i 的 m 维随机强度向量的概率分布及概率密度函数分别为 $F_i(x)$ 及 $f_i(x)$, m 维应力变量概率分布及密度函数分别为 $G(x)$ 和 $g(x)$. 根据定义 2,子系统 S_i 正常,当且仅当 $S \prec S_i$,即 $\mathcal{L}(S) \leq \mathcal{L}(S_i)$,否则系统失效. 于是第 i 个子系统的潜在可靠性为

$$\begin{aligned}
R_{S_i} &= p\{s \prec S_i\} = p\{\mathcal{L}(s) \leq \mathcal{L}(S_i)\} \\
&= \int \cdots \int [1 - \lambda_i(y)] g(y) dy, \quad (7)
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i(y) = p\{\mathcal{L}(S_i) \leq \mathcal{L}(s)\}$.

在一般工程系统中,由于系统结构不同,算子 $\mathcal{L}$ 选取也有所不同. 若考虑部件之间强度与应力的

混合影响,通常选取线性变换 $\mathcal{L}(x) = \sum_{i=1}^m a_i x_i$,若是串并联情况,通常选取极值变换 $\mathcal{L}(x) = \min_{1 \leq i \leq m} x_i$ 或 $\max_{1 \leq i \leq m} x_i$.

3.1. 不同系统结构的可靠性

由于系统 Σ 强度向量 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的 $\mathcal{L}$ 条件统计量为 $S^{(1)}, S^{(2)}, \cdots, S^{(n)}$,根据(4)及(7)式,若系统 S_s 为串联结构,则系统可靠性为

$$\begin{aligned}
R_{S_s} &= R_0 p\{s \prec S^{(1)}\} = R_0 p\{\mathcal{L}(S) \leq \mathcal{L}(S^{(1)})\} \\
&= R_0 \int \cdots \int \prod_{i=1}^n [1 - \lambda_i(y)] g(y) dy,
\end{aligned}$$

若系统 S_p 为并联结构,则系统可靠性为

$$\begin{aligned}
R_{S_p} &= R_0 p\{s \prec S^{(n)}\} = R_0 p\{\mathcal{L}(S) \leq \mathcal{L}(S^{(n)})\} \\
&= R_0 \left(1 - \int \cdots \int \prod_{j=1}^n \lambda_j(y) g(y) dy \right),
\end{aligned}$$

若 k/n 型冗余系统 $\Sigma k/n$ 可靠,当且仅当至少 k 个子系统可靠,则根据(4)式该系统的可靠性为

$$\begin{aligned}
R_{\Sigma k/n} &= R_0 p\{S^{(n-k+1)} \succ s\} \\
&= R_0 p\{\mathcal{L}(S^{(n-k+1)}) \geq \mathcal{L}(s)\} \\
&= R_0 \int \cdots \int p\{\mathcal{L}(s) \leq \mathcal{L}(x)\} f^{(n-k+1)}(x) dx \\
&= \int \cdots \int \kappa(x) \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{n-k} \lambda_j(x) \right. \\
&\quad \times \left. \prod_{j=n-k-2}^n [1 - \lambda_j(x)] \right) f_i(x) dx, \quad (8)
\end{aligned}$$

其中 $\kappa(x) = p\{\mathcal{L}(s) \leq \mathcal{L}(x)\}$. 若各子系统随机强度具有相同分布函数,即 $F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_n(x) = F(x)$ 时,则根据(2)及(8)式有

$$\begin{aligned}
R_{\Sigma k/n} &= k C_n^k R_0 \int \cdots \int \kappa(x) \\
&\quad \times [\lambda(x)]^{n-k} [1 - \lambda(x)]^{k-1} f(x) dx. \quad (9)
\end{aligned}$$

3.2. 干涉系统的可靠性

设系统 Σ 是干涉的且 n 个子系统的使用寿命为独立同分布的随机变量 $T_1, T_2, \dots, T_n$, 其顺序统计量为 $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$, 记系统 Σ 的使用寿命为 $T = \varphi(T_1, T_2, \dots, T_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 且

$$p_i = p\{\varphi(T_1, T_2, \dots, T_n) = T_{(i)}\}$$

$$\begin{aligned} R_{\Sigma} &= R_0 p\{\mathcal{L}(s) \leq \varphi[\mathcal{L}(S_1), \mathcal{L}(S_2), \dots, \mathcal{L}(S_n)]\} \\ &= R_0 \int \dots \int p\{\varphi[\mathcal{L}(S_1), \mathcal{L}(S_2), \dots, \mathcal{L}(S_n)] \geq \mathcal{L}(y)\} g(y) dy \\ &= R_0 \int \dots \int \sum_{i=1}^n (p\{\varphi[\mathcal{L}(S_1), \mathcal{L}(S_2), \dots, \mathcal{L}(S_n)] \geq \mathcal{L}(y) | \varphi[\mathcal{L}(S_1), \mathcal{L}(S_2), \dots, \mathcal{L}(S_n)] \\ &= \mathcal{L}(S^{(i)})\} p\{\varphi[\mathcal{L}(S_1), \dots, \mathcal{L}(S_n)] = \mathcal{L}(S^{(i)})\}) g(y) dy \\ &= R_0 \int \dots \int \sum_{i=1}^n (p\{\varphi[\mathcal{L}(S_1), \dots, \mathcal{L}(S_n)] = \mathcal{L}(S^{(i)})\} p\{\mathcal{L}(S^{(i)}) \geq \mathcal{L}(y)\}) g(y) dy, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\mathcal{L}(S^{(i)})$ 为 $\mathcal{L}(S_1), \dots, \mathcal{L}(S_n)$ 中第 i 个最小值, 从而根据 (10) 式有

$$p\{\varphi[\mathcal{L}(S_1), \dots, \mathcal{L}(S_n)] = \mathcal{L}(S^{(i)})\} = p_i,$$

因此由 (11) 式有

$$\begin{aligned} R_{\Sigma} &= R_0 \int \dots \int \sum_{i=1}^n p_i p\{\mathcal{L}(S^{(i)}) \geq \mathcal{L}(y)\} g(y) dy \\ &= R_0 \sum_{i=1}^n p_i p\{\mathcal{L}(S^{(i)}) \geq \mathcal{L}(S)\} \\ &= R_0 \sum_{i=1}^n p_i p\{s \prec S^{(i)}\}. \end{aligned} \quad (12)$$

从而任意干涉系统 Σ 的可靠性可表示为 $(n-i+1)/n$ 系统可靠性的一个线性组合, 即

$$R_{\Sigma} = R_0 \sum_{i=1}^n p_i R_{\Sigma_{n-i+1/n}}. \quad (13)$$

若随机强度向量 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的顺序统计量为 $S_{(1)}, S_{(2)}, \dots, S_{(n)}$, 则由 (12) 式知系统可靠性为

$$R_{\Sigma} = R_0 \sum_{i=1}^n p_i p\{s < S_{(i)}\}. \quad (14)$$

下面从工程角度给出相应模型的实例应用.

4. 实例分析

假定某物理系统 Σ 由 n 个相干子系统 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ 构成, 每个子系统有两个零部件, 记第 i 个子系统 Σ_i 的强度向量为 $S_i = (S_i^1, S_i^2)$, $1 \leq i \leq n$, 每个子系统所受的应力向量为 $s = (s_1, s_2)$, 考虑每个子

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

考虑初始失效并根据文献[26], 则干涉系统 Σ 的使用寿命 T 的概率分布可表示为

$$p\{T \leq t\} = R_0 \sum_{i=1}^n p_i p\{T_{(i)} \leq t\},$$

从而对于一般干涉多子系统而言, 系统可靠性为

系统随机强度和所受应力独立且分别服从参数为 λ_i 和 θ 的二维 Pareto 分布, 其分布函数为

$$F_{\lambda}(\mathbf{x}) = 1 - (\mathbf{a}\mathbf{x}^T - 1)^{-\lambda},$$

$$F_{\theta}(\mathbf{y}) = 1 - (\mathbf{a}\mathbf{y}^T - 1)^{-\theta},$$

其中 $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{a} = (1, 1)$, $x_1 > 1, x_2 > 1$. 以工程上的先验信息 R_0 作为初始可靠度, 下面考虑不同子系统可靠性以及该干涉系统 Σ 的可靠性问题.

由于概率密度函数

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \lambda(\lambda + 1)(\mathbf{a}\mathbf{x} - 1)^{-\lambda-2},$$

$$g(\mathbf{y}) = \frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_1 \partial y_2} = \theta(\theta + 1)(\mathbf{a}\mathbf{y} - 1)^{-\theta-2},$$

不妨选取极值变换 $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2)$, 从而根据 (7) 式, 该子系统的结构函数为

$$\begin{aligned} \lambda_i(\mathbf{y}) &= p\{\mathcal{L}(S_i) \leq \mathcal{L}(y)\} \\ &= p\{\min(S_i^1, S_i^2) \leq \min(y_1, y_2)\} \\ &= F_{\lambda}[\min(y_1, y_2), \min(y_1, y_2)]. \end{aligned}$$

从而第 i 个子系统 Σ_i 的潜在可靠性为

$$\begin{aligned} R_{\Sigma_i} &= 1 - \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} F_{\lambda}[\min(y_1, y_2), \min(y_1, y_2)] \\ &\quad \times g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= 1 - \int_1^{\infty} \int_{y_1}^{\infty} \left\{ \left[1 - \frac{1}{(2y_1 - 1)^{\lambda}} \right] \theta(\theta + 1) \right. \\ &\quad \times (\mathbf{a}\mathbf{y} - 1)^{-(\theta+2)} \left. \right\} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

$$- \int_1^\infty \int_{y_2}^\infty \left\{ [1 - (2y_2 - 1)^{-\lambda}] \right. \\ \left. \times \theta(\theta + 1)(ay - 1)^{-(\theta+2)} \right\} dy = \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

根据不同的参数值 λ , 很容易比较不同子系统 Σ_i 及 Σ_j 的可靠性, λ 值越大, 该子系统的可靠性越低. 考虑上述相干多子干涉系统 R_Σ 的可靠性, 由(8)式知函数 $\lambda(\mathbf{x})$ 及 $\kappa(\mathbf{x})$ 分别为

$$\lambda(\mathbf{x}) = 1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\lambda}, \quad \kappa(\mathbf{x}) = 1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\theta}.$$

$$R_{\Sigma 1/n} = \lambda(\lambda - 1)R_0 n \iint \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\theta}\} \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\lambda}\}^{n-1} (\mathbf{ax} - 1)^{-\lambda-2} d\mathbf{x},$$

$$R_{\Sigma 2/n} = \lambda(\lambda - 1)R_0 n(n - 1) \iint \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\theta}\} \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\lambda}\}^{n-2} (\mathbf{ax} - 1)^{-\lambda-2} d\mathbf{x},$$

.....

$$R_{\Sigma n/n} = \lambda(\lambda + 1)R_0 n \iint \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\theta}\} [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\lambda(n-1)} (\mathbf{ax} - 1)^{-\lambda-2} d\mathbf{x}. \quad (15)$$

对于该干涉系统 Σ , 取函数

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max[\min(x_1, x_2), \min(x_2, x_3), \dots, \min(x_{n-1}, x_n)].$$

从而该干涉系统的可靠性线性系数向量为

$$\mathbf{p} = \frac{1}{n^{n-2}} ((n-1)^{n-2}, (n-2)(n-1)^{n-3}, C_{n-2}^2(n-1)^{n-4}, \dots, (n-2)(n-1), 1, 0),$$

故该干涉系统可靠性为

$$R_\Sigma^{(n)} = \frac{R_0}{n^{n-2}} [(n-1)^{n-2} R_{\Sigma 2/n} + (n-2)(n-1)^{n-3} R_{\Sigma 3/n} + C_{n-2}^2(n-1)^{n-4} R_{\Sigma 4/n} \\ + \dots + (n-2)(n-1) R_{\Sigma n-1/n} + R_{\Sigma n/n}]. \quad (16)$$

为计算方便, 下面给出含有三个子系统的干涉系统可靠性计算. 根据(15)式, 取 $n=3$ 有

$$R_{\Sigma 2/3} = 2C_3^2 R_0 \iint \lambda(\mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}) [1 - \lambda(\mathbf{x})] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = 6R_0 \lambda(\lambda + 1) \iint \prod_{\lambda, \theta} \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\lambda, \theta}\} [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\lambda} (\mathbf{ax} - 1)^{-\lambda-2} d\mathbf{x} \\ = 6R_0 \lambda(\lambda + 1) \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{x_1} [1 - (2x_2 - 1)^{-\lambda}] [1 - (2x_2 - 1)^{-\theta}] (2x_2 - 1)^{-\lambda} (x_1 + x_2 - 1)^{-\lambda-2} dx_2 dx_1 \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} \int_0^{x_2} [1 - (2x_1 - 1)^{-\lambda}] [1 - (2x_1 - 1)^{-\theta}] (2x_1 - 1)^{-\lambda} (x_1 + x_2 - 1)^{-\lambda-2} dx_1 dx_2 \right\}, \\ R_{\Sigma 3/3} = 3C_3^3 R_0 \iint \kappa(\mathbf{x}) [1 - \lambda(\mathbf{x})]^2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = 3R_0 \lambda(\lambda + 1) \iint \{1 - [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-\theta}\} [2\min(x_1, x_2) - 1]^{-2\lambda} (\mathbf{ax} - 1)^{-\lambda-2} d\mathbf{x} \\ = 3R_0 \lambda(\lambda + 1) \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{x_1} [1 - (2x_2 - 1)^{-\theta}] (2x_2 - 1)^{-2\lambda} (x_1 + x_2 - 1)^{-\lambda-2} dx_2 dx_1 \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} \int_0^{x_2} [1 - (2x_1 - 1)^{-\theta}] (2x_1 - 1)^{-2\lambda} (x_1 + x_2 - 1)^{-\lambda-2} dx_1 dx_2 \right\}.$$

函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \max[\min(x_1, x_2), \min(x_2, x_3)]$, 从而根据(16)式有 $\mathbf{p} = \frac{R_0}{3}(2, 1, 0)$.

因此该干涉系统 Σ 的可靠性可表示为

$$R_\Sigma^{(3)} = \frac{R_0}{3}(2R_{\Sigma 2/3} + R_{\Sigma 3/3}).$$

取不同参数 λ, θ 以及初始可靠度 $R_0 = 0.99$, 通过数值计算得到相应可靠性数据详见表 1.

表1 2/3, 3/3 冗余系统以及干涉系统可靠性

λ	θ	$R_{\Sigma 2/3}$	$R_{\Sigma 3/3}$	$R_{\Sigma}^{(3)}$	λ	θ	$R_{\Sigma 2/3}$	$R_{\Sigma 3/3}$	$R_{\Sigma}^{(3)}$
0.1	0.1	0.7196	0.6006	0.6799	0.5	0.2	0.9012	0.6340	0.8121
0.1	0.2	0.8015	0.6674	0.7568	0.6	0.3	0.9135	0.7021	0.8430
0.2	0.1	0.8989	0.7071	0.8350	0.7	0.4	0.8901	0.6024	0.7942
0.2	0.2	0.8650	0.6646	0.7982	0.8	0.4	0.9207	0.6923	0.8446
0.4	0.3	0.7304	0.6832	0.7147	0.9	0.6	0.8482	0.6078	0.7681
0.4	0.2	0.8391	0.6503	0.7762	0.9	0.9	0.9491	0.7105	0.8696

由表1数据,不同结构系统的可靠度满足 $R_{\Sigma 2/3} \geq R_{\Sigma}^{(3)} \geq R_{\Sigma 3/3}$. 进一步,对于含有四个子系统的干涉系统可靠性为

$$R_{\Sigma}^{(4)} = \frac{R_0}{16}(9R_{\Sigma 2/4} + 6R_{\Sigma 3/4} + R_{\Sigma 4/4}),$$

取上述相同参数及初始可靠度,根据(15)式,相应可靠性数值计算结果见表2.

由表2数据,不同结构系统的可靠度满足 $R_{\Sigma 2/4} \geq R_{\Sigma}^{(4)} \geq R_{\Sigma 3/4} \geq R_{\Sigma 4/4}$. 从表1,2的数据对比表明,子系统越多,可靠性相应较低些,各类型系统可靠性数据具有一定的现实意义,从而也表明本文所建立的模型对研究一类具有多个子系统的干涉系统的可靠性具有一定的可行性.

表2 2/4, 3/4, 4/4 冗余系统以及干涉系统可靠性

λ	θ	$R_{\Sigma 2/4}$	$R_{\Sigma 3/4}$	$R_{\Sigma 4/4}$	$R_{\Sigma}^{(4)}$	λ	θ	$R_{\Sigma 2/4}$	$R_{\Sigma 3/4}$	$R_{\Sigma 4/4}$	$R_{\Sigma}^{(4)}$
0.1	0.1	0.7545	0.7086	0.6891	0.7259	0.5	0.2	0.8807	0.7014	0.5458	0.7846
0.1	0.2	0.7801	0.7334	0.6770	0.7486	0.6	0.3	0.8976	0.6961	0.5243	0.7907
0.2	0.1	0.8101	0.7071	0.6230	0.7522	0.7	0.4	0.8691	0.6230	0.5012	0.7463
0.2	0.2	0.8650	0.6646	0.6003	0.7656	0.8	0.4	0.9005	0.6122	0.5191	0.7609
0.4	0.3	0.7304	0.6832	0.6112	0.6982	0.9	0.6	0.8377	0.5898	0.5112	0.7171
0.4	0.2	0.8091	0.6503	0.5878	0.7284	0.9	0.9	0.9197	0.6807	0.6270	0.8036

5. 结 论

系统可靠性问题仍然是当今可靠性领域研究的热点. 本文从系统强度与所受应力为多元随机变量的角度分析了一般干涉系统的可靠性问题.

在实际工程中,许多物理系统(机械、化工、电子等系统)出厂时不一定完全可靠,本文在充分考虑强度应力初始可靠性的条件下,得到了条件序统计量下强度向量的概率密度函数,并建立了强度应力下由多子系统构成的干涉系统的可靠性模型,应

用文献[26]中系统生存时间的一概率表示方法,将干涉系统的可靠性表示为所有 $(n-i+1)/n$ ($1 \leq i \leq n$) 型冗余系统可靠性的线性组合. 最后给出一个二维 Pareto 分布下的例子分析,探讨了干涉多子系统可靠性,并在给出相应参数以及先验初始可靠度的条件下,应用数值计算方法得到了含有三个和四个子系统的不同结构系统可靠性,验证了本文所建立的模型对研究一类具有多个子系统的干涉系统的可靠性,以及干涉系统与任意 k/n 型冗余系统可靠性之间线性关系具有普遍适用与一定的可行性.

- [1] James S 2004 *J. Am. Stat. Asso.* **99** 235
 [2] Isaac W, Mustapha N, Daoud A 2009 *Reliab. Eng. Syst. Safe.* **94** 1207
 [3] Zong W A, Hong Z H, Yu L 2008 *Reliab. Eng. Syst. Safe.* **93** 1485

- [4] Bhatta G K, Johnson R A 1974 *J. Am. Stat. Asso.* **69** 966
 [5] Zhang Y J, Wang Z Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 178 (in Chinese) [张永进、汪忠志 2009 物理学报 **58** 178]
 [6] Albert F, Antoine R 2008 *Reliab. Eng. Syst. Safe.* **93** 1025
 [7] Lu L X, Gregory L 2008 *Reliab. Eng. Syst. Safe.* **93** 1594

- [8] Dong Y M, Li W J, Shao L, Wang J, Wang L, Yang H Y, Zou X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4492 (in Chinese) [董业民、李文军、邵丽、王俊、王磊、杨华岳、邹欣 2008 物理学报 **57** 4492]
- [9] Xie G F, He X H, Tong J J, Zheng Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3192 (in Chinese) [谢国锋、何旭洪、童节娟、郑艳华 2007 物理学报 **56** 3192]
- [10] Xing X S 1986 *Acta Phys. Sin.* **35** 741 (in Chinese) [荆修三 1986 物理学报 **35** 741]
- [11] Luan S Z, Liu H X, Jia R X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2524 (in Chinese) [栾苏珍、刘红侠、贾仁需 2008 物理学报 **57** 2524]
- [12] Zhang Y M, Zhang X F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3989 (in Chinese) [张义民、张旭方 2008 物理学报 **57** 3989]
- [13] Zhang J M, Xu K W 2004 *Chin. Phys.* **13** 205
- [14] Zhang J M, Zhang Y, Xu K W 2005 *Chin. Phys.* **14** 1006
- [15] Zhang J M, X K W 2005 *Chin. Phys.* **14** 1866
- [16] Zhang J M, Zou D S, Xu C, Zhu Y X, Liang T, Da X L, Shen G D 2007 *Chin. Phys.* **16** 1135
- [17] Xu J P, Chen W B, Lai P T, Li Y P, Chan C L 2007 *Chin. Phys.* **16** 529
- [18] Yang L, Ma X H, Feng Q, Hao Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2696
- [19] Liu H X, Zheng X F, Han X L, Hao Y, Zhang M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2576 (in Chinese) [刘红侠、郑雪峰、韩晓亮、郝跃、张绵 2003 物理学报 **52** 2576]
- [20] Yang L, Hu G Z, Hao Y, Ma X H, Quan S, Yang L Y, Jiang S G 2010 *Chin. Phys. B* **19** 047301
- [21] Ranjan K P, Uddin M B 1997 *Microelectron. Reliab.* **37** 923
- [22] Pandey M, Upadhyay S K 1986 *Microelectron. Reliab.* **26** 275
- [23] Hoepfer V M, Saleh J H, Marais K B 2009 *Reliab. Eng. Syst. Safe.* **94** 1904
- [24] Lu L X, Gregory L 2008 *Reliab. Eng. Syst. Safe.* **93** 1594
- [25] Bairamov I G 2006 *J. Multivariate Anal.* **97** 797
- [26] Samaniego F 1985 *IEEE T. Reliab.* **11** 69

Reliability of multi-state and multi-subsystem below stress-strength interference *

Zhang Yong-Jin^{1)†} Song Wei-Cai²⁾

1) (School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002, China)

2) (School of Computer, Jiangxi University of Traditional Chinese Medicine, Nanchang 330004, China)

(Received 30 March 2010; revised manuscript received 5 May 2010)

Abstract

Based on multivariate random analysis and statistical physics, the reliability model of a system with stress-strength interference and initial failure is developed, the system has multi-state and dependent multi-subsystem. According to the definition of conditionally ordered order statistics, the probability density function of random strength vector is studied. Considering the coherence of subsystem items, the system reliability evaluation for different structures is given, and the reliability of any coherent structure is represented as a linear combination of the reliabilities of $(n - i + 1)$ -out-of- n system ($1 \leq i \leq n$). Finally, an example is given to demonstrate the effectiveness of the model, where the stress-strength variable has a bivariate Pareto distribution.

Keywords: coherent system, reliability, stress-strength, conditionally ordered order statistics

PACS: 12.40.Ee, 05.10.-a, 02.70.Rr

* Project supported by the Key Program of the Natural Science Foundation of the Higher Education Institutions of Anhui Province, China (Grant No. KJ2010A337) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70571018).

† E-mail: zyjgtj@sohu.com