

激光时空混沌模型的加权网络投影同步*

吕翎[†] 孟乐 郭丽 邹家蕊 杨明

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2010年4月28日收到; 2010年6月27日收到修改稿)

提出了一种实现加权网络时空混沌投影同步的方法. 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了加权网络中连接节点之间耦合函数的结构以及网络节点状态方程中分离配置的线性项的系数矩阵的取值范围. 以 Bragg 声光双稳系统作为局域函数, 单向耦合映像格子作为空间扩展系统构成激光时空混沌模型. 通过仿真模拟检验了采用激光时空混沌模型作为网络节点的加权网络的投影同步效果. 结果显示, 对于任意的节点之间耦合强度的权重值, 加权网络的投影同步均可以实现.

关键词: 投影同步, 加权网络, 时空混沌, Bragg 声光双稳系统

PACS: 05.45.Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

1. 引言

自 Watts 和 Strogatz 关于小世界网络模型以及 Barabási 和 Albert 关于无标度网络模型建立的开创性工作以来^[1,2], 复杂网络的相关研究以其理论研究的前瞻性以及实际应用的广泛性而备受关注. 迄今, 人们在复杂网络的建模、网络特性以及网络动力学方面开展了大量的研究工作, 并取得了丰富的研究成果^[3-9]. 其中复杂网络的混沌同步是网络动力学研究的一个热点方向. 为此, Lü 和 Chen 构建了一个时变动力学复杂网络模型, 并给出其混沌同步的控制准则^[10]; Zhou 等完成了不确定动力学复杂网络的混沌同步分析^[11]; Li 和 Lai 研究了不确定动力学复杂网络的脉冲混沌同步规律^[12]; 敬晓丹等研究了非线性耦合完全网络的时空混沌同步问题^[13]; 马晓娟等研究了叶子节点对于网络同步能力的影响^[14]; Posadas-Castillo 等进行了以 Chua 电路作为复杂网络节点的混沌同步实验研究^[15]. 这些重要的研究成果为人们进一步探索复杂网络的混沌同步规律以及它在各研究领域的实际应用奠定了良好的工作基础. 然而, 已有的网络混沌同步的文献所涉及的复杂网络大都是无权网络. 而实际网络节点之间相互作用的强度是有差异的, 这就要求我们在研究复杂网络时赋予节点之间的连接以不同的权重

值, 这便是加权网络. 最近, 这种加权网络的混沌同步研究引起了国内外学者极大的兴趣. Zhou 等研究了加权随机网络的混沌同步特性^[16]; Motter 等报道了加权对无标度网络同步性能的影响^[17]; Wang 和 Chen 对加权小世界网络和无标度网络的混沌同步问题进行了深入讨论^[18]. 在研究这些具有确定的网络结构, 即确定的网络节点模型以及确定的网络节点耦合连接方式的加权网络同步规律时, 不容忽视的是在实际问题中, 复杂网络的结构往往具有任意性. 这样, 现有的一些针对确定网络结构的同步方案将具有一定的局限. 因此, 有必要发展适用于加权任意复杂网络结构的混沌同步方法.

本文提出了一种实现加权网络时空混沌投影同步的方法. 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了加权网络中连接节点之间耦合函数的结构以及网络节点状态方程中分离配置的线性项的系数矩阵的取值范围. 以 Bragg 声光双稳系统作为局域函数, 单向耦合映像格子作为空间扩展系统构成激光时空混沌模型. 通过仿真模拟检验了采用激光时空混沌模型作为网络节点的加权网络的投影同步效果. 结果显示, 对于任意的节点之间耦合强度的权重值, 加权网络的投影同步均可以实现. 这种同步方法对复杂网络的结构无特殊限制, 因此具有一定的普适性.

* 辽宁省自然科学基金(批准号:20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号:2008T108)资助的课题.

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

2. 加权网络的投影同步原理

考虑下列离散型时空混沌系统:

$$\mathbf{x}_{n+1}(i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i)), \quad (1)$$

其中 n 表示离散化时间, i 为空间格点坐标 ($i = 1, 2, \dots, L$), L 为系统尺寸. $\mathbf{x}_n(i) \in \mathbf{R}^m$ 为系统的状态变量, $\mathbf{F}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$.

将 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i))$ 进行适当的分离

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}(i) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i)) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n(i) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_n(i)), \end{aligned} \quad (2)$$

这里 \mathbf{A} 为经过适当分离配置的线性项的系数矩阵.

将 N 个离散型时空混沌系统(2)作为节点构成复杂网络. 其中第 j 个节点所满足的状态方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}^{(j)}(i) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n^{(j)}(i) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i)) \\ &+ \mathbf{S}_j(\mathbf{x}_n^{(1)}(i), \mathbf{x}_n^{(2)}(i), \dots, \mathbf{x}_n^{(N)}(i)), \\ &(j = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_n^{(1)}(i), \mathbf{x}_n^{(2)}(i), \dots, \mathbf{x}_n^{(N)}(i))$ 为连接节点之间待定的耦合函数.

定义网络各节点时空混沌系统中的状态变量之间的误差

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^{(j)}(i) &= \mathbf{x}_n^{(j)}(i) + \alpha_j \mathbf{x}_n^{(j+1)}(i), \\ &(j = 1, 2, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 α_j 为网络投影同步的标度因子.

由(4)式我们可以进一步得到

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1}^{(j)}(i) &= \mathbf{x}_{n+1}^{(j)}(i) + \alpha_j \mathbf{x}_{n+1}^{(j+1)}(i) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n^{(j)}(i) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i)) + \mathbf{S}_j \\ &+ \alpha_j [\mathbf{A}\mathbf{x}_n^{(j+1)}(i) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j+1)}(i)) + \mathbf{S}_{j+1}] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}_n^{(j)}(i) + \Delta\mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i), \\ &\mathbf{x}_n^{(j+1)}(i)) + \Delta\mathbf{S}_j, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\Delta\mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i), \mathbf{x}_n^{(j+1)}(i)) = \mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i)) + \alpha_j \mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j+1)}(i))$, $\Delta\mathbf{S}_j = \mathbf{S}_j + \alpha_j \mathbf{S}_{j+1}$.

若选择

$$\Delta\mathbf{S}_j = -\Delta\mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i), \mathbf{x}_n^{(j+1)}(i)), \quad (6)$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{l=j}^{k-1} \left(-\frac{1}{\alpha_l} \right) \Delta\mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(j)}(i), \mathbf{x}_n^{(j+1)}(i)) \\ &+ \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{1}{\alpha_j} \right) \mathbf{S}_1 \\ &= -\mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(k)}(i)) + \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{1}{\alpha_j} \right) \end{aligned}$$

$$\times [\mathbf{D}(\mathbf{x}_n^{(1)}(i)) + \mathbf{S}_1], (k = 2, 3, \dots, N). \quad (7)$$

那么,在连接网络节点之间待定的耦合函数取(7)式的情况下,(5)式就可以表示为

$$\mathbf{e}_{n+1}^{(j)}(i) = \mathbf{A}\mathbf{e}_n^{(j)}(i). \quad (8)$$

实际上,(7)式中的因子 $\prod_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{1}{\alpha_j} \right)$ 可以看成是表征网络节点之间耦合强度的相对权重,我们不妨令这个耦合强度的相对权重为 ξ_k ,即

$$\xi_k = \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{1}{\alpha_j} \right). \quad (9)$$

对于这样一个加权网络,构造网络的 Lyapunov 函数形式为

$$V_n = e^{\delta n} \sum_{j=1}^{N-1} |\mathbf{e}_n^{(j)}(i)|, \quad (10)$$

这里, δ 为调节参量,且 $\delta > 0$. 显然,

$$\begin{aligned} \Delta V &= e^{\delta n} \sum_{j=1}^{N-1} (e^{\delta} |\mathbf{e}_{n+1}^{(j)}(i)| \\ &- |\mathbf{e}_n^{(j)}(i)|). \end{aligned} \quad (11)$$

由上式容易看出,当满足

$$e^{\delta} |\mathbf{e}_{n+1}^{(j)}(i)| - |\mathbf{e}_n^{(j)}(i)| \leq 0, \quad (12)$$

则有

$$\Delta V \leq 0. \quad (13)$$

考虑到(8)式,由(12)式我们可以得到网络节点所满足的状态方程中分离配置的线性项的系数矩阵 \mathbf{A} 的取值范围

$$-e^{-\delta} \leq \mathbf{A} \leq e^{-\delta}. \quad (14)$$

显然,只要系数矩阵 \mathbf{A} 的取值范围满足(14)式,就可以使 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{e}_n^{(j)}(i) \rightarrow 0$, 网络的投影同步得以实现.

3. 激光时空混沌模型的实例分析

我们以 Bragg 声光双稳系统作为局域函数,单向耦合映像格子作为空间扩展系统构成的激光时空混沌模型为例进行仿真模拟,以此来验证上述投影同步原理的正确性.

Bragg 声光双稳系统由激光源、声光调制器、光电探测器、延迟器、放大器以及驱动器等构成,在长延迟情况下,系统的演化规律为^[19]

$$x_{n+1} = f(x_n) = \pi[r - \mu \sin^2(x_n - V_b)], \quad (15)$$

其中 x_n 为系统的状态变量, r 是与放大器偏压有关的参量, V_b 是与驱动器偏压有关的参量, μ 是与入射光强有关的参量. 我们以 μ 作为调控参量,其他参

量取 $r = 0.5$, $V_b = \frac{\pi}{4}$, 由 (15) 式得到系统的分岔图和 Lyapunov 指数如图 1 和图 2 所示. 可以看到, 系统经由倍周期分岔进入混沌.

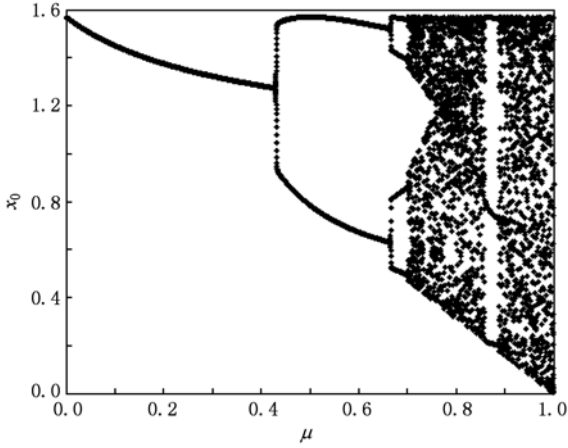


图1 系统(15)的分岔图

3 所示. 从图中可以看出, 耦合强度因子 $\varepsilon = 0.4$ 、调控参数 $\mu = 1.4$ 处的 Lyapunov 指数大于零, 表明激光时空混沌模型 (16) 处于时空混沌状态. 此时, 相对应的系统时空演化以及相图如图 4 和图 5 所示.

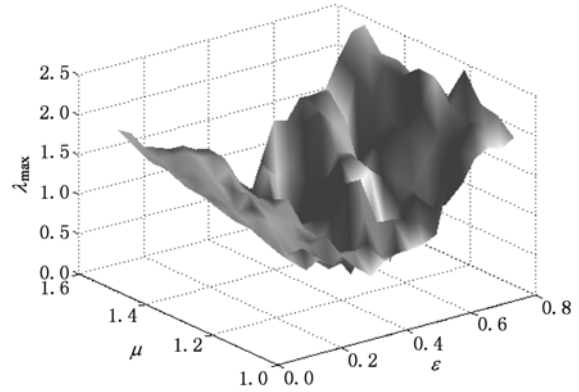


图3 最大 Lyapunov 指数随参量 ε 和 μ 的演化关系

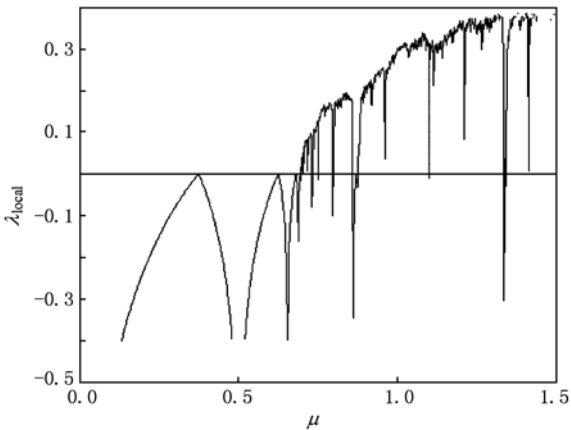


图2 系统(15)的最大 Lyapunov 指数

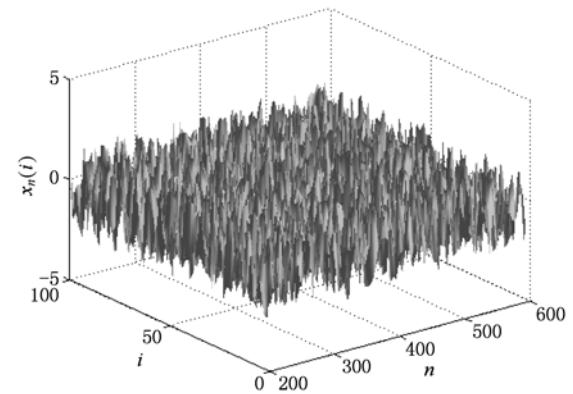


图4 激光时空混沌模型(16)的时空演化

取 Bragg 声光双稳系统 (15) 式作为局域函数 $f(x_n(i))$, 单向耦合映像格子^[20] 作为空间扩展系统构成激光时空混沌模型

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i) &= (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \varepsilon f(x_n(i - 1)) \\ &= (1 - \varepsilon)\pi[r - \mu\sin^2(x_n(i) - V_b)] \\ &\quad + \varepsilon\pi[r - \mu\sin^2(x_n(i - 1) - V_b)], \end{aligned} \quad (16)$$

其中 n 仍表示离散化的时间, i 为空间格点坐标 ($i = 1, 2, \dots, L$), L 为系统尺寸. ε 为系统空间格点间的耦合强度因子. 取系统尺寸 $L = 100$, 初始值 $x_0(i) = 0.3$, 激光时空混沌模型 (16) 的最大 Lyapunov 指数随调控参量 μ 以及耦合强度因子 ε 的演化关系如图

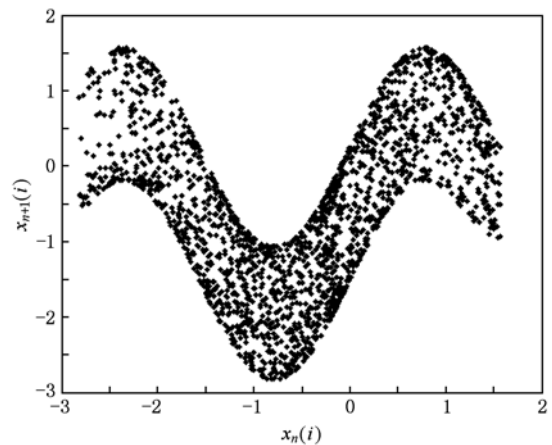


图5 激光时空混沌模型(16)的相图

取节点数 $N=5$, 单个节点的状态方程为(16)式所描述的激光时空混沌模型. 五个节点处的激光时空混沌模型状态变量分别为 $x_n^{(1)}(i), x_n^{(2)}(i), x_n^{(3)}(i), x_n^{(4)}(i), x_n^{(5)}(i)$, 按照(3)式的连接构成复杂网络.

仿真模拟网络的投影同步时, 网络中所有参数的取值均保持不变. 取调节参量 $\delta=1$, 根据(14)式, 网络节点所满足的状态方程中分离配置的线性项的系数矩阵 \mathbf{A} 的取值范围为 $-e^{-1} \leq \mathbf{A} \leq e^{-1}$. 在这个范围内, 我们任意选取 $\mathbf{A}=0.2$. 耦合函数

$S_1=0$, 其余耦合函数 $S_k (k=2, 3, 4)$ 的选取满足(7)式. 状态变量的初始值 $x_0^{(1)}(i)=0.1, x_0^{(2)}(i)=0.2, x_0^{(3)}(i)=0.3, x_0^{(4)}(i)=0.4, x_0^{(5)}(i)=0.5$. 任取网络节点之间耦合强度的相对权重为 $\xi_2=-1/2, \xi_3=-3/2, \xi_4=0.5, \xi_5=1$. 由(9)式可知, 这意味着投影同步的标度因子 $\alpha_1=2, \alpha_2=-1/3, \alpha_3=3, \alpha_4=-1/2$. 在第 300 s 时进行网络的耦合连接, 仿真模拟网络误差变量随时空的演化规律如图 6 至图 9 所示.

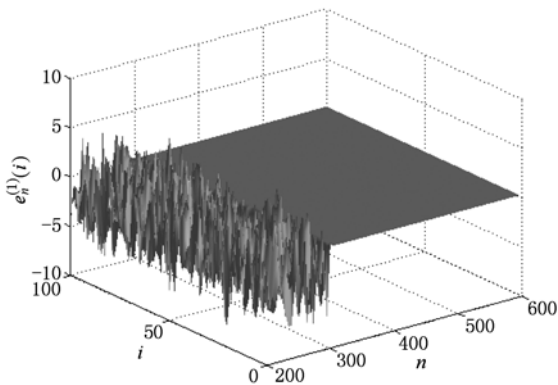


图 6 误差变量 $e_n^{(1)}(i)$ 的时空演化

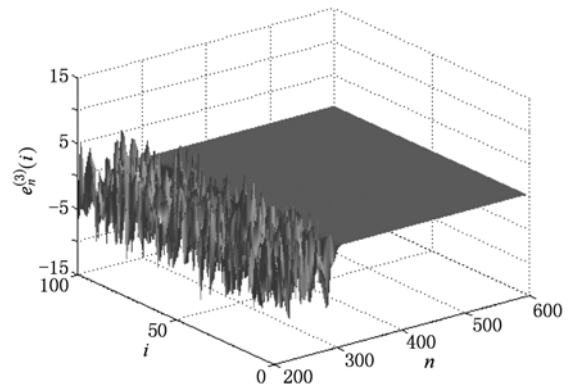


图 8 误差变量 $e_n^{(3)}(i)$ 的时空演化

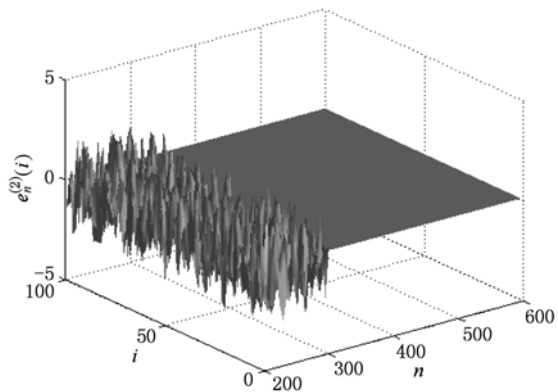


图 7 误差变量 $e_n^{(2)}(i)$ 的时空演化

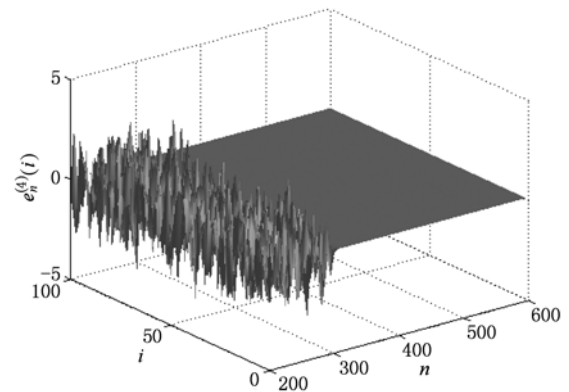


图 9 误差变量 $e_n^{(4)}(i)$ 的时空演化

图 6 至图 9 显示, 网络耦合连接后, 与五个节点的激光时空混沌模型状态变量相关的误差信号 $e_n^{(1)}(i) = x_n^{(1)}(i) + \alpha_1 x_n^{(2)}(i), e_n^{(2)}(i) = x_n^{(2)}(i) + \alpha_2 x_n^{(3)}(i), e_n^{(3)}(i) = x_n^{(3)}(i) + \alpha_3 x_n^{(4)}(i), e_n^{(4)}(i) = x_n^{(4)}(i) + \alpha_4 x_n^{(5)}(i)$ 均迅速地趋于零, 网络的投影同步得以实现. 这个投影同步的效果通过相对应的相图更能清晰地看到. 相图 10 显示网络达到投影同步后节点 2 状态变量的幅值是节点 1 的二分之一, 符号相反; 相

图 11 显示节点 3 状态变量的幅值是节点 2 的三倍, 符号相同; 相图 12 显示节点 4 状态变量的幅值是节点 3 的三分之一, 符号相反; 相图 13 显示节点 5 状态变量的幅值是节点 4 的两倍, 符号相同. 我们保持其他的参量数值以及上述仿真数据不变, 仅仅改变调节参量 δ 的数值, 发现只要 \mathbf{A} 的取值满足(14)式, 均可以实现整个网络的投影同步, 说明调节参量数值的变化对整个网络投影同步的稳定性无影响.

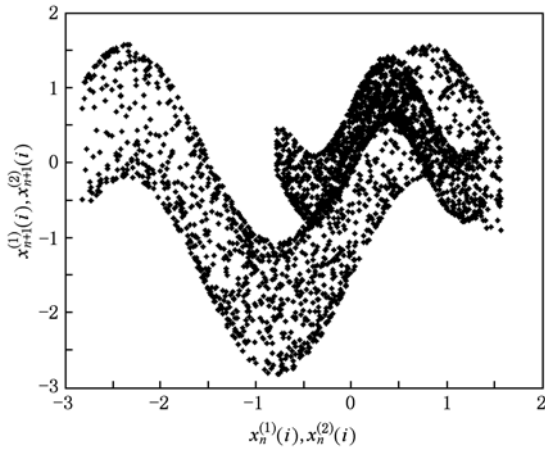


图 10 同步后节点 1 和 2 的相图

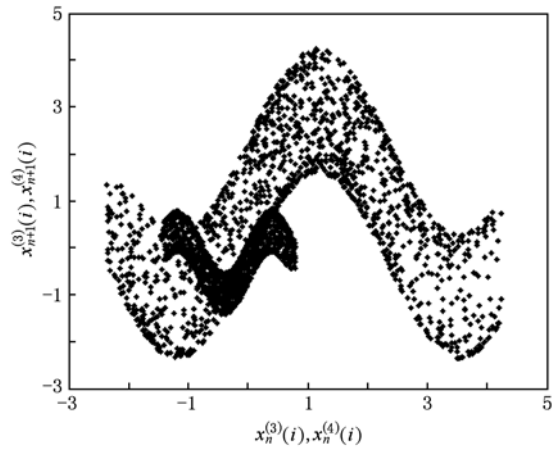


图 12 同步后节点 3 和 4 的相图

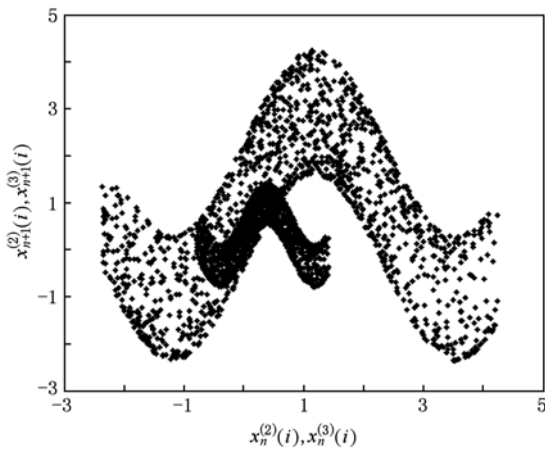


图 11 同步后节点 2 和 3 的相图

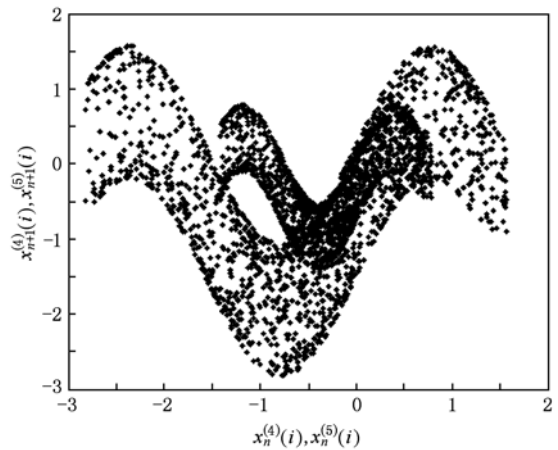


图 13 同步后节点 4 和 5 的相图

4. 结 论

提出了一种实现加权网络时空混沌投影同步的方法. 选取的同步对象是考虑到实际网络节点之间相互作用的强度存在差异, 即网络节点之间的耦合具有不同权重值的加权网络. 运用 Lyapunov 稳定性原理, 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了加权网络中连接节点之间的耦合函数 $S_j(\mathbf{x}_n^{(1)}(i))$,

$\mathbf{x}_n^{(2)}(i), \dots, \mathbf{x}_n^{(N)}(i)$ 的结构以及网络节点状态方程中分离配置的线性项的系数矩阵 \mathbf{A} 的取值范围. 选取 Bragg 声光双稳系统作为局域函数, 单向耦合映像格子作为空间扩展系统构成激光时空混沌模型. 采用激光时空混沌模型作为网络节点的加权网络进行仿真模拟, 验证投影同步原理的正确性. 结果表明, 在系数矩阵 \mathbf{A} 满足(14)式的条件下, 任取节点之间耦合强度的权重值, 均可以使整个加权网络实现投影同步.

[1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
 [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
 [3] Vázquez A, Pastor – Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 66130
 [4] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268

[5] Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 26118
 [6] Haken H 2005 *Physica D* **205** 1
 [7] Lü J H, Yu X H, Chen G R, Cheng D Z 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. -I* **51** 787

- [8] Lü L, Zhang C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1462 (in Chinese) [吕翎、张超 2009 物理学报 **58** 1462]
- [9] Agnes E J, Erichsen Jr R, Brunnet L G 2010 *Physica A* **389** 651
- [10] Lü J H, Chen G R 2005 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **50** 841
- [11] Zhou J, Lu J A, Lü J H 2006 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **51** 652
- [12] Li K, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1601
- [13] Jing X D, Lü L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7539 (in Chinese) [敬晓丹、吕翎 2009 物理学报 **58** 7539]
- [14] Ma X J, Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4426 (in Chinese) [马晓娟、王延、郑志刚 2009 物理学报 **58** 4426]
- [15] Posadas-Castillo C, Cruz-Hernández C, López-Gutiérrez R M 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1963
- [16] Zhou C S, Motter A E, Kurths J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 34101
- [17] Motter A E, Zhou C S, Kurths J 2005 *Europhys. Lett.* **69** 334
- [18] Wang W X, Chen G R 2008 *Phys. Rev. E* **77** 26201
- [19] Vallee R, Delisle C, Chrostowski J 1984 *Phys. Rev. A* **30** 336
- [20] Kaneko K 1985 *Phys. Lett. A* **111** 321

Projective synchronization of a weighted network in a laser spatiotemporal chaos model*

Lü Ling[†] Meng Le Guo Li Zou Jia-Rui Yang Ming

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 28 April 2010; revised manuscript received 27 June 2010)

Abstract

A method is introduced to realize spatiotemporal chaos projective synchronization for a weighted network. The coupling function between connected nodes of the weighted network is derived and the range of the linear coefficient matrix of separated configuration in state equation of the node is obtained through constructing an appropriate Lyapunov function. Each node of the weight network is a laser spatiotemporal chaos model in which Bragg acousto-optical bistable system and unilateral coupled map lattices are taken as the local function and the spatial extended system, respectively. The projective synchronization effect of the weighted network is checked by numerical emulation. The results show that projective synchronization can be realized even if the coupling strength between the nodes are given arbitrary weight values.

Keywords: projective synchronization, weighted network, spatiotemporal chaos, Bragg acousto-optical bistable system

PACS: 05.45.Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn