

非对易空间的三模谐振子能谱*

张秀兰^{1)†} 刘恒²⁾ 余海军¹⁾ 张文海¹⁾

1) (淮南师范学院物理与电子信息系, 淮南 232001)

2) (淮南师范学院数学与计算科学系, 淮南 232001)

(2010年7月22日收到; 2010年8月6日收到修改稿)

在非对易空间中,用不变本征算符方法(IEO),对非耦合、坐标耦合、动量耦合三种三模谐振子系统能谱进行求解,并将求解结果与一般对易空间的能谱进行比较分析.通过比较发现,当非对易参数为零时,所求能级差还原到了与普通空间相对应的一般量子系统哈密顿量能级差,验证了推导结果的正确性;同时讨论了耦合系数对非对易空间能谱的影响.

关键词: 不变本征算符, 非对易空间, 三模谐振子能谱, 能级差

PACS: 03.65.-w

1. 引言

目前,超弦理论的进展引起了人们对非对易空间量子力学的研究,在原子、分子尺度下,我们熟悉的空间是对易的^[1-9],但近年来发现,在弦尺度下出现了空间的非对易效应,由此引入了非对易空间量子理论^[10-19].在非对易空间的量子理论中,由于不同粒子的坐标算符之间、动量算符之间不对易性,导致算符之间不具有共同的本征态,因此系统能谱的求解^[16,17]比较复杂.如果使用不变本征算符方法(invariant eigen-operator, IEO),就无需涉及具体表象,能够直接对非对易空间中的系统能谱进行求解.目前,有人用IEO方法对非对易空间中哈密顿量的能谱进行了求解,但对此类问题的研究,都是基于坐标算符的非对易性($[x_i, x_j] = i\theta$)^[16-18],对于动量算符的非对易性($[p_x, p_y] = i\varphi$)考虑甚少.鉴于此,本文试探在非对易空间中同时考虑坐标算符之间、动量算符之间的非对易性,对量子系统的哈密顿量能谱进行求解.在具体求解过程中,用IEO方法,对非耦合、坐标耦合、动量耦合的三种不同的三模谐振子能谱进行求解,并将求解结果与一般空间的三模谐振子能谱进行比较分析.分析显示,当非对易参数 θ 和 φ 为零时,所求能级差还原到了与普通空间相对应的一般量子系统哈密顿量能级差,

验证了推导结果的正确性;坐标耦合系数 k 与动量耦合系数 s 对非对易空间系统能谱的影响具有相似性.

2. 基础理论

2.1. 不变本征算符(IEO)方法

在量子力学中,算符的本征方程为

$$i \frac{d}{dt} \hat{O} = [\hat{O}, H] = \lambda \hat{O}, \quad \hbar = 1. \quad (1)$$

满足本征方程(1)的算符 \hat{O} 称为系统的一个不变本征算符,用不变本征算符来求解系统能谱的方法为IEO方法.假设 $\{|\psi_a\rangle\}$ 是哈密顿量 \hat{H} 的本征态集合,且构成Hilbert空间的完备集. $|\psi_a\rangle$ 和 $|\psi_b\rangle$ 是两个不同的非简并本征态,对应的本征值分别为 E_a 和 E_b .根据(1)式有

$$\begin{aligned} \langle \psi_a | [\hat{O}, \hat{H}] | \psi_b \rangle &= (E_a - E_b) \langle \psi_a | \hat{O} | \psi_b \rangle \\ &= \lambda \langle \psi_a | \hat{O} | \psi_b \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

由于 \hat{O} 是非零算符,必然存在 $|\psi_a\rangle$ 和 $|\psi_b\rangle$ 使 $\langle \psi_a | \hat{O} | \psi_b \rangle \neq 0$,因此

$$\lambda = (E_a - E_b) = \Delta E. \quad (3)$$

值 λ 对应的是系统的能级差.用IEO方法,无需考

* 安徽省高校自然科学基金(批准号:KJ2010B204)资助的课题.

† E-mail: zhangxiulan666@sohu.com

考虑系统的具体量子态和波函数,可以直接对算法进行操作就可得系统的能谱.

2.2. 非对易空间中的 Moyal-Weyl 乘法

在非对易空间中,出现了空间的非对易效应,本文采用自然单位($\hbar = c = 1$),坐标 \bar{x} 和动量 \bar{p} 的非对易关系为

$$\begin{aligned} [\hat{x}_1, \hat{x}_2] &= i\theta_3, [\hat{x}_2, \hat{x}_3] = i\theta_1, [\hat{x}_1, \hat{x}_3] = i\theta_2, \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] &= i\varphi_3, [\hat{p}_2, \hat{p}_3] = i\varphi_2, [\hat{p}_1, \hat{p}_3] = i\varphi_1, \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}, (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

根据(4)式的对易关系,为使求解简化,可令: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$.

3. 三模谐振子能谱

3.1. 非耦合三模谐振子能谱

对非耦合三模谐振子,其哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2), \quad (5)$$

为了运用 IEO 方法,运用对易关系式(4),首先计算如下对易关系:

$$[\hat{x}_1, \hat{H}_1] = i\theta\hat{x}_2 - i\theta\hat{x}_3 + i\hat{p}_1,$$

$$\begin{aligned} [\hat{x}_2, \hat{H}_1] &= -i\theta\hat{x}_1 + i\theta\hat{x}_3 + i\hat{p}_2, \\ [\hat{x}_3, \hat{H}_1] &= i\theta\hat{x}_1 - i\theta\hat{x}_2 + i\hat{p}_3, \\ [\hat{p}_1, \hat{H}_1] &= -i\hat{x}_1 + i\varphi\hat{p}_2 - i\varphi\hat{p}_3, \\ [\hat{p}_2, \hat{H}_1] &= -i\hat{x}_2 + i\varphi\hat{p}_3 - i\varphi\hat{p}_1, \\ [\hat{p}_3, \hat{H}_1] &= -i\hat{x}_3 + i\varphi\hat{p}_1 - i\varphi\hat{p}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

可以看到算符集合 $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$ 在和 \hat{H} 的对易运算下是封闭的,于是可以假设不变本征算符为

$$\hat{O} = \alpha\hat{x}_1 + \beta\hat{x}_2 + \gamma\hat{x}_3 + \delta\hat{p}_1 + \varepsilon\hat{p}_2 + \zeta\hat{p}_3, \quad (7)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ 为待定的系数,使得算符 \hat{O} 满足本征方程

$$[\hat{O}, \hat{H}_1] = \lambda_1 O. \quad (8)$$

可以得到矩阵本征方程的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & i\theta & -i\theta & i & 0 & 0 \\ -i\theta & \lambda_1 & i\theta & 0 & i & 0 \\ i\theta & -i\theta & \lambda_1 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & \lambda_1 & i\varphi & -i\varphi \\ 0 & -i & 0 & -i\varphi & \lambda_1 & i\varphi \\ 0 & 0 & -i & i\varphi & -i\varphi & \lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

解此行列式,得

$$\lambda_1 = \Delta E = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 6\theta^2 + 6\varphi^2 \pm 2(\theta + \varphi) \sqrt{3(3(\theta - \varphi)^2 + 4)}}. \quad (10)$$

(10)式反映了非对易参数 θ 和 φ 对非对易空间量子力学模型哈密顿量能谱的影响.当 $\theta \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$ 时,能级差 $\Delta DE = 1$,可以理解为非对易空间量子系统退化为一般的量子系统.

3.2. 坐标耦合的三模谐振子能谱

对坐标耦合三模谐振子,其哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 &= \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2) \\ &+ k(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_2\hat{x}_3 + \hat{x}_3\hat{x}_1). \end{aligned} \quad (11)$$

为了运用 IEO 方法,运用对易关系式(4),首先计算如下对易关系:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_1, \hat{H}_2] &= i\hat{p}_1 + i\theta\hat{x}_2 - i\theta\hat{x}_3 - ki\theta\hat{x}_2 + ki\theta\hat{x}_3, \\ [\hat{x}_2, \hat{H}_2] &= i\hat{p}_2 - i\theta\hat{x}_1 + i\theta\hat{x}_3 + ki\theta\hat{x}_1 - ki\theta\hat{x}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{x}_3, \hat{H}_2] &= i\hat{p}_3 + i\theta\hat{x}_1 - i\theta\hat{x}_2 - ki\theta\hat{x}_1 + ki\theta\hat{x}_2 \\ [\hat{p}_1, \hat{H}_2] &= i\varphi\hat{p}_2 - i\varphi\hat{p}_3 - i\hat{x}_1 - ik\hat{x}_2 - ik\hat{x}_3, \\ [\hat{p}_2, \hat{H}_2] &= i\varphi\hat{p}_3 - i\varphi\hat{p}_1 - i\hat{x}_2 - ik\hat{x}_1 - ik\hat{x}_3, \\ [\hat{p}_3, \hat{H}_2] &= i\varphi\hat{p}_1 - i\varphi\hat{p}_2 - i\hat{x}_3 - ik\hat{x}_1 - ik\hat{x}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

同样可以看出,算符集合 $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$ 在和 \hat{H} 的对易运算下是封闭的.这样我们可以假设不变本征算符为

$$\hat{O} = \alpha\hat{x}_1 + \beta\hat{x}_2 + \gamma\hat{x}_3 + \delta\hat{p}_1 + \varepsilon\hat{p}_2 + \zeta\hat{p}_3, \quad (13)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ 为待定的系数.使得算符 \hat{O} 满足本征方程

$$[\hat{O}, \hat{H}_2] = \lambda_2 \hat{O}. \quad (14)$$

得到矩阵本征方程的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & i\theta(1-k) & -i\theta(1-k) & i & 0 & 0 \\ -i\theta(1-k) & \lambda_2 & i\theta(1-k) & 0 & i & 0 \\ i\theta(1-k) & -i\theta(1-k) & \lambda_2 & 0 & 0 & i \\ -i & -ik & -ik & \lambda_2 & i\varphi & -i\varphi \\ -ik & -i & -ik & -i\varphi & \lambda_2 & i\varphi \\ -ik & -ik & -i & i\varphi & -i\varphi & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

解此行列式,有

$$\lambda_2 = \Delta E$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4(1-k) + 6(k-1)^2\theta^2 + 6\varphi^2 \pm 2(\theta k - \theta - \varphi) \sqrt{3(3(k-1)^2\theta^2 + (6\theta\varphi - 4)(k-1) + 3\varphi^2)}}. \quad (16)$$

从上述解可以看出,参数 θ 和 φ 对非对易量子力学模型哈密顿量能谱影响很显著,当 $\theta \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$ 的时候,此解就变为

$$\lambda_2 = \Delta E = \sqrt{1-k}, \quad (17)$$

也就是一般的量子力学模型哈密顿量的能级差.除此之外,行列式(15)还存在解

$$\lambda_2 = \Delta E = \sqrt{1+2k}. \quad (18)$$

这种情况下参数 θ 和 φ 并没有对非对易量子力学模型哈密顿量能谱产生任何影响.

3.3. 动量耦合的三模谐振子能谱

对动量耦合三模谐振子,其哈密顿量为

$$\hat{H}_3 = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2) + s(\hat{p}_1\hat{p}_2 + \hat{p}_2\hat{p}_3 + \hat{p}_3\hat{p}_1). \quad (19)$$

为了运用 IEO 方法,运用对易关系式(4),首先计算如下对易关系:

$$[\hat{x}_1, \hat{H}_3] = i\theta\hat{x}_2 - i\theta\hat{x}_3 + i\hat{p}_1 + is\hat{p}_2 + is\hat{p}_3,$$

$$[\hat{x}_2, \hat{H}_3] = -i\theta\hat{x}_1 + i\theta\hat{x}_3 + i\hat{p}_2 + is\hat{p}_1 + is\hat{p}_3,$$

$$[\hat{x}_3, \hat{H}_3] = i\theta\hat{x}_1 - i\theta\hat{x}_2 + i\hat{p}_3 + is\hat{p}_1 + is\hat{p}_2,$$

$$[\hat{p}_1, \hat{H}_3] = -i\hat{x}_1 + i\varphi\hat{p}_2 - i\varphi\hat{p}_3 - is\varphi\hat{p}_2 + is\varphi\hat{p}_3,$$

$$[\hat{p}_2, \hat{H}_3] = -i\hat{x}_2 - i\varphi\hat{p}_1 + i\varphi\hat{p}_3 + is\varphi\hat{p}_1 - is\varphi\hat{p}_3,$$

$$[\hat{p}_3, \hat{H}_3] = -i\hat{x}_3 - i\varphi\hat{p}_2 + i\varphi\hat{p}_1 - is\varphi\hat{p}_1 + is\varphi\hat{p}_2. \quad (20)$$

同样可以看出,算符集合 $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$ 在和 \hat{H} 的对易下保持封闭性.可以构造不变本征算符为

$$\hat{O} = \alpha\hat{x}_1 + \beta\hat{x}_2 + \gamma\hat{x}_3 + \delta\hat{p}_1 + \varepsilon\hat{p}_2 + \zeta\hat{p}_3, \quad (21)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ 为待定的系数.使得算符 \hat{O} 满足本征方程

$$[\hat{O}, \hat{H}_3] = \lambda_3\hat{O}, \quad (22)$$

此时矩阵本征方程的行列式为

$$\begin{vmatrix} \lambda_3 & i\theta & -i\theta & i & is & is \\ -i\theta & \lambda_3 & i\theta & is & i & is \\ i\theta & -i\theta & \lambda_3 & is & is & i \\ -i & 0 & 0 & \lambda_3 & i(1-s)\varphi & -i(1-s)\varphi \\ 0 & -i & 0 & -i(1-s)\varphi & \lambda_3 & i(1-s)\varphi \\ 0 & 0 & -i & i(1-s)\varphi & -i(1-s)\varphi & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

解此行列式得

$$\lambda_3 = \Delta E$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4(1-s) + 6\varphi^2(s-1)^2 + 6\theta^2 \pm 2(s\varphi - \varphi - \theta) \sqrt{3(3\varphi^2(1-s)^2 + (6\varphi\theta - 4)(s-1) + 3\theta^2)}}. \quad (24)$$

这个结果反映了非对易参数 θ 和 φ 对非对易量子力学哈密顿模型能谱的影响. 当 $\theta \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$ 的时候, (23) 式的解就变为

$$\lambda_3 = \Delta E = \sqrt{1-s}, \quad (25)$$

也是一般的量子力学模型哈密顿量的能级差. 除此之外, (23) 式还存在解

$$\lambda_3 = \Delta E = \sqrt{1+2s}. \quad (26)$$

这种情况下 θ 和 φ 没有对非对易量子力学模型哈密顿量产生影响.

4. 结 论

在量子力学中, 对于非对易空间系统能级的求解, 首先需要构造合适的表象, 把哈密顿量中的非对易算符用普通的算符来表示, 最终把问题归结到可以求解的系统. 虽然人们对此做了一些工作, 也找到了一些合适的表象求解非对易空间系统, 但是要每个问题都找到合适的表象, 并不是一件容易

的事, 而 IEO 方法, 无需涉及具体表象, 就可以对非对易空间系统进行求解. 本文用 IEO 方法, 在同时考虑坐标算符之间、动量算符之间非对易性的情况下, 对非耦合的、坐标与坐标耦合、动量与动量耦合的三模谐振子系统能级差进行了求解, 从求解结果可以看出, 1) 坐标的非对易参数 θ 和动量的非对易参数 φ 对非对易量子力学模型哈密顿能谱的影响很显著; 对易耦合的三模谐振子系统也存在非对易参数对能谱没有产生影响的解. 2) 对于耦合系统, 坐标耦合系数 k 和动量耦合系数 s 对量子力学模型的哈密顿能谱影响非常类似. 3) 当非对易参数 $\theta \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$ 时, 所求能级差还原到了一般的量子力学模型的哈密顿量能级差, 验证了推导结果的正确性. 4) 存在的不全面性: 如果对既有坐标耦合又有动量耦合的系统求解, 分析坐标耦合系数与动量耦合系数及非对易参数对量子力学模型哈密顿能谱的影响, 就会使分析更全面, 对非对易性空间的理解更深入, 这也是我们继续研究的方向.

- [1] Deng F G, Li X H, Li C Y, Zhou P, Zhou H Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 0277
- [2] Wang Z Y, Xiong C D 2008 *Chin. Phys.* **B 17** 4170
- [3] Wang Z Y, Xiong C D, He B 2008 *Chin. Phys.* **B 17** 3985
- [4] Lu Z X 2007 *Chin. Phys.* **16** 0635
- [5] Lu G Y, Pan F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1895 (in Chinese) [鲁国英、潘峰 2007 物理学报 **56** 1895]
- [6] Wang Z Y, Xiong C D 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3070 (in Chinese) [王智勇、熊彩东 2007 物理学报 **56** 3070]
- [7] Tian J, Qiu H B, Chen Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3763 (in Chinese) [田静、邱海波、陈勇 2010 物理学报 **59** 3736]
- [8] Chen Z J, Ning X J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2683 (in Chinese) [陈增军、宁西京 2003 物理学报 **52** 2683]
- [9] Huang B W, Wang D Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1163 (in Chinese) [黄博文、王德云 2002 物理学报 **51** 1163]
- [10] Muthukumar B, Mitra P 2002 *Phys. Rev. D* **66** 027701
- [11] Szabo R J 2003 *Phys. Rep.* **378** 207
- [12] Douglas M R, Nekrasov M A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 977
- [13] WU H 2008 *Ph. D. Dissertation* (Hefei: University of Science and Technology of China) p60—69 (in Chinese) [吴昊 2008 博士学位论文(合肥: 中国科学技术大学)第60—69页]
- [14] Lerbfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [15] Fan H Y, Klauder J R 1994 *Phys. Rev. A* **49** 704
- [16] Jing S C, Liu Q Y, Fan H Y 2005 *J. Phys. A* **38** 8409
- [17] Fan H Y, Tang X B, Wang T T 2007 *Comm. Theor. Phys.* **48** 633
- [18] Jing S C, Fan H Y 2005 *Modern Physics Letters A* **20** 691
- [19] Fang H Y 2008 *Advance in Mathematical Basis of Quantum Mechanics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) p313—351 (in Chinese) [范洪义 2008 量子力学数理基础进展(合肥: 中国科学技术大学出版社)第313—351]

Hamiltonian spectrum for three coupled harmonic oscillators in non-commutative space *

Zhang Xiu-Lan^{1)†} Liu Heng²⁾ Yu Hai-Jun¹⁾ Zhang Wen-Hai¹⁾

1) (*Department of Physics and Electronic Information, Huainan Normal University, Huainan 232001, China*)

2) (*Department of Mathematics and Computer Science, Huainan Normal University, Huainan 232001, China*)

(Received 22 July 2010; revised manuscript received 6 August 2010)

Abstract

In non-commutative spaces the invariant eigen-operator method is used to derive and calculate Hamiltonian spectra for three kinds of three coupled harmonic oscillators; no coupling, coordinate coupling and momentum coupling. According to the comparison with the results in commutative space, it is shown that when the non-commutative parameter is zero the obtained energy levels are equal to the energy levels in commutative space. Finally the effect of the coupling coefficient on Hamiltonian spectrum in non-commutative space is discussed.

Keywords: invariant eigen-operator method, non-commutation spaces, Hamiltonian spectrum for three coupled harmonic oscillators, the energy levels

PACS: 03.65.-w

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Higher Education Institutions of Anhui Province, China (Grant No. KJ2010B204).

† E-mail: zhangxiulan666@sohu.com