经典物理中的扰动时滞模型解*

汪 娜† 倪明康

(华东师范大学数学系,上海 200062)

(2010 年 8 月 5 日收到;2010 年 8 月 23 日收到修改稿)

利用边界层函数法研究了一类经典物理中的扰动时滞模型. 构造了模型解的渐近表达式, 并讨论了它的渐近性态.

关键词: 经典物理,扰动,近似解

PACS: 02.30.Ks, 02.30.Mv, 02.60.Lj

1. 引 言

非线性时滞问题是国际物理学术界一个十分关注的研究课题. 在物理科学的许多方面,例如凝聚态物理、流体力学、天体物理、大气物理[1—7]、弹性理论、聚合物液流学[8]等领域都有着很广泛的应用. 为求得非线性问题的渐近解, 在过去的十多年中, 许多近似方法得到了改进和发展, 其中包括平均化方法, 边界层理论[9], 渐近匹配展开法[10], 以及多尺度方法. 许多学者对此类问题做了大量的研究. 利用微分不等式和其他方法, 学者们考虑了一类非线性奇摄动问题[11—13]、孤波[14—21]、激光脉冲[22—24]、大气物理、催化控制系统[25]、反应扩散方程[26—28]、电讯通信[29]等问题. 本文利用奇摄动方法研究一类非线性扰动时滞模型.

考虑如下非线性扰动初边值问题:

$$\begin{aligned}\mu y'' &= A(y(t),y(t-\sigma),t)y' \\ &\quad + B(y(t),t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad -\sigma \leqslant t \leqslant 0,\ y(T) = y^T,\end{aligned} \tag{1}$$

其中 μ 和 σ 是两个正小参数, $0 < \mu \leqslant 1$, A,B,φ 关于各变量在相应的定义域中充分光滑, $\sigma \leqslant T \leqslant 2\sigma$ 是某个正数. 当 $\sigma = 0$ 时, 上述方程退化为奇摄动常微分方程(只含有一个参数的问题). 首先给出如下假设:

函数 A,B 在 $D = \{(y,t) \mid |y| \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上无限次可微, $A(y(t),y(t-\sigma),t) < 0$, $-l \leqslant y \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 这里 l 是给定的某个正数.

并设退化方程左端初值问题

$$A(\bar{y}(t),\varphi(t-\sigma),t)\bar{y}' + B(\bar{y}(t),t) = 0,$$
$$\bar{y}(0) = y^*,$$

在 $0 \leqslant t \leqslant \sigma$ 上存在唯一解 $\bar{y}(t) = \alpha(t)$; 退化方程右端边值问题

$$A(\bar{\bar{y}}(t),\alpha(t-\sigma),t)\bar{\bar{y}}' + B(\bar{\bar{y}}(t),t) = 0,$$
$$\bar{\bar{y}}(0) = y^T,$$

在 $\sigma \leqslant t \leqslant T$ 上存在唯一解 $\bar{\bar{y}}(t) = \beta(t)$. 这里 $\bar{y}(0) = y^*$ 待定. 由假设, 原问题的解在区间 $[0,\sigma]$ 和 $[\sigma,T]$ 上分别只出现左边界层.

问题(1)是一个具有两个小参数的奇摄动问题. 两参数问题在许多物理问题,诸如空气动力学、反应扩散、非线性波、大气物理、海洋科学、热传导等方面都有着很强的应用背景. 一般地,此类非线性问题很难求出其精确解,所以我们转而去求问题稳定的渐近解,本文旨在构造模型的渐近解,并分析其渐近性态.

2. 在区间 $[0,\sigma]$ 上的外部解和其边界层零次校正项

首先, 我们将原问题化成等价的方程组

---

* 国家自然科学基金(批准号:11071075),上海市自然科学基金(批准号:10ZR1409200),上海市重点学科建设项目(批准号:B407)和生物大分子国家重点实验室资助的课题.

† E-mail: wangna1629@yahoo.cm.cn

$$\mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=A(y(t),y(t-\sigma),t)z+B(y(t),t),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z,\quad 0\leqslant t\leqslant\sigma,$$
$$y(t,\mu)=\varphi(t),\ -\sigma\leqslant t\leqslant 0,\ y(\sigma,\mu)=\alpha(\sigma).\tag{2}$$

具有边界层的解 $y(t,\mu)$ 可以看作是下面两个左右问题的纯边界层解 $y^{(\mp)}(t,\mu)$ 在 σ 处光滑连接而成.

左问题

$$\mu\frac{\mathrm{d}z^{(-)}}{\mathrm{d}t}=A(y^{(-)},\varphi(t-\sigma),t)z^{(-)}+B(y^{(-)},t),\frac{\mathrm{d}y^{(-)}}{\mathrm{d}t}=z^{(-)},\tag{3}$$
$$y(0,\mu)=\varphi(0),y^{(-)}(\sigma,\mu)=\alpha(\sigma).$$

右问题

$$\mu\frac{\mathrm{d}z^{(+)}}{\mathrm{d}t}=A(y^{(+)},y^{(-)}(t-\sigma),t)z^{(+)}+B(y^{(+)},t),\frac{\mathrm{d}y^{(+)}}{\mathrm{d}t}=z^{(+)},\tag{4}$$
$$y(T,\mu)=y^{T},y^{(+)}(\sigma,\mu)=\alpha(\sigma).$$

其中 $\bar{y}(0,\mu)=p_0+\mu p_1+\cdots+\mu^k p_k+\cdots,p_k(k\geqslant 0)$ 待定. 记 $x=(y,z)^T$, 我们构造左右问题的渐近解分别为

$$x^{(-)}(t,\mu)=\bar{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau_0,\mu),\tag{5}$$
$$x^{(+)}(t,\mu)=\bar{\bar{x}}(t,\mu)+Qx(\tau_1,\mu),\tag{6}$$

其中 $\tau_0=\dfrac{t}{\mu},\tau_1=\dfrac{t-\sigma}{\mu},\bar{x},\bar{\bar{x}},\Pi x$ 和 Qx 分别是区间 $[0,\sigma]$ 和 $[\sigma,T]$ 上渐近解的正则部分和边界层部分, 它们是下面形式的幂级数,

$$\bar{x}(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\bar{x}_k(t),\ \bar{\bar{x}}(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\bar{\bar{x}}_k(t),$$
$$\Pi y(\tau_0,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k y(\tau_0),$$
$$\Pi z(\tau_0,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k\Pi_k z(\tau_0),$$
$$Qy(\tau_1,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k Q_k y(\tau_1),$$
$$Qz(\tau_1,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k Q_k z(\tau_1).$$

为了使左右问题的解在 σ 处光滑连接, 必须要求

$$y^{(-)}(\sigma,\mu)=y^{(+)}(\sigma,\mu),$$
$$\frac{\mathrm{d}y^{(-)}}{\mathrm{d}t}(\sigma+0,\mu)=\frac{\mathrm{d}y^{(+)}}{\mathrm{d}t}(\sigma-0,\mu).\tag{7}$$

同时由边界条件可得

$$\bar{y}_0(0)=y^{*}=p_0,\ \bar{y}_k(0)=p_k,$$
$$\bar{\bar{y}}_0(T)=y^{T},\ \bar{\bar{y}}_k(T)=0,\ k\geqslant 1,$$
$$\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(0)=\varphi(0),$$
$$\bar{y}_k(0)+\Pi_k y(0)=0,\ k\geqslant 1,$$
$$\bar{y}_0(\sigma)=\bar{\bar{y}}_0(\sigma)+Q_0 y(0),$$
$$\bar{y}_k(\sigma)=\bar{\bar{y}}_k(\sigma)+Q_k y(0).\tag{8}$$

将(5)代入左问题, 按尺度 t 和 τ_0 进行变量分离, 写出渐近解正则级数的方程为

$$0=A(\bar{y}_0(t),\varphi(t-\sigma),t)\bar{z}_0+B(\bar{y}_0(t),t),$$
$$\bar{y}_0'=\bar{z}_0,\tag{9}$$

和

$$\bar{z}_{k-1}'=A(\bar{y}_0(t),\varphi(t-\sigma),t)\bar{z}_k+\bar{g}_{k-1}\bar{y}_k+\bar{h}_{k-1},$$
$$\bar{y}'_k=\bar{z}_k,\tag{10}$$

$\bar{g}_{k-1},\bar{h}_{k-1}$ 是仅依赖于 $\bar{x}_j(t)$ ($0\leqslant j\leqslant k-1$) 和 t 的已知函数. 而确定 $\bar{x}_k(t)(k\geqslant 1)$ 的问题(10)都是线性的, 因此 $\bar{x}_k(t)$ 的表达式可以唯一确定.

对于区间 $[0,\sigma]$ 上边界层部分, 写出确定零次近似 $\{\Pi_{-1}z,\Pi_0 y\}$ 的方程和定解条件

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_{-1}z}{\mathrm{d}\tau_0}=A(\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y,\varphi(-\sigma),0)\Pi_{-1}z,\ \frac{\mathrm{d}\Pi_0 y}{\mathrm{d}\tau_0}=\Pi_{-1}z,$$
$$\Pi_0 y(0)=\varphi(0)-\bar{y}_0(0),\Pi_0 y(+\infty)=0.\tag{11}$$

作变量替换: $\tilde{y}(\tau_0)=\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau_0)$, $\tilde{z}(\tau_0)=\Pi_{-1}z(\tau_0)$, 则(11)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tau_0}=A(\tilde{y},\varphi(-\sigma),0)\tilde{z},\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0}=\tilde{z},$$
$$\tilde{y}(0)=\varphi(0),\tilde{y}(+\infty)=\bar{y}_0(0).\tag{12}$$

由(12)可得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0}=\int_{\bar{y}_0(0)}^{\tilde{y}}A(y,\varphi(-\sigma),0)\mathrm{d}y.\tag{13}$$

这样就得到了确定 $\tilde{y}$ 的方程和初始条件. 由假设知方程(12),(13)有解. 于是 $\Pi_0 y=\tilde{y}-\bar{y}_0(0)$, 但是这里求得的解 $\{\Pi_{-1}z,\Pi_0 y\}$ 与未知量 y^{*} 有关.

3. 在 $[\sigma,T]$ 上的外部解和其边界层零次校正项

考虑正则部分, 把(6)代入右问题中, 比较两

端关于 μ 的同次幂系数，可得

$$0 = A(\bar{\bar{y}}_0(t),\alpha(t-\sigma),t)\,\bar{\bar{z}}_0 + B(\bar{\bar{y}}_0(t),t),$$
$$\bar{\bar{y}}'_0 = \bar{\bar{z}}_0,$$
$$\bar{\bar{z}}'_{k-1} = A(\bar{\bar{y}}_0(t),\alpha(t-\sigma),t)\,\bar{\bar{z}}_k + \bar{\bar{g}}_{k-1}\,\bar{\bar{y}}_k + \bar{\bar{h}}_{k-1},\ \bar{\bar{y}}'_k = \bar{\bar{z}}_k, \tag{14}$$

其中 $\bar{\bar{g}}_{k-1}$, $\bar{\bar{h}}_{k-1}$ 是仅依赖于 $\bar{\bar{x}}_j(t)\,(0\leqslant j\leqslant k-1)$ 和 t 的已知函数. 由假设知 $\bar{\bar{y}}_0(t) = \beta(t)$, $\bar{\bar{z}}_0(t) = \beta'(t)$. 而(14)式是关于 $\bar{\bar{x}}_k(t)\,(k\geqslant 1)$ 的线性方程，它的表达式可以唯一确定.

对于边界层部分，将(6)式代入右问题，分别按尺度 t 和 τ_1 进行变量分离，写出确定零次近似 $\{Q_{-1}z, Q_0y\}$ 的方程和定解条件

$$\frac{\mathrm{d}Q_{-1}z}{\mathrm{d}\tau_1} = A(\beta(\sigma) + Q_0y, y^* + \Pi_0y,\sigma)Q_{-1}z,$$
$$\frac{\mathrm{d}Q_0y}{\mathrm{d}\tau_1} = Q_{-1}z,$$
$$Q_0y(0) = \alpha(\sigma) - \beta(\sigma), Q_0y(+\infty) = 0. \tag{15}$$

作变量替换

$\hat{y}(\tau_1) = \beta(0) + Q_0y(\tau_1), \hat{z}(\tau_1) = Q_{-1}z(\tau_1)$,

则(15)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{z}}{\mathrm{d}\tau_1} = A(\hat{y}, y^* + \Pi_0y,\sigma)\hat{z},\ \frac{\mathrm{d}\,\hat{y}}{\mathrm{d}\tau_1} = \hat{z},$$
$$\hat{y}(0) = \alpha(\sigma),\ \hat{y}(+\infty) = \beta(\sigma). \tag{16}$$

与区间 $[0,\sigma]$ 上确定边界层零次近似的方法相似，由(16)式可得

$$\hat{z}(\tau_1) = \int_{\beta(\sigma)}^{\hat{y}} A(y, y^* + \Pi_0y,\sigma)\,\mathrm{d}y. \tag{17}$$

写出确定 $\hat{y}$ 的方程和边值条件

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\tau_1} = \int_{\beta(\sigma)}^{\hat{y}} A(y, y^* + \Pi_0y,\sigma)\,\mathrm{d}y,$$
$$\hat{y}(0) = \alpha(\sigma). \tag{18}$$

由假设知方程(16)有解. 于是 $Q_0y = \hat{y} - \beta(\sigma)$，这样问题(16)就存在唯一解 $\{Q_{-1}z, Q_0y\}$，但是这里求得的解与参数 p_0 有关.

下面我们将利用光滑连接条件求得 p_0. 由(7)式可得

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1}Q_0y(0),\ \alpha'(\sigma) = \beta'(\sigma) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1}Q_1y(0),$$
$$\bar{y}'_{k-1}(\sigma) = \bar{\bar{y}}'_{k-1}(\sigma) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1}Q_ky(0),\ k\geqslant 2. \tag{19}$$

将零次光滑性条件代入(17)式，得到确定 p_0 的方程

$$\int_{\beta(\sigma)}^{\alpha(\sigma)} A(y, y^* + \Pi_0y,\sigma)\,\mathrm{d}y = 0.$$

若 $\alpha(\sigma) = \beta(\sigma)$ 则上面等式成立. 由于 y^* 未知，因此退化方程中解出的 $\bar{y}_0(t), \bar{\bar{y}}_0(t)$ 都含有未知量 y^*，不妨设 $\bar{y}_0(t) = f_1(y^*,\varphi(t-\sigma),t)$, $\bar{\bar{y}}_0(t) = f_2(y^T,\alpha(t-\sigma),t)$，因为在 $t=\sigma$ 处 $\bar{y}_0(\sigma) = \bar{\bar{y}}_0(\sigma)$，所以由 $f_1(y^*,\varphi(0),\sigma) = f_2(y^T, y^*,\sigma)$ 可解得 y^*. 再将 y^* 代入左右问题的正则部分和边界层项，则区间 $[0,\sigma]$ 和 $[\sigma,T]$ 上的正则项和边界层零次校正项就都确定了.

4. 在区间 $[0,\sigma]$ 和 $[\sigma,T]$ 上的边界层 $k(k\geqslant 1)$ 次校正项

首先写出左问题确定边界层一次近似 $\{\Pi_0z, \Pi_1y\}$ 的方程和边值条件

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_0z = {} & \tilde{A}\,\Pi_0z + \{\tilde{A}_y[\alpha'(0)\tau_0 + \bar{y}_1(0) + \Pi_1y] + \\ & \tilde{A}_\varphi\alpha'(-\sigma)\tau_0 + \tilde{A}_t\tau_0\}\Pi_{-1}z \\ & + (\tilde{A} - \bar{A})\bar{z}_0(\sigma) + B(\tilde{y},\sigma) \\ & - B(\alpha(0),\sigma),\end{aligned}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_1y = \Pi_0z,$$
$$\Pi_1y(0) = -\bar{y}_1(0), \Pi_1y(+\infty) = 0, \tag{20}$$

其中“~”和“-”分别表示在点 $(\tilde{y},\alpha(-\sigma),0)$ 和点 $(\alpha(0),\alpha(-\sigma),0)$ 处取值. 记

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1(\tau_0) = {} & \{\tilde{A}_y[\alpha'(0)\tau_0 + \bar{y}_1(0)] \\ & + \tilde{A}_\varphi\alpha'(-\sigma)\tau_0 + \tilde{A}_t\tau_0\}\Pi_{-1}z \\ & + (\tilde{A} - \bar{A})\bar{z}_0(\sigma) + B(\tilde{y},\sigma) \\ & - B(\alpha(0),\sigma),\end{aligned}$$

$\tilde{g}_1$ 是与 Π_0z, Π_1y 和 p_1 无关的函数. (20)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}\Pi_0z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0}(\tilde{A}\,\Pi_1y) + \tilde{g}_1(\tau_0).$$

两边积分后，将求得的 $\Pi_0z(0)$ 代入(20)式，即可确定 $\{\Pi_0z, \Pi_1y\}$.

再写出右问题确定边界层一次近似 $\{Q_0z, Q_1y\}$ 的方程和边值条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1}Q_0 z = \hat{A}Q_0 z + \{\hat{A}_y[\beta'(\sigma)\tau_1 + \bar{\bar{y}}_1(\sigma) + Q_1 y] + \hat{A}_\varphi[\alpha'(0)\tau_1 + \bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(\tau_1)] + \hat{A}_t\tau_1\}Q_{-1}z + (\hat{A} - \bar{\bar{A}})\beta'(\sigma) + B(\hat{y},\sigma) - B(\beta(\sigma),\sigma),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1}Q_1 y = Q_0 z,$$

$$Q_1 y(0) = \bar{y}_1(\sigma) - \bar{\bar{y}}_1(\sigma), Q_1 y(+\infty) = 0, \tag{21}$$

其中“^”和“=”分别表示在点 $(\hat{y},\tilde{y},\sigma)$ 和点 $(\beta(\sigma),\alpha(0),\sigma)$ 处取值. 记

$$\hat{g}_1(\tau_1) = \{\tilde{A}_y[\beta'(\sigma)\tau_1 + \bar{\bar{y}}_1(\sigma)] + \hat{A}_\varphi[\alpha'(0)\tau_1 + \bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(\tau_1)] + \tilde{A}_t\tau_0\}Q_{-1}z + (\hat{A} - \bar{\bar{A}})\beta'(\sigma) + B(\hat{y},\sigma) - B(\beta(\sigma),\sigma).$$

同样的方法可得到

$$Q_0 z(0) = A(\beta(\sigma),\varphi(0),\sigma)(\bar{y}_1(\sigma) - \bar{\bar{y}}_1(\sigma)) + \int_{+\infty}^{0}\hat{g}_1(\tau_1)d\tau_1.$$

上式经化简为

$$\alpha'(\sigma) - \beta'(\sigma) = A(\beta(\sigma),\varphi(0),\sigma) \times (p_1 - \bar{\bar{y}}_1(\sigma)) + \int_{+\infty}^{0}\hat{g}_1(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1. \tag{22}$$

利用常数变易法将求得的 $\bar{y}_1(\sigma)$ 和 $\bar{\bar{y}}_1(\sigma)$ 代入(20)式,可解得

$$p_1 = \bar{y}_1(0) = \left\{\frac{\alpha'(\sigma) - \beta'(\sigma) - \int_{+\infty}^{0}\hat{g}_1(\tau)\mathrm{d}\tau}{A(\alpha(\sigma),\varphi(0),\sigma)} - \int_0^\sigma(\bar{z}_0' - \bar{h}_0)\exp\left(\int_\sigma^s\frac{\bar{g}_0}{\bar{A}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s + \int_T^\sigma(\bar{\bar{z}}_0' - \bar{\bar{h}}_0)\exp\left(\int_\sigma^s\frac{\bar{\bar{g}}_0}{\bar{\bar{A}}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right\} \Big/ \exp\left(-\int_0^\sigma\frac{\bar{g}_0}{\bar{A}}\mathrm{d}x\right).$$

再把 p_1 代入(21)式,右问题边界层的一次近似 $\{Q_0 z, Q_1 y\}$ 就确定了.

$k(k\geqslant 2)$ 次近似的求法与一次近似相似,同理得到它们的近似表达式为

$$\Pi_k y = -\bar{y}_k(\sigma)\frac{\tilde{z}(\tau_0)}{\tilde{z}(0)} + \tilde{z}(\tau_0)\int_0^{\tau_0}\frac{1}{\tilde{z}^2(\eta)\omega_1(\eta)} \times \int_{+\infty}^{\eta}\tilde{z}(s)\omega_1(s)\tilde{g}_k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\eta, \quad k\geqslant 2,$$

$$Q_k y = (\bar{y}_k(\sigma) - \bar{\bar{y}}_k(\sigma))\frac{\hat{z}(\tau_1)}{\hat{z}(0)} + \hat{z}(\tau_1)\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\hat{z}^2(\eta)\omega_1(\eta)} \times \int_{+\infty}^{\eta}\hat{z}(s)\omega_1(s)\hat{g}_k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\eta, \quad k\geqslant 2,$$

其中

$$\omega_1(\tau_0) = \exp\left(-\int_0^{\tau_0}\tilde{A}(s)\mathrm{d}s\right),$$

$$\omega_2(\tau_1) = \exp\left(-\int_0^{\tau_1}\hat{A}(s)\mathrm{d}s\right).$$

这样即求得 $k(k\geqslant 2)$ 次近似 $\{\Pi_k y, Q_k y\}$ 的表达式. 它们仍与 p_1 以及未知量 $p_2,\cdots,p_{k-1}$ 有关. 为求 $p_k(k\geqslant 2)$ 的值, 我们仍利用(19)式中光滑性条件, 有

$$\bar{\bar{y}}'_{k-1}(\sigma) - \bar{y}'_{k-1}(\sigma) = A(\beta(\sigma),\varphi(0),\sigma) \times (\bar{y}_k(\sigma) - \bar{\bar{y}}_k(\sigma)) + \int_{+\infty}^{0}\hat{g}_k(s)\mathrm{d}s, \tag{23}$$

于是

$$p_k = \bar{y}_k(0) = \left\{\frac{\bar{y}'_{k-1}(\sigma) - \bar{\bar{y}}'_{k-1}(\sigma) - \int_{+\infty}^{0}\hat{g}_k(\tau)\mathrm{d}\tau}{A(\alpha(\sigma),\varphi(0),\sigma)} - \int_0^\sigma(\bar{z}'_{k-1} - \bar{h}_{k-1})\exp\left(\int_\sigma^s\frac{\bar{g}_{k-1}}{A}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s + \int_T^\sigma(\bar{\bar{z}}'_{k-1} - \bar{\bar{h}}_{k-1})\exp\left(\int_\sigma^s\frac{\bar{\bar{g}}_{k-1}}{A}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right\} \Big/ \exp\left(-\int_0^\sigma\frac{\bar{g}_{k-1}}{A}\mathrm{d}x\right). \tag{24}$$

这样就完成了形式渐近解正则部分和边界层项的构造.

5. 模型的精确解及其任意次近似

利用逐次逼近和压缩映照不动点定理[30], 我们可以证明原问题精确解的存在性及其近似式的一致有效性. 这里不再赘述,只写出结论. 模型解的 k 次一致有效渐近展开式:

$$y(t,\mu) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k}\mu^i(\bar{y}_i(t) + \Pi_i y(\tau_0)) + O(\mu^{i+1}), \\ \qquad 0\leqslant t\leqslant\sigma, \\ \sum_{i=0}^{k}\mu^i(\bar{\bar{y}}_i(t) + Q_i y(\tau_1)) + O(\mu^{i+1}), \\ \qquad \sigma\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{25}$$

通过分步法和(25)式,我们构造了模型解 $y(t,\mu)$

在 $t \geqslant 0$ 上的一致有效的渐近展开式,因此能得到关于 μ 的任意次精度的近似解.

6. 例

考虑下面非线性扰动时滞问题

$$\mu y'' = -y(t-1)y' + 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 2,$$

$$y(t) = 1,\ -1 \leqslant t \leqslant 0,\ y(2) = \ln\left(\frac{3}{2}e^2\right) + 1.$$

令 $\mu = 0$,可得左端退化方程的解 $\bar{y}(t) = t + y^*$,以及右端退化方程的解

$$\bar{\bar{y}}(t) = \ln\frac{t-1+y^*}{1+y^*} + \ln\left(\frac{3}{2}e^2\right) + 1.$$

因为 $\bar{y}_0(1) = \bar{\bar{y}}_0(1)$,即

$$1 + y^* = \ln\frac{y^*}{1+y^*} + \ln\left(\frac{3}{2}e^2\right) + 1,$$

于是 $y^* = 2$. 代入原问题显然满足假设,经计算有

$$\alpha(t) = \bar{y}_0(t) = t + 2,$$

$$\Pi_0 y(\tau_0) = -\mathrm{e}^{-\tau_0},\ \tau_0 = \frac{t}{\mu},$$

$$\beta(t) = \bar{\bar{y}}_0(t) = \ln\frac{t+1}{2} + 3,$$

$$\bar{\bar{y}}_1(t) = -(t+1)^{-2} + \frac{1}{9},$$

$$Q_0 y(\tau_1) = 3\mathrm{e}^{-2\tau_1 - \mathrm{e}^{-\tau_1} + 1} + \frac{6 - 3\mathrm{e}^{-\tau_1}}{\mathrm{e}^{2\tau_1}}\int_0^{\tau_1} \mathrm{e}^{2s + \mathrm{e}^{-(s-\tau_1)}}\mathrm{d}s - 3,$$

$$\tau_1 = \frac{t-1}{\mu},$$

$$p_0 = \beta(1) = \bar{\bar{y}}_0(1) = 3,$$

$$p_1 = \frac{\alpha'(1) - \beta'(1)}{A(\beta(1), \varphi(0), 1)} + \bar{\bar{y}}_1(1) = -\frac{5}{36}.$$

这样我们就得到了问题在区间[0,2]上的零次近似表达式

$$y(t,\mu) = \begin{cases} t + 2 - \mathrm{e}^{-\tau_0}, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \ln\frac{t+1}{2} + 3 + \left(3\mathrm{e}^{-2\tau_1 - \mathrm{e}^{-\tau_1} + 1} + \frac{6 - 3\mathrm{e}^{-\tau_1}}{\mathrm{e}^{2\tau_1}}\int_0^{\tau_1} \mathrm{e}^{2s + \mathrm{e}^{-(s-\tau_1)}}\mathrm{d}s - 3\right), & \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

要说明的是,问题在区间 [0,2] 上的任意次近似表达式可以由计算相应得到,但过程相对繁复,我们这里省略只写出它的零次表达式,且模型的精确解 y_{exact} 与近似解 $y(t,\mu)$ 之间的误差 $|y_{exact} - y(t,\mu)| \leqslant c\mu^{k+1}$, $c > 0$ 是一个常数.

下面图 1 和图 2 分别表示参数 μ 取不同值时模型的一次渐近解.

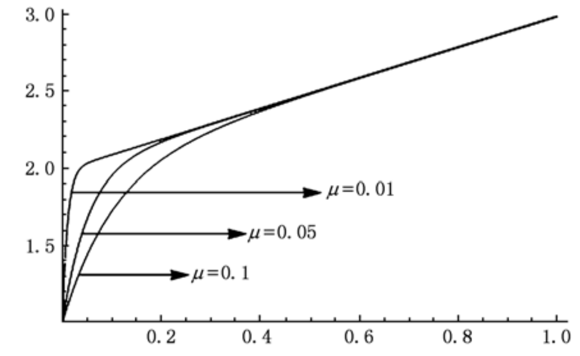

图1　区间[0,1]上原问题当 $\mu = 0.1, 0.05, 0.01$ 时的一次近似解

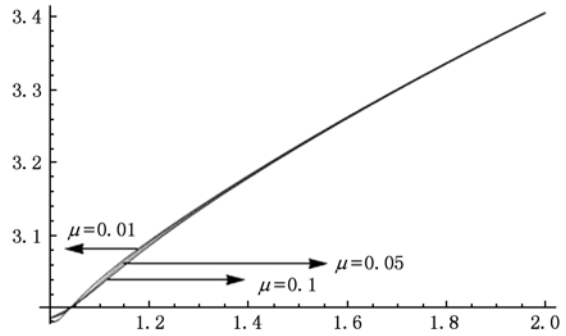

图2　区间[1,2]上原问题当 $\mu = 0.1, 0.05, 0.01$ 时的一次近似解

7. 结　　论

1. 由上述例子, 我们可以发现模型在区间[0, 1]和[1,2]上分别只出现左边界层. 因为问题右端校正层主项在 $t = 1$ 处 $Q_0 y(0) = 0$,此时右端退化方程解与精确解在 $t = 1$ 处的值相差极小,所以这个区间上的边界层现象不明显. 当参数 μ 逐渐减小时, 两个区间上边界层的厚度相应减小. 并且当 μ 充分小时, 退化问题的解是原问题真解的一个很好的逼近. 它显示了参数 μ 对边界层和模型解的影响.

2. 本文是用解析的方法得到问题的渐近解.

它不同于数值方法得到的数值解, 也不是模拟方法得到的模拟解. 因此文中得到的渐近解(25)还可以进行解析计算,提高渐近解关于参数 μ 的任意次精度, 进而得到更深层物理量的渐近性态.

[1] Feng G L, Dong W J, Jia X J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静 2002 物理学报 **51** 1181]

[2] Feng G L, Dia X G, Wang A H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606]

[3] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog. Natur. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王斌 2002 自然科学进展 **12** 102]

[4] Wang L S, Xu D Y 2003 *Sci. China* E **32** 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488]

[5] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1689 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 1689]

[6] Zhou X C, Lin Y H, Lin W T, Mo J Q 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3661

[7] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1291 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 1291]

[8] Jordan G S 1978 *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* A **80** 235

[9] Ni M K, Lin W Z 2009 *Asymptotic for Singular Perturbed Problem* (Beijing: Higher Education Press) p35 (in Chinese) [倪明康、林武忠 2009 奇异摄动问题中的渐近理论 (北京: 高等教育出版社) 第 35 页]

[10] Il'in A M 1991 *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problem* (American Mathematical Society Providence, Rhode Island) p27

[11] Mo J Q, Lin W T 2005 *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser.* B **20** 159

[12] Mo J Q, Liu S D, Tang R R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4403 (in Chinese) [莫嘉琪、刘树德、唐荣荣 2010 物理学报 **59** 4403]

[13] Jiao X Y, Lou Y S 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3611

[14] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202

[15] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204

[16] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[17] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]

[18] Mo J Q, Cheng Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪、程燕 2009 物理学报 **58** 4379]

[19] Li B Q, Ma Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]

[20] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]

[21] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[22] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何铭 2007 物理学报 **55** 3233]

[23] Mo J Q 2009 *Sci. Chin. Ser.* G **52** 1007

[24] Lin W T, Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4641 (in Chinese) [林万涛、莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2008 物理学报 **57** 4641]

[25] Mo J Q, Lin W T 2008 *J. Sys. Sci. &. Complexity* **20** 119

[26] Chen H J, Mo J Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4409 (in Chinese) [陈怀军、莫嘉琪 2010 物理学报 **59** 4409]

[27] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Math. Appl. Sin.* **22** 277

[28] Mo J Q, Tang R R 2007 *Acta Math. Sin.* **27** 296

[29] Nicaise S, Pignotti C 2006 *SIAM Journal on Control and Optimization* **45** 1561

[30] Vasil'eva A B, Butuzov V F 2008 *Asymptotic Methods in Singular-Perturbation Theory* Translated by Ni M K and Lin W Z (Beijing: Higher Education Press) p44 (in Chinese) [A B 瓦西里耶娃、V F 布图索夫 2008 奇异摄动方程解的渐近展开 倪明康, 林武忠译. (北京:高等教育出版社)第 44 页]

Model solution of perturbed delays in classical physics*

Wang Na† Ni Ming-Kang

(*Department of Mathematics*, *East China Normal University*, *Shanghai* 200062, *China*)

(Received 5 August 2010; revised manuscript received 23 August 2010)

Abstract

Using the boundary layer corrective method, one type of perturbed model with delays in classical physics is studied. The asymptotic solution for the model is constructed. The asymptotic behaviors of the solution are also discussed.

Keywords: classical physics, perturbation, approximate solution

PACS: 02.30.Ks, 02.30.Mv, 02.60.Lj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11071075), the Natural Science Foundation of Shanghai (Grant No. 10ZR1409200), Key Subjects Project Foundation of Shanghai (Grant No. B407) and the Biological Macromolecules National Key Laboratory.

† E-mail: wangna1629@yahoo.cm.cn