

## 耦合 Schrödinger 系统的周期振荡折叠孤子\*

李帮庆<sup>1)2)†</sup> 马玉兰<sup>1)</sup> 王 聪<sup>2)</sup> 徐美萍<sup>1)</sup> 李 阳<sup>1)</sup>

1) (北京工商大学计算机与信息工程学院, 北京 100048)

2) (中国矿业大学(北京)机电与信息工程学院, 北京 100083)

(2010年8月2日收到; 2010年9月2日收到修改稿)

引入对称延拓和非线性变换, 将  $(G'/G)$  展开法扩展到研究  $(1+1)$  维非线性耦合 Schrödinger 系统, 构造出该系统的一些分离变量形式的精确解. 通过对解中的任意函数进行适当的设置, 获得了两类周期振荡折叠孤子.

**关键词:** 耦合 Schrödinger 系统,  $(G'/G)$  展开法, 精确解, 周期振荡折叠孤子

**PACS:** 02.30.Jr, 05.45.Yv, 02.90.+p

## 1. 引言

Schrödinger 方程能够描述波和粒子的传播而成为量子力学的基础. 由于光传播时具有波粒二象性, 所以 Schrödinger 方程是最重要的光学模型之一. 特别是非线性 Schrödinger 方程已经广泛应用于现代光通信技术, 而光通信的理论基础就是光孤子传播时的稳定性. 1972 年, Zakharov 等<sup>[1]</sup> 找到了标准非线性 Schrödinger 方程的 Lax 对偶, 并且发现由此得到的非线性 Schrödinger 方程是一个可积系统, 这一结论保证了非线性 Schrödinger 方程孤子的稳定性. 他们还用逆散射法获得了该方程的解, 发现了亮孤子和暗孤子. 后来人们又研究了描述各种特定情形的 Schrödinger 方程及其求解问题<sup>[2-6]</sup>.

孤子结构激发是非线性科学中一项重要研究内容<sup>[7-27]</sup>. 如果非线性物理方程的解中含有相关独立变量的任意函数, 通过对任意函数的适当选取能够激发丰富的局域结构, 而这些局域结构可以解释某些非线性物理现象<sup>[28]</sup>. 由于非线性方程中维数限制, 因而要获得低维方程的含任意函数的解十分困难<sup>[29]</sup>.

$(G'/G)$  展开法是构造非线性数学物理方程精确解的一类有效方法<sup>[30-35]</sup>. 我们对  $(G'/G)$  展开法中的线性行波变换扩展为任意函数的非线性变换, 并构造出若干非线性系统的精确解列<sup>[36-39]</sup>. 由于

应用扩展的  $(G'/G)$  展开法获得的精确解中含有独立变量的任意函数, 从而成为研究局域激发结构的有力工具.

本文考虑如下非线性耦合 Schrödinger 系统:

$$\alpha u - uv - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$v_t - u_x = 0, \quad (2)$$

其中  $u = u(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$  为系统的相应物理场,  $\alpha$  为参数. 该系统是一类描述光纤中光孤子传播的重要模型. 马松华等<sup>[40]</sup> 研究了该系统孤子脉冲、飞秒孤子和时间孤子的激发, 以及时间孤子间的弹性相互作用. 本文首先对  $(G'/G)$  展开法进行对称延拓, 构造出上述系统的一类分离变量形式的精确解, 然后分别讨论基于 Jacobi 椭圆函数和三角函数的振荡折叠孤子的激发与演化过程.

2. 扩展的  $(G'/G)$  展开法

我们首先简要介绍扩展的  $(G'/G)$  展开法. 对于含独立变量  $x, t$  的非线性系统

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3)$$

$(G'/G)$  展开法的主要思想是假设方程 (3) 的解可表示为如下含  $(G'/G)$  的一个代数多项式:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i [G'(q)/G(q)]^i, \quad (4)$$

其中  $q = kx + Vt$  为行波变换,  $k, V, a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  为常数,  $G = G(q)$  满足二阶线性常微分方程

\* 北京市教育委员会科研计划 (批准号: KM201010011001) 和北京市教育委员会科技创新计划 (批准号: 201098) 资助的课题.

† E-mail: libq@th.btbu.edu.cn

$$G''(q) + \lambda G'(q) + \mu G(q) = 0. \quad (5)$$

$G'(q) = dG(q)/dq, G''(q) = d^2G(q)/dq^2$ . 将拟解(4)式代入到原方程(3), 应用齐次平衡法可求得方程(3)的行波解.

下面将(4)式作如下形式的对称延拓:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i [G'(q)/G(q)]^i + \sum_{i=1}^n A_i [G'(q)/G(q)]^{-i}, \quad (6)$$

其中  $q, a_0, a_i, A_i (i=1, 2, \dots, n)$  均为变量  $x, t$  的函数. 行波变换  $q = kx + Vt$  仅为这个含  $x, t$  的任意函数的特例.

### 3. 系统(1), (2)的精确解

下面求耦合 Schrödinger 系统(1)和(2)的精确解. 假设系统有如下形式的解:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^m a_i [G'(q)/G(q)]^i + \sum_{i=1}^m A_i [G'(q)/G(q)]^{-i}, \quad (7)$$

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^n b_j [G'(q)/G(q)]^j + \sum_{j=1}^n B_j [G'(q)/G(q)]^{-j}, \quad (8)$$

其中  $a_0, a_i, A_i (i=1, 2, \dots, m), b_0, b_j, B_j (j=1, 2, \dots, n)$  均为含变量  $x, t$  的待定函数,  $q = q(x, t)$  为  $x, t$  的函数,  $G(q)$  满足方程(5).

对系统(1)和(2)分别应用齐次平衡原则<sup>[41]</sup>, 可得

$$m + 2 = m + n, \quad (9)$$

$$m + 1 = n + 1. \quad (10)$$

求解(9)和(10)式易得  $m = n = 2$ . 因此(7)和(8)式可分别写为

$$u(x, t) = a_0 + a_1 G'(q)/G(q) + a_2 [G'(q)/G(q)]^2 + A_1 [G'(q)/G(q)]^{-1} + A_2 [G'(q)/G(q)]^{-2}, \quad (11)$$

$$v(x, t) = b_0 + b_1 G'(q)/G(q) + b_2 [G'(q)/G(q)]^2 + B_1 [G'(q)/G(q)]^{-1} + B_2 [G'(q)/G(q)]^{-2}. \quad (12)$$

本文寻求系统(1)和(2)形如(11)和(12)式的解,

其中  $q(x, t) = f(x) + g(t)$ . 注意到方程(5), 并由(11)和(12)式计算得到  $u_x, u_{xx}, v_t$ , 然后分别代入系统(1)和(2), 合并  $(G'/G)$  的各阶幂次项, 令其系数为零, 得到如下偏微分方程组:

对于  $(G'/G)^4$ , 有

$$-a_2 b_2 - 6a_2 q_x^2 = 0. \quad (13)$$

对于  $(G'/G)^{-4}$ , 有

$$-A_2 B_2 - 6\mu^2 A_2 q_x^2 = 0. \quad (14)$$

对于  $(G'/G)^3$ , 有

$$-(a_1 b_2 + a_2 b_1) = -2(a_2 q_x)_x - 2q_x(a_{2x} - a_1 q_x - 2\lambda a_2 q_x) + 6\lambda a_2 q_x^2. \quad (15)$$

$$-2b_2 q_t = -2a_2 q_x. \quad (16)$$

对于  $(G'/G)^{-3}$ , 有

$$-(A_1 B_2 + B_1 A_2) = 2\mu(A_2 q_x)_x + 2\mu q_x(A_{2x} + \mu A_1 q_x + 2\lambda A_2 q_x) + 6\lambda \mu A_2 q_x^2. \quad (17)$$

$$2\mu B_2 q_t = 2\mu A_2 q_x. \quad (18)$$

对于  $(G'/G)^2$ , 有

$$\begin{aligned} &\alpha a_2 - (a_0 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_1) \\ &= (a_{2x} - a_1 q_x - 2\lambda a_2 q_x)_x \\ &\quad - 2\lambda q_x(a_{2x} - a_1 q_x - 2\lambda a_2 q_x) \\ &\quad - q_x(a_{1x} - \lambda a_1 q_x - 2\mu a_2 q_x) \\ &\quad + 6\mu a_2 q_x^2. \end{aligned} \quad (19)$$

$$b_{2t} - b_1 q_t - 2\lambda b_2 q_t = a_{2x} - a_1 q_x - 2\lambda a_2 q_x. \quad (20)$$

对于  $(G'/G)^{-2}$ , 有

$$\begin{aligned} &\alpha A_2 - (a_0 B_2 + b_0 A_2 + A_1 B_1) \\ &= (A_{2x} + \mu A_1 q_x + 2\lambda A_2 q_x)_x \\ &\quad + \mu q_x(A_{1x} + \lambda A_1 q_x + 2A_2 q_x) \\ &\quad + 2\lambda q_x(A_{2x} + \mu A_1 q_x + 2\lambda A_2 q_x) \\ &\quad + 6\mu A_2 q_x^2. \end{aligned} \quad (21)$$

$$B_{2t} + \mu B_1 q_t + 2\lambda B_2 q_t = A_{2x} + \mu A_1 q_x + 2\lambda A_2 q_x. \quad (22)$$

对于  $(G'/G)$ , 有

$$\begin{aligned} &\alpha a_1 - (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 B_1 + b_2 A_1) \\ &= (a_{1x} - \lambda a_1 q_x - 2\mu a_2 q_x)_x \\ &\quad - \lambda q_x(a_{1x} - \lambda a_1 q_x - 2\mu a_2 q_x) \\ &\quad - 2\mu q_x(a_{2x} - a_1 q_x - 2\lambda a_2 q_x). \end{aligned} \quad (23)$$

$$b_{1t} - \lambda b_1 q_t - 2\mu b_2 q_t = a_{1x} - \lambda a_1 q_x - 2\mu a_2 q_x. \quad (24)$$

对于  $(G'/G)^{-1}$ , 有

$$\begin{aligned} & \alpha A_1 - (b_0 A_1 + a_0 B_1 + a_1 B_2 + b_1 A_2) \\ &= (A_{1x} + \lambda A_1 q_x + 2A_2 q_x)_x \\ & \quad + \lambda q_x (A_{1x} + \lambda A_1 q_x + 2A_2 q_x) \\ & \quad + 2q_x (A_{2x} + \mu A_1 q_x + 2\lambda A_2 q_x). \end{aligned} \quad (25)$$

$$B_{1t} + \lambda B_1 q_t + 2B_2 q_t = A_{1x} + \lambda A_1 q_x + 2A_2 q_x. \quad (26)$$

对于  $(G'/G)^0$ , 有

$$\begin{aligned} & \alpha a_0 - (a_0 b_0 + a_1 B_1 + A_1 b_1 + a_2 B_2 + b_2 A_2) \\ &= (a_{0x} - \mu a_1 q_x + A_1 q_x)_x \\ & \quad - \mu q_x (a_{1x} - \lambda a_1 q_x - 2\mu a_2 q_x) \\ & \quad + q_x (A_{1x} + \lambda A_1 q_x + 2A_2 q_x). \end{aligned} \quad (27)$$

$$b_{0t} - \mu b_1 q_t + B_1 q_t = a_{0x} - \mu a_1 q_x + A_1 q_x. \quad (28)$$

本文寻求变量分离形式为  $q(x, t) = f(x) + g(t)$  的解. 经求解方程组(13)–(28)可得如下关于  $a_0, a_1, a_2, A_1, A_2, b_0, b_1, b_2, B_1, B_2$  的两组解:

$$\begin{aligned} & \lambda = 0, \\ & a_0 = -12\mu q_x q_t, \\ & a_1 = A_1 = 0, \\ & a_2 = -6q_x q_t, \\ & A_2 = -6\mu^2 q_x q_t, \\ & b_0 = \alpha - q_{xxx}/q_x + 4\mu q_x^2, \\ & b_1 = 6q_{xx}, \\ & b_2 = -6q_x^2, \\ & B_1 = -6\mu q_{xx}, \\ & B_2 = -6\mu^2 q_x^2, \end{aligned} \quad (29)$$

或

$$\begin{aligned} & a_0 = -6\mu q_x q_t, \\ & a_1 = -6\lambda q_x q_t, \\ & a_2 = -6q_x q_t, \\ & A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0, \\ & b_0 = \alpha - q_{xxx}/q_x + 3\lambda q_{xx} - (\lambda^2 + 2\mu)q_x^2, \\ & b_1 = 6q_{xx} - 6\lambda q_x^2, b_2 = -6q_x^2. \end{aligned} \quad (30)$$

分别将(29)和(30)式代入(11)和(12)式, 再根据常微方程(5)的通解可得到系统(1)和(2)的分离变量形式的精确解.

当  $a_0, a_1, a_2, A_1, A_2, b_0, b_1, b_2, B_1, B_2$  满足(29)式时, 可得3种情形的解.

**情形1** 当  $\mu < 0$  时, 记  $\delta_1 = \sqrt{-\mu}$ , 由方程(5)的通解可得

$$\frac{G'(q)}{G(q)} = \delta_1$$

$$\times \frac{C_1 \sinh \delta_1 (f(x) + g(t)) + C_2 \cosh \delta_1 (f(x) + g(t))}{C_1 \cosh \delta_1 (f(x) + g(t)) + C_2 \sinh \delta_1 (f(x) + g(t))}.$$

此时系统(1)和(2)的双曲函数形式解为

$$u_1(x, t) = -6\delta_1^2 f'(x)g'(t) [B_1(x, t) - B_1^{-1}(x, t)]^2, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \alpha - f'''(x)/f'(x) - 4\delta_1^2 f'^2(x) \\ & \quad + 6\delta_1 f''(x) [B_1(x, t) + B_1^{-1}(x, t)] \\ & \quad - 6\delta_1^2 f'^2(x) [B_1^2(x, t) + B_1^{-2}(x, t)], \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} & B_1(x, t) \\ &= \frac{C_1 \sinh \delta_1 (f(x) + g(t)) + C_2 \cosh \delta_1 (f(x) + g(t))}{C_1 \cosh \delta_1 (f(x) + g(t)) + C_2 \sinh \delta_1 (f(x) + g(t))}. \end{aligned}$$

**情形2** 当  $\mu > 0$ , 记  $\delta_2 = \sqrt{\mu}$ , 由方程(5)的通解可得

$$\begin{aligned} & \frac{G'(q)}{G(q)} \\ &= \delta_2 \frac{-C_1 \sin \delta_2 (f(x) + g(t)) + C_2 \cos \delta_2 (f(x) + g(t))}{C_1 \cos \delta_2 (f(x) + g(t)) + C_2 \sin \delta_2 (f(x) + g(t))}. \end{aligned}$$

此时系统(1)和(2)的三角函数形式解为

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -6\delta_2^2 f'(x)g'(t) [B_2(x, t) \\ & \quad + B_2^{-1}(x, t)]^2, \quad (33) \\ v_2(x, t) &= \alpha - f'''(x)/f'(x) + 4\delta_2^2 f'^2(x) + 6\delta_2 f''(x) \\ & \quad \times [B_2(x, t) - B_2^{-1}(x, t)] \\ & \quad - 6\delta_2^2 f'^2(x) [B_2^2(x, t) + B_2^{-2}(x, t)], \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} & B_2(x, t) \\ &= \frac{-C_1 \sin \delta_2 (f(x) + g(t)) + C_2 \cos \delta_2 (f(x) + g(t))}{C_1 \cos \delta_2 (f(x) + g(t)) + C_2 \sin \delta_2 (f(x) + g(t))}. \end{aligned}$$

**情形3** 当  $\mu = 0$  时, 由方程(5)的通解可得

$$\frac{G'(q)}{G(q)} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 [f(x) + g(t)]}.$$

此时系统(1)和(2)的有理函数形式解为

$$u_3(x, t) = -6f'(x)g'(t) \left\{ \frac{C_2}{C_1 + C_2 [f(x) + g(t)]} \right\}^2, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} v_3(x, t) &= \alpha - \frac{f'''(x)}{f'(x)} + 6f''(x) \\ & \quad \times \left\{ \frac{C_2}{C_1 + C_2 [f(x) + g(t)]} \right\} \\ & \quad - 6f'^2(x) \left\{ \frac{C_2}{C_1 + C_2 [f(x) + g(t)]} \right\}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

当  $a_0, a_1, a_2, A_1, A_2, b_0, b_1, b_2, B_1, B_2$  满足(30)

式时, 用类似的方法可得另外 3 种情形的解.

**情形 4** 当  $\lambda^2 - 4\mu > 0$  时, 记  $\delta_4 = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}/2$ , 此时系统(1)和(2)的双曲函数形式解为

$$u_4(x, t) = 6\delta_4^2 f'(x)g'(t)[1 - B_4^2(x, t)], \quad (37)$$

$$v_4(x, t) = \alpha - f'''(x)/f'(x) + 2\delta_4^2 f'^2(x) + 6\delta_4 f''(x) \times B_4(x, t) - 6\delta_4^2 f'^2(x)B_4^2(x, t), \quad (38)$$

其中

$$B_4(x, t) = \frac{C_1 \sinh \delta_4 (f(x) + g(t)) + C_2 \cosh \delta_4 (f(x) + g(t))}{C_1 \cosh \delta_4 (f(x) + g(t)) + C_2 \sinh \delta_4 (f(x) + g(t))}.$$

**情形 5** 当  $\lambda^2 - 4\mu < 0$  时, 记  $\delta_5 = \sqrt{4\mu - \lambda^2}/2$ , 此时系统(1)和(2)的三角函数形式解为

$$u_5(x, t) = -6\delta_5^2 f'(x)g'(t)[1 + B_5^2(x, t)], \quad (39)$$

$$v_5(x, t) = \alpha - f'''(x)/f'(x) - 2\delta_5^2 f'^2(x) + 6\delta_5 f''(x) \times B_5(x, t) - 6\delta_5^2 f'^2(x)B_5^2(x, t), \quad (40)$$

其中

$$B_5(x, t) = \frac{-C_1 \sin \delta_5 (f(x) + g(t)) + C_2 \cos \delta_5 (f(x) + g(t))}{C_1 \cos \delta_5 (f(x) + g(t)) + C_2 \sin \delta_5 (f(x) + g(t))}.$$

**情形 6** 当  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  时, 此时系统(1)和(2)的有理函数形式解为

$$u_6(x, t) = -6f'(x)g'(t) \left\{ \frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda \frac{C_2}{C_1 + C_2[f(x) + g(t)]} + \left[ \frac{C_2}{C_1 + C_2[f(x) + g(t)]} \right]^2 \right\}, \quad (41)$$

$$v_6(x, t) = \alpha - \frac{f'''(x)}{f'(x)} + 3\lambda f''(x) - \frac{3}{2}\lambda^2 f'^2(x) + \frac{C_2[6f''(x) - 6\lambda f'^2(x)]}{C_1 + C_2[f(x) + g(t)]} - 6f'^2(x) \left\{ \frac{C_2}{C_1 + C_2[f(x) + g(t)]} \right\}^2. \quad (42)$$

在情形 6 中, 如果取  $\lambda = 0$ , 则解  $u_6(x, t)$  与  $v_6(x, t)$

退化到  $u_3(x, t)$  与  $v_3(x, t)$ .

#### 4. 系统(1), (2)的周期振荡折叠孤子

由于精确解(31)–(42)式中含有任意函数  $f(x)$  和  $g(t)$ , 给特殊结构的激发提供了必要条件.

引入一个新变量  $X$ , 使得

$$f(X) = \int \bar{f}(X) dX, \quad x = \hat{f}(X), \quad (43)$$

其中  $\bar{f}, \hat{f}$  均为  $X$  的函数. 下面讨论两种情形的周期振荡折叠孤子.

##### 4.1. 基于 Jacobi 椭圆函数的倍周期振荡折叠孤子

取(43)式中的函数  $\bar{f}(X)$  和  $\hat{f}(X)$  分别为

$$\bar{f}(X) = \operatorname{sech}^2(k_1 X),$$

$$x = \hat{f}(X)$$

$$= 12 \operatorname{sn}(X^2, 0.8) - k_2 \tanh(k_1 X), \quad (44)$$

其中  $k_1, k_2$  为常数,  $\operatorname{sn}(X, m)$  为 Jacobi 椭圆正弦函数,  $m$  为模数. 同时取  $g(t)$  满足

$$g(t) = \tanh(lt), \quad (45)$$

其中  $l$  为常数.

将(43)式中的积分常数取为零, 并设置参数

$$k_1 = 0.5, k_2 = 7, l = 0.1,$$

$$C_1 = 4, C_2 = 2, \delta_4 = 0.3. \quad (46)$$

周期性振荡是一种常见的物理现象, 变换(44)式中的 Jacobi 椭圆正弦函数  $\operatorname{sn}(X, m)$  能够激发周期性振荡折叠孤子. 普通折叠一般体现为孤子解的二值性, 而振荡折叠孤子体现为孤子解的多值性. 图 1 显示了解  $u_4(x, t)$  在满足(43)–(45)式和参数取值的条件(46)时振荡折叠孤子. 从图 1 可以看出, 振荡折叠孤子实际上是系统(1)和(2)的一种脉冲, 即在一定时间内激发而形成孤子结构, 孤子会随时间变化从无到有, 从小到大, 然后再变小, 最后消失. 图 2 显示了振荡孤子的演化过程.

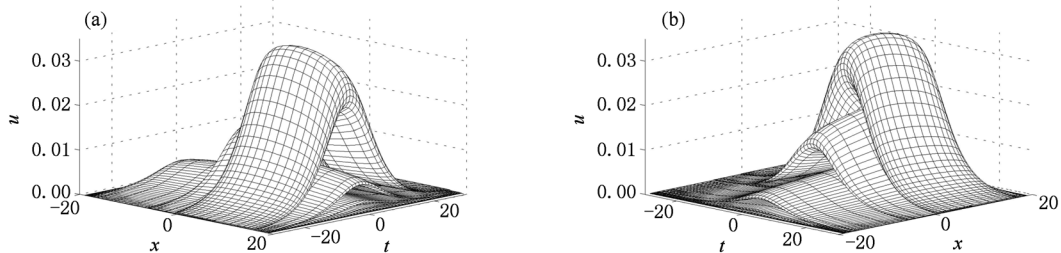


图 1 解  $u_4(x, t)$  满足(43)–(45)式和参数取值的条件(46)时的周期振荡折叠孤子 (a)  $t$ - $x$ - $u$  坐标视图, (b)  $x$ - $t$ - $u$  坐标视图

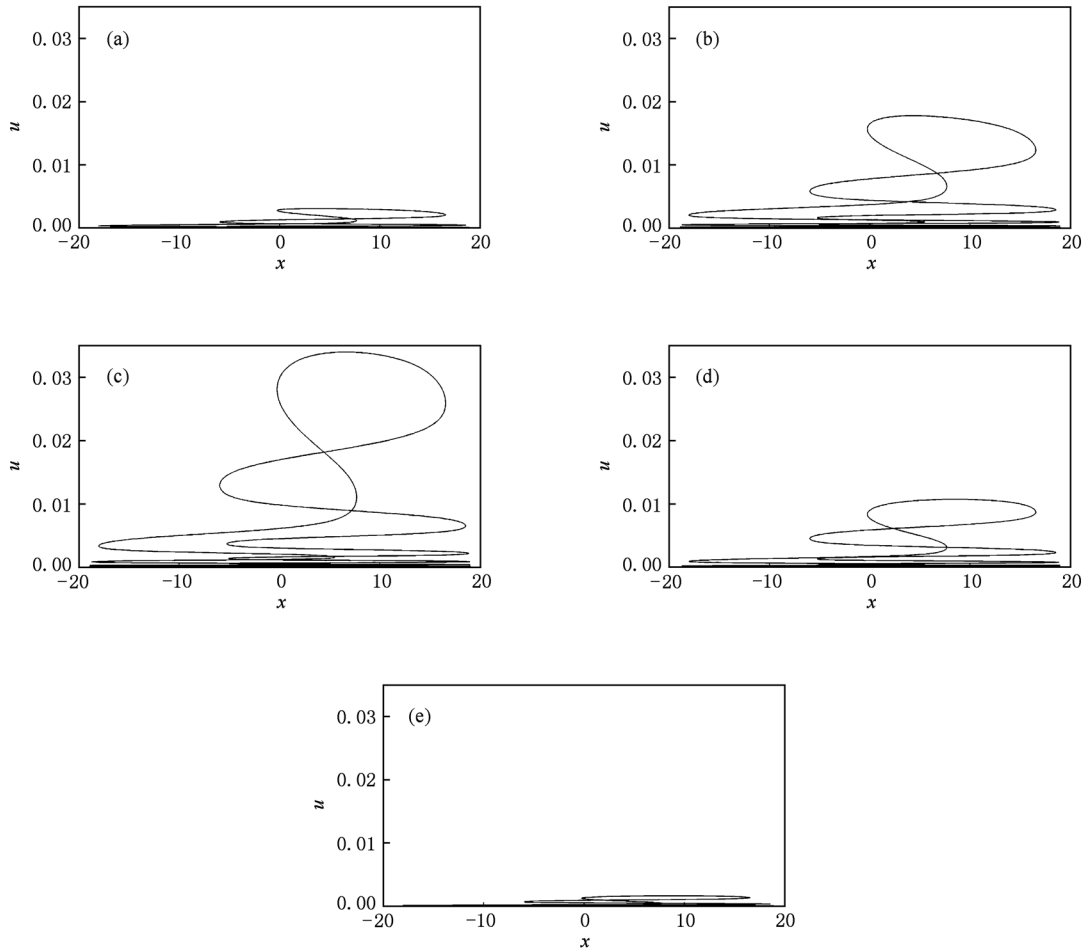


图2 解  $u_4(x,t)$  满足(43)–(45)式和参数取值条件(46)时的周期振荡折叠孤子演化图 (a)  $t = -20$ , (b)  $t = -10$ , (c)  $t = 0$ , (d)  $t = 10$ , (e)  $t = 20$

#### 4.2. 基于三角函数的周期振荡折叠孤子

取(43)式中的函数  $\bar{f}(X)$  和  $\hat{f}(X)$  分别为  $\bar{f}(X) = \text{sech}^2(k_1 X)$ ,

$$x = \hat{f}(X) = \sin(5X) - k_2 \tanh(k_1 X), \quad (47)$$

其中  $k_1, k_2, l$  为常数. 同时  $g(t)$  仍取(45)式, 设置

参数

$$k_1 = 0.5, k_2 = 7, l = 0.1,$$

$$C_1 = 4, C_2 = 2, \delta_4 = 0.9. \quad (48)$$

图3显示解  $u_4(x,t)$  在满足设置(43), (45), (47)和参数取值条件(48)时振荡折叠孤子的效果, 图4显示了该振荡孤子的演化过程.

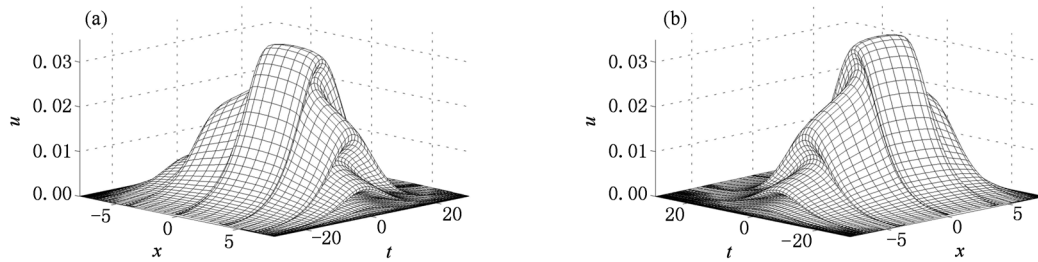


图3 解  $u_4(x,t)$  满足(43), (45), (47)和参数取值条件(48)时的周期振荡折叠孤子 (a)  $t-x-u$  坐标视图, (b)  $x-t-u$  坐标视图

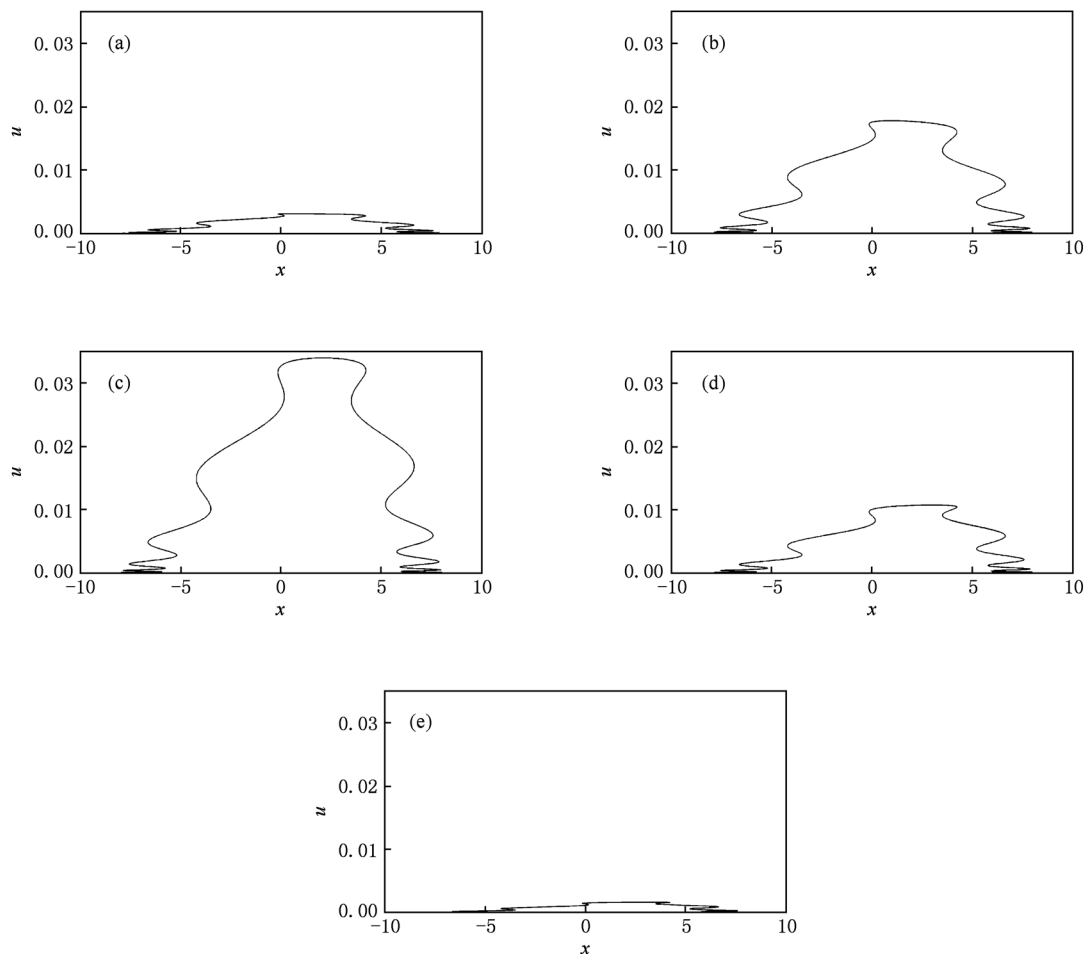


图4 解  $u_4(x, t)$  满足(43), (45), (47)和参数取值条件(48)时的周期振荡折叠孤子演化图 (a)  $t = -20$ , (b)  $t = -10$ , (c)  $t = 0$ , (d)  $t = 10$ , (e)  $t = 20$

## 5. 结 论

将  $(G'/G)$  展开法扩展后构造出非线性耦合 Schrödinger 系统的精确解列, 而这些精确解能够激发丰富的局域结构. 通过适当设置这些解中的任意

函数, 研究了非线性耦合 Schrödinger 系统的两类新孤子, 即分别基于 Jacobi 椭圆函数和三角函数的周期振荡折叠孤子. 理论上, 多值解可以承载和传播更多信息, 因此振荡折叠孤子非线性光学中可能有一定的应用价值.

- |   |   |
|---|---|
| <p>[1] Zakharov V E, Shabat A B 1972 <i>J. Sov. Phys. JETP</i> <b>34</b> 62</p> <p>[2] Pusharov D I, Tanev S 1996 <i>J. Opt. Commun.</i> <b>124</b> 354</p> <p>[3] Tanev S, Pusharov D I 1997 <i>J. Opt. Commun.</i> <b>141</b> 322</p> <p>[4] Gong L X 2006 <i>Acta Phys. Sin.</i> <b>55</b> 4414 (in Chinese) [龚伦训 2006 物理学报 <b>55</b> 4414]</p> <p>[5] Li J F, Shan S M, Yang J K, Jiang Z F 2007 <i>Acta Phys. Sin.</i> <b>56</b> 5597 (in Chinese) [厉江帆、单树民、杨建坤、姜宗福 2007 物理学报 <b>56</b> 5597]</p> <p>[6] Cheng X P, Lin J, Wang Z P 2007 <i>Acta Phys. Sin.</i> <b>56</b> 3031 (in Chinese) [程雪苹、林 机、王志平 2007 物理学报 <b>56</b> 3031]</p> | <p>[7] Lou S Y, Li Y S 2006 <i>Chin. Phys. Lett.</i> <b>23</b> 2633</p> <p>[8] Tang X Y, Liang Z F 2006 <i>Phys. Lett. A</i> <b>351</b> 398</p> <p>[9] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z 2006 <i>Chin. Phys.</i> <b>15</b> 2765</p> <p>[10] Ma H C, Ge D J, Yu Y D 2008 <i>Chin. Phys. B</i> <b>17</b> 1448</p> <p>[11] Ying J P, Lou S Y 2003 <i>Chin. Phys. Lett.</i> <b>20</b> 1448</p> <p>[12] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 <i>Commun. Theor. Phys.</i> <b>44</b> 203</p> <p>[13] Fang J P, Zheng C L 2005 <i>Chin. Phys.</i> <b>14</b> 670</p> <p>[14] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 <i>Acta Phys. Sin.</i> <b>54</b> 2990</p> |
|---|---|

- (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [15] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch.* **61a** 249
- [16] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [17] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1245
- [18] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 611 (in Chinese) [黄磊、孙建安、豆福全、段文山、刘兴霞 2007 物理学报 **56** 611]
- [19] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2007 *Z. Naturforsch.* **62a** 8
- [20] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 121
- [21] Li J B, Zheng C L, Ma S H 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 641
- [22] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
- [23] Ma Z Y, Zhu J M, Zheng C L 2004 *Chin. Phys.* **13** 1382
- [24] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [25] Ma Z Y, Zheng C L 2006 *Chin. Phys.* **15** 45
- [26] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6784 (in Chinese) [马松华、方建平、任清寰 2007 物理学报 **56** 6784]
- [27] Ma S H, Liu X Q 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 795
- [28] Lou S Y, Tang X Y 2006 *Methods of Nonlinear Mathematical Physics* (Beijing: Science Press) p120 (in Chinese) [楼森岳、唐晓艳 2006 非线性数学物理方法 (北京: 科学出版社) 第 120 页]
- [29] Shen S F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1011 (in Chinese) [沈守枫 2006 物理学报 **55** 1011]
- [30] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417
- [31] Bekir A 2008 *Phys. Lett. A* **372** 3400
- [32] Zhang J, Wei X L, Lu Y J 2008 *Phys. Lett. A* **372** 3653
- [33] Li L X, Wang M L 2009 *Appl. Math. Comput.* **208** 440
- [34] Li B Q, Ma Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]
- [35] Ma Y L, Li B Q 2010 *Appl. Math. Comput.* **216** 2137
- [36] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese) [马玉兰、李帮庆、孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]
- [37] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1415 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰、徐美萍 2010 物理学报 **59** 1415]
- [38] Li B Q, Ma Y L 2010 *Z. Naturforsch.* **65a** 518
- [39] Ma Y L, Li B Q 2010 *J. Math. Phys.* **51** 063512
- [40] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [41] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169

## Folded soliton with periodic vibration for a nonlinear coupled Schrödinger system \*

Li Bang-Qing<sup>1)2)†</sup> Ma Yu-Lan<sup>1)</sup> Wang Cong<sup>2)</sup> Xu Mei-Ping<sup>1)</sup> Li Yang<sup>1)</sup>

1) (School of Computer and Information Engineering, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

2) (School of Mechanical Electronic and Information Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China)

(Received 2 August 2010; revised manuscript received 2 September 2010)

### Abstract

Introducing symmetrical expansion and nonlinear transformation, the ( $G'/G$ )-expansion method is extended to investigate a nonlinear coupled Schrödinger system. Some exact solutions with variable separation are constructed for the system. The solutions involve two arbitrary functions of independent variables. By setting properly the arbitrary functions in the solutions, two types of folded solitons with periodic vibration are observed.

**Keywords:** coupled Schrödinger system, ( $G'/G$ )-expansion method, exact solution, folded soliton with periodic vibration

**PACS:** 02.30.Jr, 05.45.Yv, 02.90.+p

\* Project supported by the Scientific Research Program of the Committee of Education of Beijing, China (Grant No. KM201010011001), and the Science and Technology Innovation Program of the Committee of Education of Beijing, China (Grant No. 201098).

† E-mail: libq@th.btbu.edu.cn